UNIVERSIDADE REGIONAL DE BLUMENAU - FURB
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS (CCEN)
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA (PPGECIM)

JULIANO ELI

NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS APLICAÇÕES: UMA PROPOSTA DE ENSINO CONTEXTUALIZADO COM ABORDAGEM HISTÓRICA

BLUMENAU
2014

JULIANO ELI

NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS APLICAÇÕES: UMA PROPOSTA DE ENSINO CONTEXTUALIZADO COM ABORDAGEM HISTÓRICA

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática do Centro de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Regional de Blumenau, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

Profa. Doutora Tânia Baier – Orientadora

Profa. Doutora Márcia Regina Barcellos Vianna Vanti – Co-orientadora

BLUMENAU

2014

NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS APLICAÇÕES: UMA PROPOSTA DE ENSINO CONTEXTUALIZADO COM ABORDAGEM HISTÓRICA

Por

JULIANO ELI

Esta dissertação foi julgada e aprovada em sua forma final pelo orientador e demais membros da banca examinadora.

Tânia Baier

Presidente: Profa. Dra. Tânia Baier
Universidade Regional de Blumenau (FURB)

Márcia V. Vanti

Profa. Dra. Márcia Regina Barcellos Vianna Vanti
Universidade Regional de Blumenau (FURB)

RW PROBST

Prof. Dr. Roy Wilhelm Probst
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

Prof. Dr. Adriano Péres
Universidade Regional de Blumenau (FURB)

Blumenau, 14 de fevereiro de 2014.

Dedico este trabalho às pessoas que tanto amo:
Marta, Simone, Miro e Fabiano.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, em Quem confio eternamente.

Às minhas orientadoras Tânia e Márcia que sempre mostraram empatia aos meus erros e que souberam me conduzir durante minhas incertezas, com muita satisfação e motivação.

À professora e aos estudantes da escola de ensino básico do município de Gaspar, por permitirem a aplicação e o desenvolvimento deste trabalho.

À Prefeitura Municipal de Blumenau que concedeu licença para me dedicar a este trabalho.

Ao Programa do Fundo de Apoio à Manutenção e ao Desenvolvimento da Educação Superior – FUMDES, pelo auxílio financeiro.

Aos professores do PPGECIM-FURB e aos professores compositores das bancas de Qualificação e Defesa Final, pelas suas sábias recomendações e colaborações.

A todos estudantes, amigos e familiares, que sempre me incentivaram a participar deste mestrado.

O coração tem suas razões, que a própria razão desconhece.

Blaise Pascal

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo contribuir para o estudo inicial dos números complexos, fundamentando o ensino em sua construção histórica e explorando algumas aplicações. Inicialmente encontra-se no texto o relato da avaliação diagnóstica realizada, visando conhecer as concepções dos estudantes sobre raízes quadradas de números negativos. Essa avaliação diagnóstica foi aplicada a 116 estudantes de quatro escolas públicas de ensino médio, revelando dificuldades conceituais de potência quadrada, dificuldades no uso da regra de sinais da multiplicação dos números reais e uma diversidade de respostas equivocadas à raiz quadrada de números negativos. Em seguida, são apresentados tópicos da história da criação dos números complexos e suas aplicações, constituindo um texto de apoio para o estudo inicial desse conteúdo matemático. O produto educacional desta dissertação consiste em uma proposta de ensino contendo atividades sobre a representação de números complexos no plano de Argand-Gauss e aplicações na física e na geometria fractal. Nessa dissertação também se encontram aplicações para o ensino médio e superior, como a transformação de Joukowski e o estudo em circuitos elétricos. Na elaboração e validação do produto educacional, foram seguidos os preceitos da pesquisa participante. No texto se encontram os resultados obtidos em avaliação, realizada após a aplicação do produto educacional, com um grupo de 73 estudantes do 3º ano do ensino médio noturno de uma escola pública localizada na cidade de Gaspar-SC. Quinze acadêmicos do primeiro semestre de um curso de licenciatura em Matemática de Blumenau-SC também colaboraram com uma análise descritiva das atividades apresentadas. Na análise da aplicação do produto educacional são apontadas as modificações nas atividades decorrentes das contribuições dos estudantes acerca da redação de alguns enunciados. Após a avaliação final constatou-se que foram superadas as dificuldades encontradas pelos estudantes no entendimento de raízes quadradas de números negativos. O uso de recurso computacional é fundamental para o estudo inicial dos números complexos, por possibilitar a exploração de imagens no plano complexo e de objetos fractais.

Palavras-chave: Números Complexos. História da Matemática. Ensino de Matemática. Ensino Médio.

ABSTRACT

This paper aims to contribute to the initial study of complex numbers, basing the education in its historic construction and exploring a few applications. Initially, it lies in the text, the performed diagnostic evaluation report, which aims to know the conceptions of students about square roots of negative numbers. This diagnostic assessment was applied to 116 students from four public high schools, revealing conceptual difficulties of square potency, difficulties in the use of signals rule of multiplication of real numbers and a diversity of wrong answers to the square root of negative numbers. Then, topics in the history of creation of complex numbers and their applications are presented, constituting a supporting text for the initial study of this mathematical content. The educational product of this dissertation consists of a teaching proposal containing activities on the representation of complex numbers in the Argand-Gauss plane and applications in physics and fractal geometry. In this dissertation there are also applications for high school and higher education, as for example the Joukowski transformation and study electric circuits. In the development and validation of the educational product the precepts of the Participant Survey were followed. In the text there are the results obtained in the evaluation held after the application of the educational product with a group of 73 students of the 3rd year of night high school in a public school located in Gaspar-SC. Fifteen students from the first semester of an undergraduate degree in Mathematics from Blumenau-SC also collaborated with a descriptive analysis of the presented activities. In the application of the educational product analysis, the changes are shown in the activities arising from contributions from students about some of the problem’s headings writing. After final review it was found that the difficulties encountered were overcome by students in the understanding of square roots of negative numbers. The use of computational resources is essential to the initial study of complex numbers by enabling the exploitation of images in the complex plane and of fractals objects.

Keywords: Complex Numbers. History of Mathematics. Teaching Math. High School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SÍMBOLOS E SIGLAS

π	pi
CA	corrente alternada
Cefet-MG	Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
dC	depois de Cristo
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
e	número de Euler
FGV-SP	Fundação Getúlio Vargas de São Paulo
i	unidade imaginária
j	unidade imaginária utilizada nos estudos de análise de circuitos elétricos
log	logaritmo
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCN+	Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais
TFA	Teorema Fundamental da Álgebra
UE-RJ	Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UFPB	Universidade Federal da Paraíba
UFS	Universidade Federal de Sergipe

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O meu[1] apreço pelos números complexos iniciou na graduação em Matemática (2001) e continua até o atual momento, atuando como professor no ensino fundamental e médio. Sempre me interessei em observar diferenças entre as raízes quadradas de números negativos e os números reais. Lembro-me da vez, na qual cursava o 2º semestre da graduação, e procurei ajuda de um professor para a seguinte questão: nos complexos, a potência $\left(\sqrt{-4}\right)^2 = \left(\sqrt{4.(-1)}\right)^2 = \left(2\sqrt{-1}\right)^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$, mas utilizando a propriedade dos números reais, a mesma potência diverge no sinal: $(\sqrt{-4})^2 = \sqrt{-4} \times \sqrt{-4} = \sqrt{(-4).(-4)} = \sqrt{16} = 4$. Naquela ocasião soube que essa última propriedade não é válida para os números complexos, pois, o produto de raízes aritméticas, $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$, vale somente para a e b, números reais positivos. Mesmo assim, a comparação nos dois modos de resolver despertou minha atenção. Foi uma ótima oportunidade para entender a unidade imaginária $i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1$, ao testar a propriedade acima com a e b, números reais negativos.

A distinção entre os números reais e os números complexos ficou esclarecida no decorrer da graduação, após a disciplina de Estruturas Algébricas. Dúvidas semelhantes inquietam estudantes como já intrigaram matemáticos no passado, e foram os motivos para o desenvolvimento do conjunto dos números complexos. Segundo Baumgart (1992, p.14), o desenvolvimento dos números complexos ocorreu paralelo ao desenvolvimento das estruturas algébricas onde se percebe “[...] como um alimentou o outro”.

As dúvidas manifestadas pelos estudantes geralmente se relacionam com o fato dos números complexos não serem necessários no cotidiano das pessoas, acostumadas com a utilização e eficiência dos números reais. Através de minha vivência pedagógica, pressuponho que o obstáculo didático dos estudantes do ensino básico, em relação à aprendizagem de números complexos, possa estar nos conceitos de potências quadradas de números reais, pois o entendimento de que *não existe* raiz quadrada de número negativo deve ser desconstruído e a afirmação de que todo número elevado ao quadrado *é positivo,* deve ser ampliada. Sem restrições para o ano ou a série, os estudantes do ensino básico teriam uma melhor compreensão no

[1] Nesta apresentação inicial é utilizado o verbo na primeira pessoa do singular. Após a apresentação, utiliza-se o verbo na forma impessoal.

entendimento de raízes quadradas de números negativos, ao saberem que existe um número que elevado ao quadrado tem resultado negativo, observando que não se trata de um número real. É possível abordar tais ideias em diversos momentos da formação básica dos estudantes, não apenas no último ano do ensino médio, pois o ensino de números complexos pode ser desvinculado de um currículo linear, sendo tratado conforme as PCN+ "[...] na parte flexível do currículo das escolas." (2002, p. 122).

Durante minha experiência como estudante de ensino médio (1998 a 2000) e, atualmente, exercendo a função de docente da disciplina de Matemática, percebi que os primeiros contatos com números complexos, quando ocorrem, acontecem nos últimos anos do ensino básico. Atualmente constatam-se mudanças nas últimas edições dos livros didáticos, que trazem situações contextualizadas juntamente com procedimentos algébricos. Os estudantes aprendem a resolver potências quadradas, raízes quadradas, equações do 2º grau, mas, muitas vezes não sabem o significado e não entendem o motivo de recusar a existência da raiz quadrada de um número negativo no conjunto dos números reais. A partir do 9º ano do ensino fundamental, as equações com radicandos negativos são muitas vezes abandonadas com dizeres do tipo é *impossível* ou *não existe uma solução real*, sem uma discussão mais ampla sobre o que seriam essas respostas para tais problemas e de que forma estas situações inquietaram matemáticos em séculos passados.

Outra problemática, apresentada por Carneiro (2004a, 2004b), em relação ao ensino de números complexos, está na definição dada a $i = \sqrt{-1}$, a *unidade imaginária*, pois, no ensino fundamental, é definido que o quadrado de um número real não pode ser negativo. E, no final do ensino médio, quando é abordado o tema números complexos, é definido que existe o quadrado de um número que tem solução negativa. "Nada mais natural que o aluno pense que os complexos foram inventados apenas para resolver exercícios sobre números complexos." (CARNEIRO, 2004a, p. 16).

Dúvidas sobre a existência de raízes quadradas de números negativos ocorreram durante vários séculos e em diversas culturas. A construção conceitual de um objeto que tem seu valor registrado pela história, bem como as relações desse com outros saberes, proporcionam ideias e justificativas claras no entendimento dos estudantes sobre o estudo desse objeto. Por isso, destaca-se como importante o uso da história da matemática para "[...] esclarecer idéias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns 'porquês' e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento." (BRASIL, 1998, p.43).

O conhecimento de fatos históricos sobre as dificuldades encontradas por gênios da Matemática, no entendimento de raízes quadradas de números negativos, pode ajudar na autoestima dos estudantes da Educação Básica ao tratar os erros e dificuldades como inevitáveis para o aprendizado. Os questionamentos e a necessidade de se trabalhar com raízes quadradas de números negativos em equações, principalmente as de 3º grau, impulsionaram matemáticos já na época do Renascimento a se preocuparem com o aparecimento constante dessas raízes. Porém, a desconfiança na aceitação do conjunto dos números complexos como números, por cientistas importantes do século XV até o século XVIII fez com que alguns matemáticos importantes utilizassem os números complexos apenas como ferramenta para resolver equações. Leonardo Euler operava com muita precisão com os números complexos, mas mostrava que às vezes, preferia contornar as dificuldades que os envolvessem "[...] alterando os valores numéricos dos problemas." (SILVA, 2009, p.47).

Carneiro (2004a, p.17), destaca que "os complexos eram usados de forma envergonhada, e acompanhados de nomes ofensivos, que permaneceram até hoje na nossa nomenclatura – como 'imaginários' – mas ainda assim eram cada vez mais utilizados". Com a contribuição de Gauss, a representação geométrica, "[...] fez com que os matemáticos se sentissem muito mais à vontade com os números imaginários, pois esses números podiam agora ser efetivamente visualizados [...]." (EVES, 1995, p. 524).

Na atualidade, acontecem aplicações dos números complexos em diversas áreas do conhecimento, e, seguindo os resultados da pesquisa realizada por Mello e Santos (2005), acredita-se ser fundamental, elencar algumas aplicações no ensino. A utilização dos complexos acontece em áreas da física, química e da própria matemática. Destaca-se nos estudos de eletricidade, aerodinâmica, geometria fractal dos conjuntos de Julia e do conjunto de Mandelbrot, teorias quântica, equações polinomiais, funções com variáveis complexas, e em diversos problemas que remetem à geometria analítica. A sua representação geométrica se relaciona potencialmente com saberes de trigonometria, pares ordenados e polígonos regulares.

Diante das considerações acima realizadas, emergem algumas indagações que nortearam a elaboração desta dissertação:

Quais as concepções dos estudantes de ensino médio sobre raízes quadradas de números negativos?

A abordagem histórica e epistemológica da construção do tema números complexos ajudará no aprendizado dos estudantes?

Atividades contextualizadas despertam o interesse dos estudantes no tema números complexos?

1.1 OBJETIVO GERAL

Contribuir para o estudo inicial dos números complexos fundamentando-os na sua construção histórica e na sua aplicação em outros saberes científicos.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

a) Aplicar e relatar os resultados de avaliações diagnósticas para identificar dificuldades encontradas pelos estudantes relacionadas com potenciação e raízes quadradas de números negativos.

b) Construir um arquivo de apresentação (PowerPoint e BrOffice Impress) para o estudo introdutório de números complexos focando a história e algumas de suas aplicações.

c) Sugerir atividades pedagógicas contextualizadas no produto educacional.

d) Enfocar os fractais conjuntos de Julia e de Mandelbrot na proposta de atividades do produto educacional utilizando o software de exploração visual *Fractint* e planilhas eletrônicas.

e) Mostrar o uso de números complexos em circuitos elétricos e atividades relacionadas.

Para que os objetivos da dissertação fossem alcançados, foram seguidos os preceitos da Pesquisa Participante, na qual a participação ativa dos estudantes no processo investigativo e do pesquisador como sujeito participante dessa investigação objetiva melhorar a prática.

Esta dissertação está fundamentada em documentos legais sobre educação brasileira, trabalhos científicos sobre o ensino de números complexos, pesquisas sobre erros que alunos cometem e textos de estudiosos da história da matemática: PCN, PCN+, Orientações Curriculares para o ensino médio, DCN, D’Ambrosio, Caraça, Cury, Cajori, Eves, Baier, Boyer, Nahim, Carneiro, Milies, Pérez Echeverría, Sad e Silva, Silva e Pinto.

Uma avaliação diagnóstica sobre a concepção de raiz quadrada de números negativos foi aplicada a 116 estudantes de ensino médio de quatro escolas localizadas no Vale do Itajaí-S.C. A avaliação diagnóstica consistiu na realização de cálculos de potências, raízes quadradas e resolução de equações quadráticas. Foi solicitado que os estudantes explicitassem seu entendimento sobre os resultados obtidos. Com esses resultados, foram identificadas as dificuldades e os equívocos dos estudantes.

Foi elaborada uma apresentação com recurso computacional, onde se encontram conceitos iniciais sobre números complexos, suas aplicações em diversos contextos e algumas informações sobre a história dos números complexos. A mesma foi apresentada para 73 estudantes do terceiro ano do ensino médio e para 15 licenciandos em Matemática.

Frente ao interesse despertado nas aplicações dos números complexos na geometria fractal, foi elaborada uma apresentação complementar focando os cálculos matemáticos realizados para a obtenção dos fractais de Julia e de Mandelbrot.

As atividades que utilizam recursos computacionais, sugeridas no produto educacional desta dissertação, são apresentadas nos arquivos PowerPoint® da Microsoft Office 2010, de propriedade da empresa Microsoft e BrOffice.org Impress 3.1 da empresa Sun Microsystems Inc, plataforma livre que está disponível na maioria das escolas básicas da rede pública de Santa Catarina.

Dezesseis atividades foram elaboradas em formato de arquivo pdf, trazendo situações contextualizadas focando os aspectos geométricos, que possibilitam a visualização dos números complexos no plano de Argand-Gauss. Previamente avaliadas pela professora das turmas de ensino médio, as atividades foram aplicadas nas referidas turmas desta escola estadual localizada no município de Gaspar-SC. Os acadêmicos do 1º semestre de um curso de Matemática também fizeram o uso desse material e contribuíram com uma análise crítica sobre as atividades contextualizadas. Considerando dificuldades, dúvidas, sucessos e fracassos dos procedimentos metodológicos, através de observações verbais dos estudantes e dos seus registros escritos, os enunciados das atividades foram modificados, chegando ao formato apresentado no produto educacional desta dissertação.

No Capítulo 2 encontra-se o relato e a análise da avaliação diagnóstica realizada para identificar dificuldades encontradas pelos estudantes relacionadas com potenciação e raízes quadradas de números negativos.

No Capítulo 3 são apresentadas as possibilidades do uso da história da matemática na sala de aula e informações sobre a construção histórica dos números complexos. É destacada a aplicação dos números complexos em diversas áreas do saber.

O Capítulo 4 aborda a análise de documentos educacionais e textos científicos que tratam o tema *ensino de números complexos*. O capítulo segue com a investigação que envolveu estudantes do ensino médio noturno de uma escola pública. Apresenta-se a análise e discussão da aplicação das atividades pedagógicas contextualizadas que compõem o produto educacional. O produto educacional é constituído de atividades sobre representação de números complexos no plano de Argand-Gauss e aplicações na física, sendo enfocados os fractais dos conjuntos de Julia e de Mandelbrot. As atividades sugeridas estão dispostas no Apêndice A desta dissertação e também podem ser acessadas no site: https://sites.google.com/site/julianoeli/

2 AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

O presente capítulo descreve a avaliação diagnóstica realizada com estudantes do ensino médio envolvendo as concepções sobre raízes quadradas de números negativos. As questões propostas na avaliação diagnóstica visaram identificar dificuldades encontradas pelos estudantes relacionadas às potências quadradas e às raízes quadradas de números negativos, onde tais conceitos são fundamentais para o estudo de números complexos. Para a análise das resoluções realizadas pelos estudantes foi utilizada a pesquisa qualitativa, onde os dados, categorizados e expressos de forma quantitativa foram examinados sob a análise descritiva. Na parte 1 do produto educacional encontra-se na íntegra a avaliação diagnóstica.

2.1 RESULTADOS DA APLICAÇÃO DA AVALIAÇÃO DIGNÓSTICA

Para Pinto (2000), partir de um bom diagnóstico dos conhecimentos prévios dos estudantes facilita a articulação dos conhecimentos formais com os informais. A mesma autora (2000, p. 156-157) afirma que o diagnóstico de um tema em questão é importante, pois “[...] as lacunas existentes entre os conhecimentos informais e os formais poderão explicitar as dificuldades do aluno e as fontes de seus erros.”

A avaliação diagnóstica, descrita a seguir, foi realizada por 124 estudantes do ensino médio, de escolas públicas localizadas no vale do Itajaí, Santa Catarina, no período compreendido entre novembro a dezembro de 2012. As escolas[2] estão localizadas nos municípios de Blumenau, Timbó e Pomerode. Em Pomerode, na *Escola A* participaram 12 estudantes de uma turma do 2º ano e 21 estudantes de outra turma do 3º ano, ambas do ensino noturno. Em Timbó, na *Escola B* participaram 29 estudantes de uma turma do 1º ano de ensino integral. Em Blumenau, na *Escola C* participaram 35 estudantes de uma turma do 2º ano de ensino integral e na *Escola D*, no período noturno, participaram 15 estudantes de uma turma de 2º ano e 12 estudantes de uma turma de 3º ano. Oito dessas avaliações foram crivadas da análise por apresentarem questões em branco ou repletas de rasuras, perfazendo um total de 116 avaliações analisadas e envolvendo seis turmas distintas.

[2] Os nomes das escolas não são mencionados em consideração aos princípios éticos de confidencialidade. Neste parágrafo, elas estão nominadas ficticiamente com as letras iniciais de nosso alfabeto.

Com o conhecimento e permissão da equipe gestora de cada escola, a avaliação foi aplicada pelo autor deste trabalho e por professores das escolas que possibilitaram a sua realização. Os estudantes foram orientados sobre os assuntos que estavam na pesquisa, porém não foi mencionado a eles o tema números complexos para não influenciar nas respostas. Foi pedido também, que resolvessem individualmente, sem consultar materiais e que escrevessem a caneta, no tempo de 40 a 45 minutos (uma aula). Eles também foram orientados a não se identificarem na avaliação, pois não era de interesse da pesquisa saber o nome e nem a identificação da escola. Foi solicitado também, que explicitassem o entendimento sobre os resultados obtidos e, no caso de dúvidas, descrevessem as dificuldades encontradas na resolução da questão.

A seguir é apresentada a análise realizada sobre a avaliação de 116 estudantes. Para cada uma das questões foi elaborada categorias de análise *a posteriori,* necessárias após observar o universo de respostas que os estudantes registraram em cada questão. As categorias estão expressas em tabelas contendo a frequência expressa em números e também em porcentagens. Seguirá a análise crítica sobre esses resultados e imagens digitalizadas de algumas respostas dos estudantes. Na Tabela 1 apresenta-se o resultado da análise da questão um que envolve quatro operações de potências quadradas.

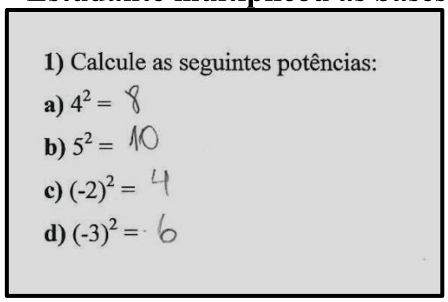
Tabela 1 - Cálculo de potências quadradas

Questão 1: Calcule as seguintes potências:				
	a) 4^2	b) 5^2	c) $(-2)^2$	d) $(-3)^2$
Correto	113 97,4%	114 98,3%	103 88,8%	96 82,7%
Erro no sinal	0 0%	0 0%	11 9,5%	11 9,5%
Incorreto	3 2,6%	2 1,7%	2 1,7%	9 7,8%
TOTAL	116 100%	116 100%	116 100%	116 100%

Na categoria *Correto* da Tabela 1, estão as porcentagens que variaram entre 82,7% a quase 100%, revelando que a maioria dos 116 estudantes efetuou corretamente os cálculos, mostrando que compreendem operações de potências quadradas envolvendo base positiva e negativa. Mesmo assim, observa-se que nos percentuais inferiores das categorias *Erro no sinal* e *Incorreto*, estão respectivamente, os estudantes que erraram apenas os sinais das potências e os que resolveram de modo incorreto não somente o sinal. Essas duas categorias indicam os procedimentos tomados por tais estudantes que ajudam na identificação dos possíveis erros elementares e fundamentais para o entendimento de números complexos.

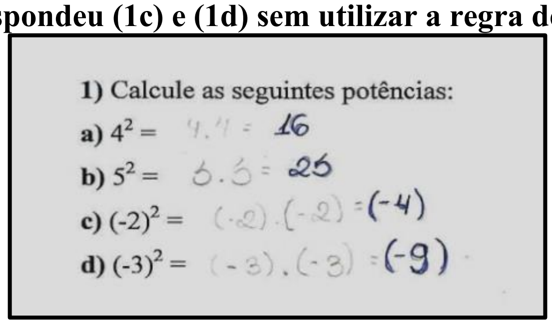
Dois, dos três estudantes que efetuaram o cálculo de modo incorreto na questão (1a), entenderam 4^2 como sendo a multiplicação 4 x 2, como é mostrado na Figura 1.

Figura 1 - Estudante multiplicou as bases por dois



Na categoria *Erro no sinal,* 9,5 % dos estudantes responderam, na questão (1c) e (1d), –4 e –9, respectivamente, mostrando que entendem o conceito de potência, mas encontram dificuldade na interpretação dos sinais. Esses estudantes não utilizam corretamente a regra de sinais durante uma operação de potência quadrada, onde a multiplicação de dois inteiros negativos resulta em positivo como mostra a resposta de um estudante na Figura 2. Moretti (2012) explica que no passado a regra de sinais da multiplicação dos reais que determina "– × – = +" causou perplexidade entre os que tentavam entendê-la, mas, "hoje, do ponto de vista estritamente matemático, este resultado não causa nenhuma dificuldade ou estranheza. No entanto, resta ainda a questão didático-pedagógica do seu uso e explicação." (MORETTI, 2012, p. 693) [3].

Figura 2 - Estudante respondeu (1c) e (1d) sem utilizar a regra de sinais da multiplicação



[3] O autor aponta estudos na perspectiva de ensino desta regra baseada na ideia de congruência semântica e no princípio de extensão em Matemática.

Na categoria *Incorreto*, observa-se o aumento percentual de 6,1% entre as questões (1c) e (1d), no número de estudantes que efetuaram de modo incorreto o cálculo com base negativa. Na questão (1d), alguns dos 7,8% dos estudantes que erraram, fizeram $(-3)^2 = (-3) \times 2$, similar a resposta do estudante da Figura 1.

Assim, no cálculo de potência com base negativa na questão (1d), ao somar as categorias *Erro no Sinal* e *Incorreto*, observa-se que 17,3% dos estudantes não calcularam corretamente a questão, revelando que encontram dificuldades em cálculo de potência quadrada de base negativa e expoente positivo.

É apresentada na Tabela 2 a resposta dos entrevistados quanto ao sinal das potências quadradas da questão um.

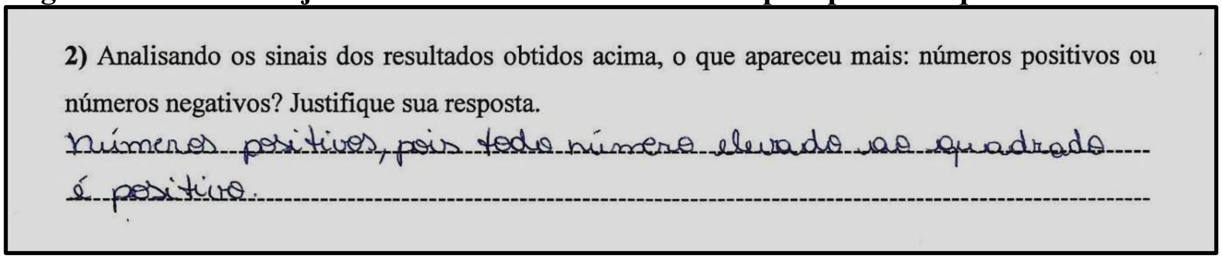
Tabela 2 – Sinal das potências quadradas nas respostas dos estudantes

Questão 2: Analisando os sinais dos resultados obtidos acima, o que apareceu mais: números positivos ou números negativos? Justifique sua resposta.	
Positivos: de acordo com as regras dos números reais	76 65,5%
Positivos: Sem justificativa ou justificaram-se por contagem	27 23,3%
Erraram	11 9,5%
Branco	2 1,7%
TOTAL	116 100%

A maioria dos estudantes respondeu 'positivos', e por essa razão, duas categorias foram formadas. Na categoria *Positivos: de acordo com as regras dos números reais*, 65,5% justificaram suas respostas com argumentos que envolvem operações de potências e a regra de sinais, provenientes dos números reais, constatando respostas como a seguinte: "todo número ao quadrado é positivo", como pode ser verificada na Figura 3. Outra resposta foi: "menos com menos dá mais". Essas justificativas são provenientes da regra usual dos sinais (tabela de multiplicação dos sinais), ou seja, esses estudantes aprenderam que $+ \times + = +$ e $- \times - = +$.

Assim, o uso dessa regra nas potências quadradas, facilitou a compreensão de que todo número real elevado à potência quadrada é positivo.

Figura 3 - Estudante justificou os resultados dos sinais pela potência quadrada dos reais



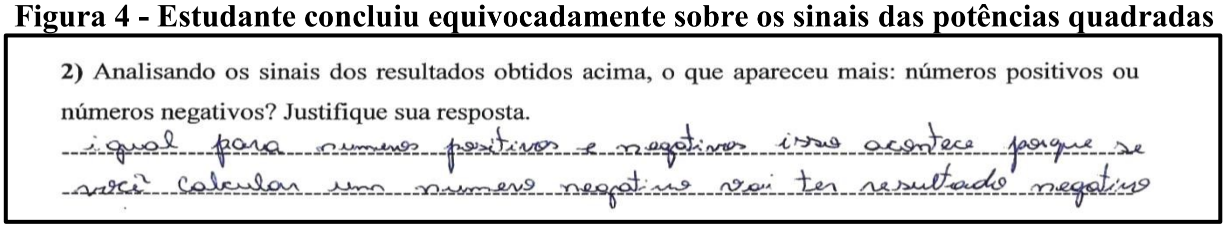
2) Analisando os sinais dos resultados obtidos acima, o que apareceu mais: números positivos ou números negativos? Justifique sua resposta.

números positivos, pois todo número elevado ao quadrado é positivo.

Na categoria *Positivos: Sem justificativa ou justificam-se por contagem,* estão 23,3% dos estudantes, que mesmo respondendo positivos, não souberam justificar suas respostas ou disseram que havia mais positivos do que negativos sem justificativa operatória matemática. Alguns desses estudantes erraram uma operação na questão um.

Na categoria *Erraram* estão 9,5% dos estudantes que mostraram incompreensão ao resolverem de modo incorreto as potências da questão um, pois escreveram que havia mais negativos do que positivos, ou que havia a mesma quantidade de sinais, como mostra a Figura 4. Pela descrição do estudante da Figura 4, conclui-se que ele trocou o sinal da questão (1c) e (1d), compondo os 9,5% da categoria *Erro no sinal* da Tabela 1. Ele mostrou que acredita que o quadrado de um número real negativo tem como resultado um número negativo.

Figura 4 - Estudante concluiu equivocadamente sobre os sinais das potências quadradas



2) Analisando os sinais dos resultados obtidos acima, o que apareceu mais: números positivos ou números negativos? Justifique sua resposta.

igual para numeros positivos e negativos isso acontece porque se você calcular um numero negativo vai ter resultado negativo

Nas questões (3a) e (3b), haviam duas raízes quadradas de números positivos, cujo índice de acertos e erros está na Tabela 3. Observa-se que o índice de acerto dessas duas questões chega a quase 100%, ou seja, os estudantes têm compreensão da operação raiz quadrada.

O cálculo da $\sqrt{36}$ e da $\sqrt{16}$ foi solicitado para que os estudantes inicialmente calculassem raízes de números positivos, porque conhecem o tema, e por fim, respondessem com seus conhecimentos de radiciação a questão (3c). Nesse sentido, a questão (3c) abriu um número maior de categorias que é apresentado na Tabela 4.

Tabela 3 - Cálculo de raízes quadradas de números positivos

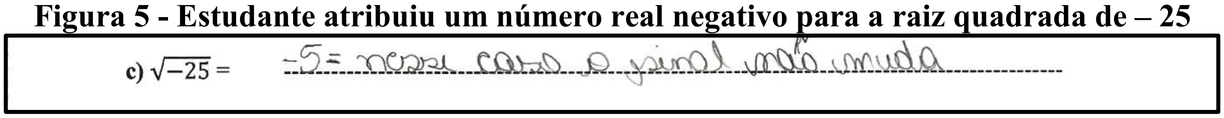
Questão 3: Calcule as raízes quadradas abaixo e justifique o resultado obtido:		
Categorias:	a) $\sqrt{36}$	b) $\sqrt{16}$
Correto	112 96,6%	115 99,1%
Incorreto	4 3,4%	1 0,9%
TOTAL	116 100%	116 100%

Tabela 4 - Cálculo da raiz quadrada de – 25

Questão 3c: $\sqrt{-25}$:	
±5: sem justificativa	18 15,5%
±5: com justificativa	16 13,8%
0: sem justificativa	3 2,6%
0: com justificativa	5 4,3%
Não existe, sem mencionar os reais	59 50,9%
Não existe nos reais	3 2,6%
Branco	12 10,3%
TOTAL	116 100%

Somando as duas primeiras categorias, obtêm-se 29,3% dos estudantes que responderam para a $\sqrt{-25}$ o valor real é 5 ou -5. Desses, 15,5% formam a categoria *±5: sem justificativa* pois não souberam justificar o valor e 13,8% formam a categoria *±5: com justificativa* pois apresentaram justificativas incoerentes para o conceito de raiz quadrada como, por exemplo, 5.(-5) = -25, -5.-5 = -25 ou apenas -5 e descreveram uma justificativa, como mostra a Figura 5.

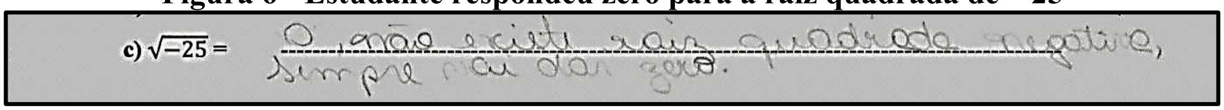
Figura 5 - Estudante atribuiu um número real negativo para a raiz quadrada de – 25


c) $\sqrt{-25}$ = -5 = nesse caso o sinal não muda

Zero, foi a resposta apresentada por 6,9% dos estudantes, onde 2,6% da categoria *0: sem justificativa* não souberam justificar e 4,3% da categoria *0: com justificativa,* expressaram justificativas, como “será zero, pois não existe raiz quadrada de número negativo”, como mostra a Figura 6. Esses estudantes acreditam que, quando não há solução, o resultado deve ser zero, mas não observam que zero é um número real, e que pelo conceito de raiz quadrada $0^2 = 0$, portanto, ele é a resposta da própria $\sqrt{0}$.

A rejeição dos números negativos encontra-se nas concepções dos estudantes e também predominou até o século XIX, quando “[...] os matemáticos entendiam número como coisa, como grandeza, como objeto dotado de substância [...] uma vez que número é quantidade e o zero é a ausência de quantidade.” (PONTES apud MORETTI, 2012, p.709).

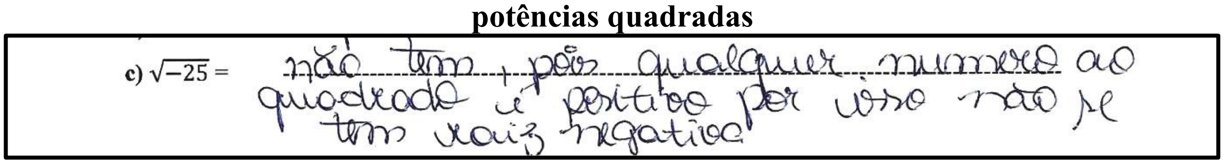
Figura 6 - Estudante respondeu zero para a raiz quadrada de – 25



Somando as porcentagens das quatro categorias iniciais da Tabela 4, observa-se que mais de um terço desses estudantes respondeu números reais para a $\sqrt{-25}$.

Mais da metade dos estudantes entrevistados respondeu que ‘não existe a raiz quadrada de um número negativo’, porém na coluna *Não existe, sem mencionar os reais*, 50,9% dos estudantes que negaram a existência, não mencionaram que a impossibilidade está no conjunto dos reais. Alguns estudantes dessa categoria dominam o conceito e explicaram que não existe um número (subentende-se que se referem ao números reais) que elevado ao quadrado resulte em negativo, como mostrado na Figura 7.

Figura 7 - Estudante negou a existência da raiz quadrada de – 25 com justificativa das potências quadradas



Apenas 2,6% dos estudantes, na categoria *Não existe nos reais*, mencionaram a inexistência nos reais da $\sqrt{-25}$. Ainda, nessa questão, na categoria *Branco,* 10,3% dos estudantes não souberam responder e justificar o valor da $\sqrt{-25}$.

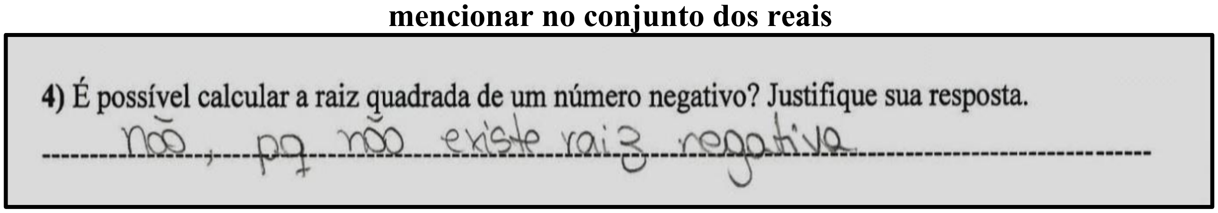
Para investigar as respostas sobre a $\sqrt{-25}$ foi elaborada a pergunta na questão quatro, sobre a existência da raiz quadrada de um número negativo, com a finalidade de comparar as duas questões (3c) e (4), cujos resultados são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 - Respostas dos estudantes sobre a raiz quadrada de um número negativo

Questão 4: É possível calcular a raiz quadrada de um número negativo? Justifique sua resposta.	
Não existe, sem mencionar os reais	57 49,1%
Não existe nos reais	3 2,6%
Não, sem justificativa	18 15,5%
Sim, com justificativa nos reais	22 19%
Sim, sem justificativa	4 3,4%
Dúvidas	6 5,2%
Branco	6 5,2%
TOTAL	116 100%

Ao somar as três primeiras categorias da Tabela 5, obtêm-se 67,2% de estudantes que responderam ‘não’ à existência da raiz quadrada de números negativos, elevando a porcentagem em relação à questão anterior. Nessa soma está contida a categoria *Não existe, sem mencionar os reais*, com 49,1% dos estudantes que negaram a existência, sem mencionar a impossibilidade no conjunto dos reais, como mostra a resposta de um estudante na Figura 8. Apenas dois estudantes a menos que na questão anterior.

Figura 8 - Estudante negou a existência da raiz quadrada de um número negativo sem mencionar no conjunto dos reais

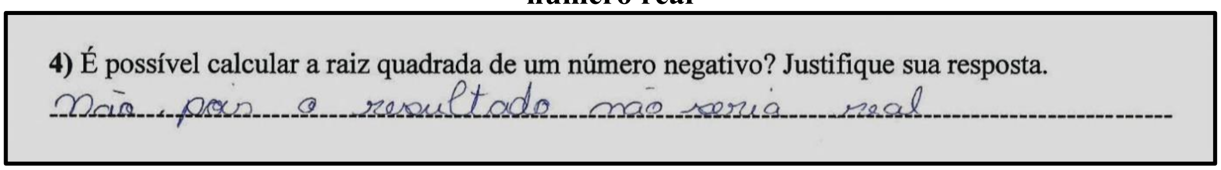

4) É possível calcular a raiz quadrada de um número negativo? Justifique sua resposta.

não, pq não existe raiz negativa

Vários desses estudantes, apesar de não registrarem a impossibilidade dos números reais, deram justificativas matemáticas coerentes dos números reais como: “Não porque 5 x 5 positivo é igual a 25 positivo, e –5 × (–5) negativo é igual a 25 positivo”; “Não, pois a raiz quadrada é positiva”; “Não tem como multiplicar números iguais com sinais diferentes”; “Não porque dá um erro na calculadora.”

Na categoria *Não existe nos reais*, continuaram os mesmos 2,6% dos estudantes que mencionaram a inexistência desse número no conjunto dos números reais como mostra a Figura 9. Já na categoria *Não, sem justificativa,* estão 15,5% dos estudantes que negaram a existência e não souberam justificar suas respostas.

Figura 9 - Estudante escreveu que a raiz quadrada de um número negativo não é um número real



4) É possível calcular a raiz quadrada de um número negativo? Justifique sua resposta.

Não, pois o resultado não seria real

Dos estudantes que responderam ‘sim’ à existência de raízes quadradas de números negativos, há duas categorias, que totalizam 22,4%. Esses estudantes mostraram incompreensões de definições matemáticas dos números reais e dificuldades em justificarem suas respostas. Na categoria *Sim, com justificativa nos reais*, há 19% de estudantes que mostraram incompreensões nos conceitos de potências quadradas e da regra de sinais. Esses estudantes apresentam dificuldade no entendimento do conceito de raiz quadrada, pois afirmaram, como visto nas questões anteriores, que o resultado se trata de um número real. Como exemplo, as Figuras 10 e 11 mostram as respostas de dois estudantes.

Na categoria *Sim, sem justificativa* estão 3,4% dos estudantes que deixaram em branco, ou responderam apenas sim, ou responderam que não sabem o porquê da possibilidade.

Vários são os erros dos estudantes nas regras de sinais da multiplicação, sem uma única justificativa para os mesmos, mas uma possível justificativa possa estar na explicação de Moretti (2012, p. 704), que descreveu sobre o uso do modelo comercial no ensino, do tipo ganho/perda (ou crédito/débito, enche/esvazia etc.), comum no Brasil: tal modelo “[...] pode auxiliar o aluno a resolver problemas no campo aditivo, tais como aqueles que aparecem nos manuais escolares, mas pode se tornar um obstáculo à resolução de problemas no campo multiplicativo.” Ainda, nas escolas, muitos estudantes se confundem nesse modelo, pois “[...] o aluno pode se convencer facilmente, na situação, – 3 + 4 = + 1, associando – 3 a uma dívida e +4 a um ganho, mas dificilmente será convencido do mesmo em – 4 × – 2 = + 8.” (MORETTI, 2012, p. 703).

Figura 10 - Estudante afirmou que a solução para a raiz quadrada de um número negativo é um número real negativo

4) É possível calcular a raiz quadrada de um número negativo? Justifique sua resposta.

Sim, pois a reiz positiva tem resultado então a negativa só muda o sinal.

Figura 11- Estudante errou a regra de sinais

c) $\sqrt{-25}$ = -5 porque -5 x -5 = -25

4) É possível calcular a raiz quadrada de um número negativo? Justifique sua resposta.

Sim, pois é um número como qualquer um outro.

Na categoria *Dúvidas*, estão 6,9% dos estudantes que não fizeram nenhum tipo de afirmação, ou negação quanto à raiz quadrada de um número negativo. Algumas respostas dessa categoria foram: “não sei”, “tenho dúvidas”, ou mostraram-se confusos em suas respostas. E, com a mesma frequência, estão 6,9% dos estudantes na coluna *Branco* que não responderam e deixaram em branco a questão.

Comparando os resultados das questões (3c) e (4), observamos um pequeno desajuste nas frequências das mesmas categorias. De certa forma, esta pequena parcela das diferentes categorias da questão (3c) parecem se dinamizar para outras categorias na questão (4). A justificativa pode estar no fato da questão (3c) ser uma operação a resolver, e a questão (4), ser descritiva. Logicamente as duas pedem as suas respectivas justificativas que deveriam ser praticamente as mesmas, porém, para os estudantes, a mudança da forma operatória para a forma descritiva, pode provocar divergências no pensamento. Como exemplo, um estudante que respondeu “zero” na questão (3c), ou seja, atribui um valor real para a $\sqrt{-25}$, pode acreditar que não existe raiz quadrada de número negativo, negando assim, a questão (4). Outra observação está na questão (4), onde houve uma nova categoria, *Dúvidas*, podendo estar incluídos os mesmos que afirmaram a existência ou não da $\sqrt{-25}\cdot$, na questão (3c).

A Tabela 6 apresenta as respostas dos entrevistados para equações quadráticas com soluções complexas, categorizados após responderem a questão cinco.

Tabela 6 - Respostas dos estudantes nas equações quadráticas com resultados complexos

Questão 5: Resolva as equações abaixo e escreva uma explicação sobre a resposta.		
Categorias	a) $x^2 + 9 = 0$	b) $x^2 - 4x + 5 = 0$
Prosseguiu com $\sqrt{-R}$	16 13,8%	19 16,4%
$\sqrt{-R}$, não existe	14 12%	14 12%
$\sqrt{-R}$, parou	5 4,3%	6 5,2%
Erraram	43 37,1%	34 29,3%
Incompleto	8 6,9%	8 6,9%
Branco	30 25,9%	35 30,2%
TOTAL	116 100%	116 100%

Nesta questão, havia duas equações do 2º grau, uma incompleta e outra completa, nas quais seus resultados são números complexos. Os estudantes foram orientados a resolverem através do método que conhecessem e considerassem melhor, inclusive pela fórmula conhecida no Brasil como de Bháskara. Na questão (5a), muitos estudantes preferiram utilizar Bháskara ao invés de resolvê-la pelo método de isolar a incógnita. Nos dois métodos há a ocorrência do radicando negativo, ou seja, $x = \pm\sqrt{-9}$ ou $x = \frac{\pm\sqrt{-36}}{2}$.

Na primeira categoria, *Prosseguiu com* $\sqrt{-R}$, estão os estudantes que resolveram as equações até obterem resultados com números reais. O detalhe é que esses estudantes não observaram o sinal negativo dentro da raiz quadrada, ou prosseguiram com passagens que tornaram o radicando positivo. Para a questão (5a) estão 13,8% dos estudantes que chegaram ao radicando negativo, seja pela forma de resolução de equações incompletas, no caso $x = \pm\sqrt{-9}$, ou seja, utilizando Bháskara com $\Delta = -36$. Na questão (5b), 16,4% dos estudantes utilizaram Bháskara e obtiveram em $\Delta = -4$. Como já foi mencionado, todos os estudantes dessa categoria prosseguiram com o cálculo, atribuindo valores reais às raízes com radicandos negativos, inclusive atribuindo o valor zero, como mostra a Figura 12. Para a questão (5a) foi comum responderem 6 para a $\sqrt{-36}$ ou 3 para a $\sqrt{-9}$ e na questão (5b) responderam 2 para $\sqrt{-4}$, como mostra a Figura 13.

Figura 12 - Estudante respondeu zero para a raiz quadrada de – 36

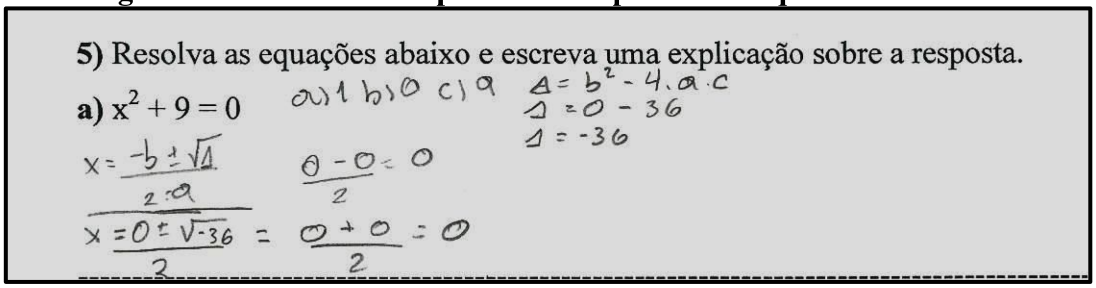
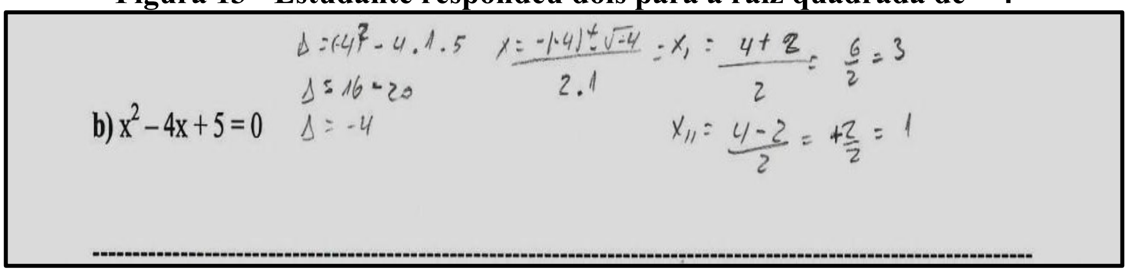
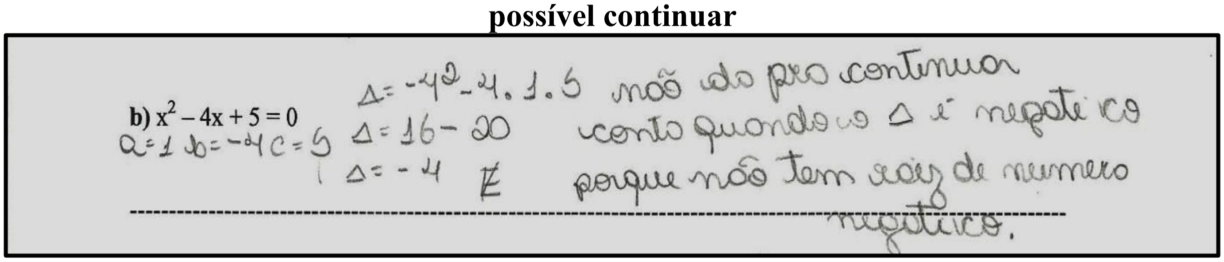


Figura 13 - Estudante respondeu dois para a raiz quadrada de – 4



Na categoria $\sqrt{-R}$, *não existe,* estão classificados 12% dos estudantes na questão (5a) e 12% dos estudantes na questão (5b), que procederam corretamente nos cálculos, chegando ao valor correto do radicando negativo, porém não prosseguiram os cálculos, justificando que "não é possível calcular" ou que "não existe raiz quadrada negativa" como mostra a Figura 14. Os estudantes dessa categoria utilizaram Bháskara para resolverem as questões (5a) e (5b). Apenas um deles resolveu a equação (5a) pelo método de isolar a incógnita, ou seja, x = ±$\sqrt{-9}$.

Figura 14 - Estudante calculou corretamente o valor do discriminante e escreveu que não é possível continuar



Na categoria $\sqrt{-R}$, *parou*, estão classificados os estudantes que procederam corretamente com os cálculos, mas, ao se depararem com a raiz quadrada do número negativo, pararam de resolver e não souberam justificar o valor como mostram as Figuras 15 e 16. Nessa categoria estão 4,3% dos estudantes na questão (5a) e 5,2% na questão (5b). Apenas dois estudantes na questão (5a) resolveram pela forma x = $\pm\sqrt{-9}$, os demais resolveram por Bháskara.

Figura 15 - Estudante isolou a incógnita e não soube justificar a resposta

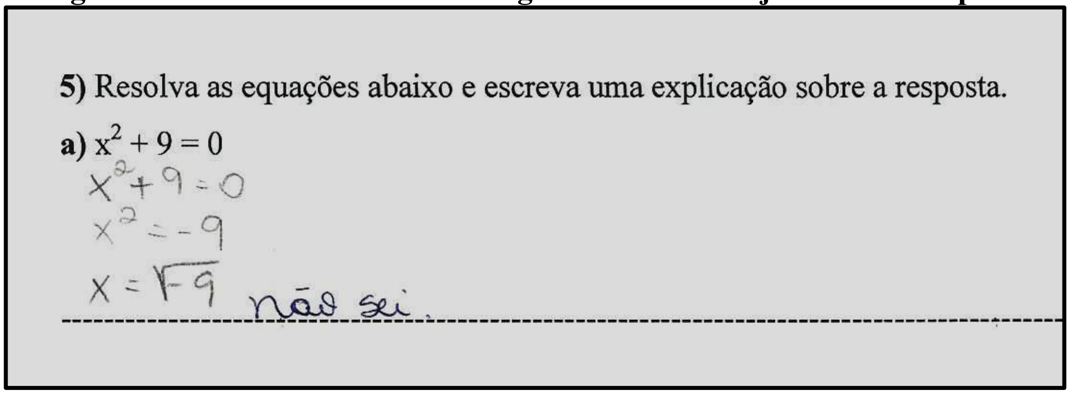
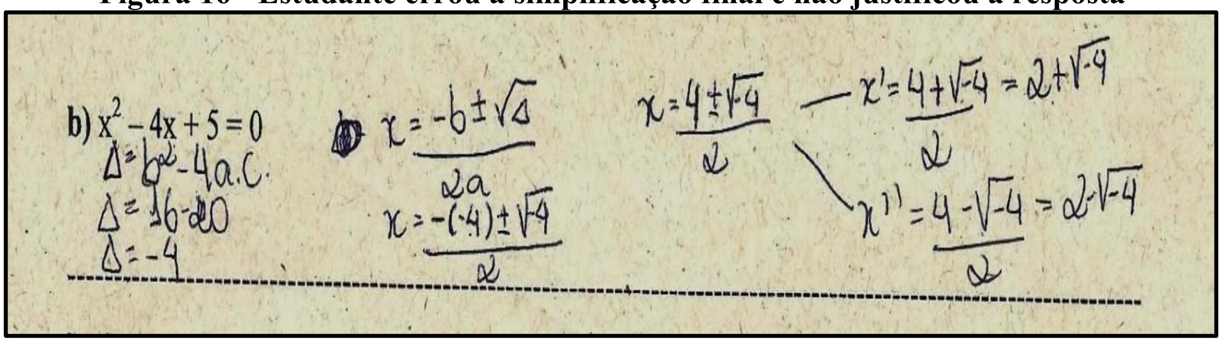


Figura 16 - Estudante errou a simplificação final e não justificou a resposta



Um grande percentual de estudantes que erraram os procedimentos de resolução, sem considerar a raiz quadrada de número negativo, encontra-se na coluna *Erraram*, com 37,1% que resolveram de forma incorreta a questão (5a) e 29,3% que procederam incorretamente na (5b).

Na coluna *Incompleto*, em cada questão, encontram-se 6,9% dos estudantes que iniciaram as respostas e as abandonaram, deixando-as incompletas. E, tendo um alto índice de frequência na coluna *Branco*, estão 25,9% dos estudantes que deixaram em branco a questão (5a) e 30,2% que não responderam a questão (5b). Ainda na categoria *Branco* encontram-se registrados os estudantes que escreveram “eu não lembro como se resolve”.

2.2 CONSIDERAÇÕES SOBRE A AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

Através da pesquisa, poderia se constatar que os estudantes do 3º ano pudessem já ter estudado números complexos, porém, nenhum deles mencionou os termos *complexo* ou *imaginário* para as raízes quadradas de números negativos, havendo a possibilidade de nenhum ter estudado esse tema.

Diante da diversidade de respostas seguem duas considerações:

1) Além das dificuldades nos conceitos de potência quadrada e uso da regra de sinais da multiplicação dos números reais, é perceptível que grande parte dos estudantes, ao buscarem respostas no conjunto dos números reais, afirmam não existir. Fato esperado e compreensível, pois passam boa parte da vida escolar trabalhando com os números reais. Esse obstáculo pode se fortalecer no ensino básico, quando concluído através da regra de sinais dos números reais ($- \times - = +$ *e* $+ \times + = +$) que não existe um número que elevado ao quadrado seja negativo.

2) Constatou-se através da pesquisa, o quanto é relevante diagnosticar os conhecimentos prévios dos estudantes, a fim de elaborar uma abordagem inicial sobre os números complexos.

A partir das respostas da Tabela 1, pode-se concluir que há necessidade de ser efetuada uma revisão de conteúdos elementares do ensino fundamental, envolvendo potências e raízes quadradas, antes do estudo de números complexos. Assim, na apresentação inicial do produto educacional desta dissertação, estão sugeridas algumas atividades introdutórias ao tema números complexos, chamadas de desafio 1 e desafio 2.

A presente avaliação diagnóstica compõe a Parte 1 do produto educacional. Caso prefira, o professor também poderá utilizá-la como instrumento comparativo da aprendizagem sobre números complexos (pré-teste e pós-teste), da forma como descreve o Capítulo 4 desta dissertação. Na questão 1c, foi trocada a potência $(-2)^2$ pela potência $(-6)^2$, a fim de identificar se realmente os estudantes entendem o conceito de potência ou se estão multiplicando pelo fator dois, visto que em módulo 2^2 tem o mesmo resultado que o dobro de dois.

3 UMA VISÃO HISTÓRICA DA CRIAÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS APLICAÇÕES

Neste capítulo é apontada a importância de abordar aspectos da história da matemática na sala de aula. Também são apresentadas a história dos números complexos e algumas aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento.

3.1 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO RECURSO PARA O ENSINO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Assim como vários objetos de estudo, o conjunto dos números complexos tem seu valor histórico carregado de fatos marcados pelo empenho de matemáticos na construção desse saber, sendo rico em significados e processos de estudos pelos quais passou. Consta nas Orientações Curriculares para o ensino médio (2008), que o uso da história da matemática oportuniza a contextualização de conhecimentos matemáticos historicamente criados:

> [...] o recurso à História da Matemática pode esclarecer idéias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns "porquês" e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento. Assim, a própria história dos conceitos pode sugerir caminhos de abordagem deles, bem como os objetivos que se pretendem alcançar com eles. Por exemplo, isso fica evidente quando se percebe que a ampliação dos campos numéricos historicamente está associada à resolução de situações-problema que envolvem medidas. (BRASIL, 1998, p. 43)

Nesse sentido, o ensino de números complexos isolado da sua própria história, pode tornar a aprendizagem desprovida de sentidos e significados para o estudante. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do ensino médio (BRASIL, 1999) destacam como competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática, na contextualização sociocultural, a aplicação do conhecimento matemático relacionado com fases históricas da Matemática: "Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento. Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade." (BRASIL, 1999, p. 93). Destaca-se como importante, na utilização da história da matemática, o registro dos erros e das primeiras impressões sobre um determinado objeto de estudo. A história dos números complexos apresenta alguns equívocos cometidos por matemáticos que estudaram os números hoje denominados complexos. Gottardi (2012) explica que é dessa maneira, rica em erros e acertos, que a matemática tem se desenvolvida, e é percebida como um produto cultural. A partir do século XV, há registros de pensamentos e experiências de matemáticos que recusaram os números complexos como números, negando a sua existência. Destaca-se o caso de Euler, que no século XVIII equivocou-se ao acreditar que a propriedade dos números reais $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ era válida para os números complexos (CARVALHO, 1992). Muito antes de Euler, Heron de Alexandria (75 d.C.) procedeu da mesma maneira que muitos estudantes do ensino básico costumam proceder: trocando a ordem de $\sqrt{81 - 144}$ para $\sqrt{144 - 81}$, para obter uma solução para o problema (NAHIN, 2007).

A construção conceitual dos números complexos aconteceu durante séculos, e por isso, faz-se necessário entender que não pode ser exigido dos estudantes o completo entendimento com poucas horas de estudo. “A História da Matemática pode contribuir também para que o próprio professor compreenda algumas dificuldades dos alunos, que, de certa maneira, podem refletir históricas dificuldades presentes também na construção do conhecimento matemático.” (BRASIL, 2008, p. 84). Nesse sentido, o conhecimento dos erros, o tempo necessário e as dificuldades encontradas por gênios da matemática, podem colaborar no aumento da autoestima dos estudantes.

Para D’Ambrosio (1997, p. 30), “conhecer, historicamente, pontos altos da matemática de ontem poderá, na melhor das hipóteses, e de fato faz isso, orientar no aprendizado e no desenvolvimento da matemática de hoje.”. É importante que professores abordem tópicos de história da matemática durante suas aulas, e oportunizem aos estudantes à busca de informações para o diálogo e conclusões do aprendizado em relação ao objeto de estudo. “A importância da história das Ciências e da Matemática, contudo, tem uma relevância para o aprendizado que transcende a relação social, pois ilustra também o desenvolvimento e a evolução dos conceitos a serem aprendidos.” (BRASIL, 1999, p. 108).

Com os esforços de vários pesquisadores, os números complexos foram acolhidos pela comunidade matemática. Entre os pesquisadores destacam-se, Wallis, Wessel e Argand, que contribuíram para a criação da representação geométrica dos números complexos, sendo que, há mais de 200 anos, Gauss oficializou a ideia de representá-los geometricamente. Mesmo hoje, conhecendo sua valorização geométrica, ainda é escassa a utilização no ensino básico, permanecendo o estudo dos números complexos, na maior parte das vezes, apenas no campo algébrico, pela praticidade nos procedimentos operatórios. Porém, esse fato pode levar os estudantes a encontrar dificuldade em associar o tema com outras áreas do conhecimento.

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. (BRASIL, 1999, p. 88)

Embora pouco exploradas no ensino básico, as aplicações dos números complexos, além do uso em equações polinomiais, são diversas, e tiveram início marcante no século XIX e no início do século XX, em estudos de eletricidade, magnetismo e teoria quântica. Atualmente, devido à amplitude de conhecimentos necessários, essas aplicações são vistas apenas em cursos técnicos ou superiores.

A seguir, apresenta-se a investigação realizada sobre o desenvolvimento epistemológico dos números complexos, sendo descritas algumas aplicações em matemática e física. Considerando a descrição de Cartier (2010, p. 64):

> O conceito de epistemologia é empregado de modo bastante flexível, porque trata da origem do conhecimento, logo um vasto campo de estudo e possível nas mais diversas áreas, particularmente no que concerne ao processo ensino aprendizagem, e nas formas de espacialização destes conhecimentos – produção cientifica – evidencia o caráter da diversidade, por se tratar diferentes localidades e regiões, culturas distintas, frente à complexidade do ser humano e suas necessidades vitais.

Analisando a história da criação dos números complexos, constata-se que eles "[...] surgem como ferramentas para justificar algoritmos de cálculos, depois então são objetos de estudo." (ROSA, 1998, p.30). É o caso de típicos problemas que utilizam a fórmula de Tartaglia-Cardano no século XVI, onde, em um dos casos, são realizadas operações na forma trigonométrica dos números complexos, para apresentação de uma resposta real.

Para Carvalho (1992), ainda nos séculos XVI e XVII não se tinha esclarecido a dignidade numérica dos números negativos e irracionais, pois muitos matemáticos questionavam o aparecimento dos mesmos. Naquela época, "parecia óbvio que um número negativo não fosse um quadrado, concluindo-se daí que tais raízes quadradas não tinham nenhum significado." (HELLMICH, 1992, p. 61).

Para que os estudantes entendam que os conceitos matemáticos foram construídos ao longo da história, deve-se estar atento à possibilidade deles imaginarem que a matemática é algo pronto ou descoberto por alguém (GOTTARDI, 2012).

Uma justificativa para a criação conceitual do conjunto dos números complexos pode ser entendida, conforme Moretti (2012), com o uso da regra dos sinais usuais da multiplicação em que "– × – = +", já conhecida no tratado de Diofanto de Alexandria (aproximadamente 250 a 300 anos d.C.), porém demonstrada apenas em 1867 no teorema de Hankel. Nesse sentido, mantendo-se a regra "– × – = +", a raiz quadrada de um número negativo não tem como solução um número real. Moretti (2012, p. 695) destaca que "caso fosse possível admitir a raiz quadrada de um número negativo (no campo dos reais), seria necessário desconstruir muito do que já havia sido elaborado em Matemática até aquele momento.", ou seja, até o final do século XIV e início do século XV, com os sucessos nos descobrimentos das raízes de equações polinomiais. O chamado *princípio de extensão*[4], utilizado na regra usual dos sinais, foi estendido para os números negativos. Da mesma forma, foi estendida a ideia da raiz de índice par de números negativos, que levou à criação dos números complexos, "assim, no universo do conjunto dos números complexos é possível extrair a raiz de qualquer índice de um número positivo, negativo ou mesmo complexo." (MORETTI, 2012, p. 696).

As mentes insatisfeitas, e por vezes confusas, persistiram na investigação desse conjunto, hoje denominado Complexo, embora nem todos o aceitassem ou o compreendessem. "Na vida real, não ocorreu a nenhum matemático inventar um número com quadrado negativo, simplesmente para que certas equações passassem a ter raízes ou para *completar algebricamente o corpo dos reais*." (CARNEIRO, 2004a, p.16, grifos do autor). Porém, a partir da metade do século XVIII e com ênfase nas produções acadêmicas dos matemáticos do século XIX, o "[...] *cálculo complexo* acabou sendo extremamente poderoso, em parte porque se mostrou *mais fácil* do que o cálculo que usa apenas números reais." (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2008, p. 186, grifos do autor).

---

[4] O princípio de extensão é denominado por Caraça (1998, p. 9) da seguinte forma: "[...] o homem tem tendência a generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências."

A seguir, são apresentados aspectos da história dos números complexos separando-a em três momentos marcantes: o século XVI, marcado pelo Renascimento na Itália, e os períodos que precedem e antecedem esse marco.

3.2 AS DESCOBERTAS DOS MATEMÁTICOS ITALIANOS NO PERÍODO DO RENASCIMENTO: SÉCULO XVI

A história da matemática apresenta o início das instigações dos números complexos com os esforços dos matemáticos italianos Niccolò Fontana (1500-1557), mais conhecido pelo apelido de "Tartaglia", Girolamo Cardano (1501-1576) e Rafael Bombelli (1526-1572). Apesar das contribuições dos matemáticos que viveram nesse período, nem sempre os textos registram uma forma tranquila de se trabalhar com as raízes quadradas de números negativos, pois muitas vezes, matemáticos rejeitaram o aparecimento das mesmas na diversidade de problemas que as envolviam.

As divergências entre Tartaglia e Cardano nos conhecimentos sobre resoluções de equações cúbicas, do tipo $y^3 + ay + b = 0$, levaram consequentemente à revelação da fórmula:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

Essa fórmula pode ser utilizada em equações completas do 3º grau. Para isso, é necessário substituir $x = \frac{y - a_1}{3a_0}$ na equação completa do 3º grau, $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$, no intuito de transformá-la numa equação do 3º grau incompleta, onde o coeficiente a_1 de x^2 se torna nulo, obtendo assim a equação $y^3 + ay + b = 0$, onde se aplica efetivamente a fórmula. (CARAÇA, 1998). Tal fórmula impulsionou o envolvimento dos números complexos no caso em que $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}$ é um número real negativo.

A seguir, apresenta-se o desenvolvimento da equação para se obter a referida fórmula:

Seja a equação $y^3 + ay + b = 0$.

Para a raiz desta equação, escolhe-se y como sendo a soma de duas parcelas u e v:

$y = u + v$

Substituindo na equação se obtém:

$(u + v)^3 + a(u + v) + b = 0$

$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + a(u + v) + b = 0$

$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + a(u + v) + b = 0$

$u^3 + v^3 + (3uv + a)(u + v) + b = 0$

A equação será satisfeita se:

$3uv + a = 0$ e $u^3 + v^3 = -b$

$$\begin{cases} 3uv + a = 0 \\ u^3 + v^3 = -b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} uv = -\frac{a}{3} \\ u^3 + v^3 = -b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3v^3 = -\frac{a^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -b \end{cases}$$

Nesta representação, obteve-se o produto e a soma de dois valores desconhecidos. Esses valores representam as raízes de uma equação do 2º grau $t^2 + bt - \frac{a^3}{27} = 0$

A solução é determinada por:

$$t = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}$$

Se $u^3 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}$ então $v^3 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}$

Os valores de u e v são representados por:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} \text{ e } v = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

Se y é a raiz da equação, então y = u + v:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

Como exemplo, ao aplicar a fórmula para a equação $y^3 - 15y - 4 = 0$, obtém-se $y = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ ou $y = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$, onde a solução será y = 4, que é uma raiz real, obtida pela extração da raiz cúbica de um número complexo e $y = -2 \pm \sqrt{3}i$, outras duas raízes complexas conjugadas.

Através de uma negociação insistente de promessas e juramentos de Cardano à Tartaglia, o detentor da fórmula, Tartaglia, revelou-a em forma de poema em versos cifrados[5]. Eles foram decifrados por Cardano, que publicou a fórmula em seu livro *Ars Magna* (*A Grande Arte*) em 1545 na Alemanha. O livro é um grande tratado em latim, considerado o mais importante trabalho de Cardano, dedicado exclusivamente à álgebra, onde há registros da

[5] Os versos podem ser encontrados no artigo de Milies (1994, p.17-18).

necessidade de se trabalhar com raízes negativas em equações e com os números imaginários (EVES, 1995).

Cardano inclui no livro que Scipione del Ferro (1465-1526) conhecia a fórmula alguns anos antes e morreu sem publicá-la, revelando-a a seu discípulo, Antônio Maria Fior. Segundo D'Ambrosio (1997), Cardano havia prometido à Tartaglia que gostaria de conhecer a fórmula para participar de concursos públicos e que não iria publicá-la. Fior já havia desafiado Tartaglia com problemas que envolviam equações cúbicas. Foi o motivo que levou o notório Tartaglia a deduzir a fórmula em 1541. E Tartaglia foi mais além, descobrindo a fórmula para equações do tipo $y^3 + ay^2 + b = 0$. (CAJORI, 2007). Porém, os diversos contos da revelação e descobrimento das fórmulas das equações cúbicas causam dúvidas quanto ao real acontecimento dos fatos. Eves (2005, p. 303) destaca que: "como atores dessa novela, segundo parece, nem sempre colocaram a verdade em primeiro plano, encontram-se muitas variações quanto aos detalhes da trama."

A fórmula muitas vezes resolve equações em que o radicando é negativo, sendo necessário o cálculo por meio de números complexos. Isso ocorre sempre que as três raízes são reais e diferentes de zero: o impulso principal para que os matemáticos da época começassem a aceitar e entender o conjunto dos números complexos. O Quadro 1 apresenta os diferentes casos para a fórmula de Tartaglia-Cardano.

Quadro 1 – Os três casos da fórmula de Tartaglia-Cardano

Três raízes reais e distintas[6]	Haverá radicando negativo, ocasionando raízes cúbicas de números complexos – chamado *caso irredutível*. Bombelli chamou a atenção, pois só aparentemente as raízes são imaginárias. O matemático francês Françóis Viète (1540-1603), sugeriu uma solução trigonométrica para esse caso (EVES, 1995, p. 308-309).
Uma raiz real e duas complexas	Haverá radicando positivo.
Três raízes reais, mas pelo menos duas delas são coincidentes	Radicando igual a zero.

Fonte: Elaborado pelo autor

Ainda no livro de Cardano, há a resolução do famoso problema de dividir 10 em duas partes, tal que o produto dessas partes seja igual a 40, representada pela equação $x.(10- x) = 40$

[6] Há um exemplo interessante deste caso no livro de Caraça (1998, p.150-151;160) na determinação da aresta de um cubo.

ou $x^2 - 10x + 40 = 0$. Ele encontra a solução $(5+\sqrt{-15})$ e $(5-\sqrt{-15})$ e considera o resultado como *raízes sofísticas* tratando-as de *tão sútil quanto inútil* (BOYER, 1996; MILIES, 1994). "Mas Cardano despreza tais coisas como jogo intelectual sem sentido. Em outro livro, diz que '$\sqrt{9}$ é + 3 ou -3, pois um mais [vezes um mais] ou um menos vezes um menos dão um mais. Portanto, $\sqrt{-9}$ não é nem +3 nem -3, mas alguma terceira espécie de coisa misteriosa'." (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2008, p. 181).

Cardano chamava os números negativos de *numeri ficti* (BOYER, 1996). No entanto, para Cajori (2007, p. 198-199), ele "[...] falha em não reconhecer as raízes imaginárias."

Rafael Bombelli, discípulo de Cardano, também trabalhou com equações do 3º grau e atribuíu a expressão *sofísticos* aos números complexos. Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2008, p. 182-183, grifo dos autores):

> O trabalho de Bombelli mostrou que algumas vezes as raízes quadradas de números negativos são necessárias para encontrar soluções *reais*. Em outras palavras, ele mostrou que a aparência de tais expressões nem sempre é um sinal de que o problema não é solúvel. Esse foi o primeiro sinal de que os números complexos poderiam na realidade ser ferramentas matemáticas úteis.

Percebendo a importância dos números complexos, Rafael Bombelli afirmou que:

> Eu achei uma espécie de raiz cúbica muito diferente das outras, que aparece no capítulo sobre o cubo igual a uma quantidade e um número. [...] A principio, a coisa toda me pareceu mais baseada em sofismas que na verdade, mas eu procurei até que achei uma prova [...] Isto pode parecer muito sofisticado mas, na realidade, eu tinha essa opinião, e não pude achar a demonstração por meio de linhas [i.e. geometricamente], assim, tratarei da multiplicação dando as regras mais e menos. (BOMBELLI apud MILIES, 1993, p. 8)

Para se referir a $+\sqrt{-1}$, ou + *i*, Bombelli chamava de *più di meno* e *meno di meno* para – $\sqrt{-1}$, ou –*i* (MILIES, 1993). Com essa denominação, ele cria as regras de operações da multiplicação da $\sqrt{-1}$ e a regra da soma para números complexos do tipo a +b$\sqrt{-1}$.

3.3 OS PRIMEIROS REGISTROS DA RAIZ QUADRADA DE UM NÚMERO NEGATIVO

Registros da $\sqrt{-1}$, considerada a unidade imaginária, e de x + yi, o número complexo na sua forma retangular, "[...] origina-se no desenvolvimento lógico da teoria algébrica." (HELMICH, 1992, p. 61). Talvez, o mais antigo registro da raiz quadrada de um número negativo, seja a expressão $\sqrt{81-144}$, que aparece na *Stereometria*, de Heron de Alexandria, publicada aproximadamente no ano de 75 d.C. Errando o procedimento de cálculo (NAHIN, 2007), a ordem é trocada $\sqrt{144-81}$, para uma possível resposta. Já no ano aproximado de 275 d.C, há o registro do trabalho de Diofanto de Alexandria, em sua *Arithmetica*, considerando o seguinte problema (MILIES, 1993, p. 6): “Um triângulo retângulo tem área igual a 7 e seu perímetro é de 12 unidades. Encontre o comprimento dos seu lados.” Nesse caso, a equação encontrada é:

$$24x^2 - 172x + 336 = 0, \text{ cujas raízes são } x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}.$$

Porém, o primeiro registro evidente que demonstra dificuldades de se trabalhar com números complexos foi manifestada na Índia, por Mahavira, há cerca de 850 d.C. (HELLMICH, 1992), que escreveu o seguinte: "O quadrado de um positivo, bem como de negativo (quantidade) é positivo; e as raízes quadradas dessas (quantidades quadradas) são em ordem positivas e negativas. Como na natureza das coisas um negativo (quantidade) não é quadrado (quantidade), *pois este não tem, portanto, raiz quadrada.”* (NAHIN, 2007, p. 6, grifos do autor, tradução nossa). Semelhante aos dizeres de Mahavira, outro conhecido matemático indiano, Bhaskara (1114-1185), escreveu que não há raiz quadrada de um negativo, pois este não é um quadrado (MILIES, 1993).

Já no século XV, o matemático francês Nícolas Chuquet (1415-1500) e o monge franciscano italiano, Luca Paccioli (1445-1517), estavam na Europa, entre os que continuavam a rejeitar as raízes quadradas de números negativos (HELMICH, 1992). Paccioli foi considerado o pai da contabilidade, pelo aspecto comercial de seu livro *Summa*, publicado em 1494. O livro elencava questões de aritmética e de álgebra, envolvendo o estudo de raízes quadradas, equações lineares e quadráticas (BOYER, 1996). Parte do livro *Triparty* de Chuquet, aborda a resolução de equações. “Ao considerar equações da forma $ax^m + bx^{m+n} = c^{xm + 2n}$ (onde os coeficientes e expoentes são números inteiros positivos específicos), ele descobriu que algumas traziam soluções imaginárias; nesses casos ele dizia simplesmente, “*Tel nombre est ineperible*” ”. (BOYER, 1996, p. 190, grifos do autor).

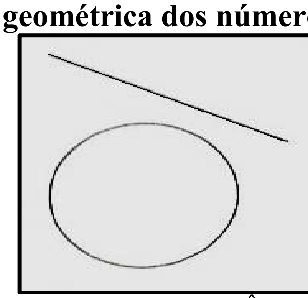
No livro *Liber Abaci* (1202) de Leonardo de Pisa (século XIII), também conhecido como *Fibonacci*, há explicações de raízes quadradas, cúbicas e também equações do 2º grau, porém, *Fibonacci* não havia tomado conhecimento de raízes negativas e imaginárias para as equações do tipo $x^2 + c = bx$ (CAJORI, 2007).

3.4 OS AVANÇOS APÓS O PERÍODO DO RENASCIMENTO NA EUROPA

Alberto Girard (1595-1632) começou a utilizar o símbolo $\sqrt{-1}$ e se ocupou com o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), provocando algumas mudanças nos estudos dos números complexos. Segundo Carvalho (1992, p. 111), Girard justifica a utilização dos números complexos por três motivos: "[...] para a validez das regras gerais, devido à sua utilidade e por não haver outras soluções." Dessa forma, mostra que Girard "[...] conservou as raízes imaginárias das equações porque elas exibem os princípios gerais na formação de uma equação a partir de suas raízes." (BOYER, 1996, p. 209).

René Descartes (1596-1650) introduziu os termos *real* e *imaginário* pela primeira vez em "*La Geométrie*", publicada em 1637, e também realizou pesquisas sobre o Teorema Fundamental da Álgebra. (HELLMICH, 1992). Descartes não considerava os imaginários como sendo números, mas aceitou a sua existência nas equações com grau n, com n raízes reais ou complexas. (CARVALHO, 1992). Descartes associou a ideia da raiz quadrada de um número negativo com ponto(s) de intersecção entre uma reta e um círculo, quando estes objetos geométricos, de fato, não se interceptam no plano cartesiano, como mostra a Figura 17, remetendo à uma equação quadrática com soluções no conjunto dos números complexos. (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2008).

Figura 17 - Representação geométrica dos números complexos para Descartes



Fonte: BERLINGHOFF; GOUVÊA (2008, p. 182)

Descartes denominou as raízes negativas das equações de *raízes falsas* e de *números surdos* para os números irracionais. Ainda no século XVII os números negativos e irracionais não tinham recebido a dignidade numérica. Caraça (1998) conta que esse fato parecia ser simplesmente absurdo, pois antes dos números negativos serem considerados números, já se conheciam todas as regras operatórias sobre os números complexos. A razão de tudo isso se deve à resignação dos matemáticos ao formalismo, provocando uma distância entre a manipulação de operações com os números e de compreensão.

"Assim, na maioria das vezes, o sentimento era de que o aparecimento de soluções 'impossíveis' ou 'imaginárias' era simplesmente um sinal de que o problema em questão não tinha soluções.", comenta Berlinghoff e Gouvêa (2008, p.182).

Jean Bernoulli (1667 – 1748) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) trabalharam com os números complexos sem se preocuparem com a legitimidade do conjunto ou sua existência (CARVALHO, 1992). Leibniz achou maravilhosa a existência dos números complexos e os comparou como sendo anfíbios, entre o ser e o não ser, "[...] assemelhando-se nisso ao Espírito Santo na teologia cristã." (BOYER, 1996, p. 280) devido ao fato de ele ser um teólogo eminente.

> A natureza, mãe de eterna diversidade, ou melhor, o Espírito Divino está por demais apegado a tão rica variedade, para permitir que tudo seja agrupado em uma única espécie. E deste modo ele encontra um expediente maravilhoso no milagre da análise, espécie de monstro do mundo das ideias, que poderíamos quase dizer híbrido de ser e não ser, e que costumamos denominar raiz imaginária. (LEIBNIZ apud KARLSON, 1961, p.596)

Similar a Leibniz, George Gamow (1962) utiliza a expressão *formas híbridas* para a combinação entre números reais e imaginários que formam a representação $a+bi$. Leibniz contribuiu nas descobertas dos complexos, quando esses estavam quase esquecidos e mostrou que um número real positivo pode ser decomposto em imaginários, surpreendendo seus conterrâneos (BOYER, 1996). Nas equações com coeficientes reais, têm-se a contribuição de Isaac Newton (1642-1727), mostrando que as raízes imaginárias aparecem em pares conjugados (CAJORI, 2007).

Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) publicou, em 1746, nas *Memórias* da Academia de Berlim, o que considerou como uma prova do Teorema Fundamental da Álgebra, porém foi considerada insatisfatória e ilusória, segundo Garbi (1997). Na França, esse teorema é conhecido frequentemente como Teorema de D'Alembert, por mérito de seus esforços. (BOYER, 1996). D'Alembert trabalhou com os números complexos no cálculo de variáveis complexas, seguindo um esquema semelhante ao cálculo de variáveis reais. Ele mantinha correspondências com Euler sobre logaritmos de números negativos, sendo que Euler concluiu que esses são números imaginários puros e não reais como D'Alembert e Jean Bernoulli acreditavam ser (BOYER, 1996).

Um matemático inglês, chamado Edward Waring (1734-1798), estudou as equações que envolviam números complexos. Em 1757, ele encontrou as relações que existem entre os coeficientes de equações do quarto e do quinto grau para obter duas ou quatro raízes imaginárias. Na publicação do *Meditationes algebraicae* em 1770, Waring apresentou um processo inédito para o cálculo aproximado de raízes imaginárias, onde x é o valor aproximado de a + bi e substituindo x por "[...] *a + a' + (b + b')i*, expande-se e rejeitam-se as altas potências de *a'* e *b'*. Igualando-se as partes reais e as partes imaginárias, obtém-se duas equações que fornecem os valores de *a'* e *b'*." (CAJORI, 2007, p. 333, grifos do autor).

O matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) compreendia e dominava muito bem o uso de números complexos. Trabalhou com as potências imaginárias, logaritmos de números negativos, logaritmos de números complexos, funções trigonométricas de argumento complexo, etc., principalmente entre os anos de 1731 e 1747 (16 anos), progredindo constantemente no domínio de relações que envolviam os imaginários (CAJORI, 2007).

Segundo D'Ambrosio (2009), Euler é considerado um dos pioneiros da iconografia. Em 1777, ele utilizou *i* para representar a $\sqrt{-1}$, que mais tarde foi utilizada por Gauss (CAJORI, 2007).

Em 1714 foi publicado na revista científica *Philophical Transactions,* de Londres, um importante resultado de Roger Cotes (1682-1716), que obteve o $\log_e(cos\emptyset + i\ sen\emptyset) = i\emptyset$. Essa fórmula pode ter levado à famosa Relação de Euler: $cos\emptyset + i\ sen\emptyset = e^{i\emptyset}$, que, por sua vez, implica na Fórmula de Abraham de Moivre (1667-1754): $(cos\emptyset + i\ sen\emptyset)^n = \cos(n\emptyset) + isen(n\emptyset)$. Embora De Moivre nunca tenha chegado a enunciar ou demonstrar a fórmula no caso geral, coube a Euler demonstrá-la (MILIES, 1993). Segundo Cajori (2007), o teorema que leva seu nome, revolucionou a trigonometria, ao fazer uso do mesmo nos estudos da hipérbole.

Antes de Euler fazer o uso de logaritmos de expoentes imaginários, a fórmula contendo números imaginários para o valor de π, foi criada pelo italiano Giulio Carlo (1682-1766), onde $\pi = 2\ .\ i\ .\ \log\frac{1-i}{1+i}$ (CAJORI, 2007). Em uma das cartas enviadas ao matemático D'Alembert, em 15 de abril de 1747, Euler escreveu que *log n* possui um número infinito de valores imaginários, com exceção para *n* positivo, cujo caso, nessa infinidade de valores, haveria um número positivo. Dos seus trabalhos acadêmicos sobre logaritmos de números negativos e imaginários, destaca-se em 1747, enviado à Academia de Berlim, o *Sur les logarithmes des nombres négatifs et* *imaginaires* e em 1749 um *paper* com o título de *Recherches sur les racines imaginaires des équations* (CAJORI, 2007).

Na relação de Euler $cos\emptyset + i\ sen\emptyset = e^{i\emptyset}$, substituindo ∅ por π obtém-se a identidade de Euler $e^{i\pi} + 1 = 0$ que é considerada uma das mais belas expressões matemáticas, pois unem em uma só fórmula os cinco mais famosos números de toda a Matemática: zero, 1, *e*, π e i (D'AMBROSIO, 2009). Outras relações importantes que envolvem o número de Euler (*e*) e a unidade imaginária *i*, e que estabelecem ligações entre funções exponenciais e trigonométricas são: $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$; $\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$. Nesse caso, θ é um valor real para o ângulo, mas pode assumir um valor complexo z (KARLSON, 1961).

Em 1749, Euler investigou o Teorema Fundamental da Álgebra atingindo outro nível (CARVALHO, 1992), porém a primeira demonstração correta do T.F.A., onde uma equação polinomial, com coeficientes reais ou complexos e de grau n > 0, tem pelo menos uma raiz complexa, deve-se a Gauss. Singh (2000) recorda que Euler também testou os números complexos no Teorema de Fermat, nos casos de n = 3 e n = 4. O Teorema de Fermat afirma que não existe nenhum conjunto de inteiros positivos *x*, *y*, *z* e *n* com *n* maior que 2, que satisfaça a equação $z^n = x^n + y^n$.

Em publicações comemorativas dos 300 anos de nascimento de Euler, D'Ambrosio (2009, p. 26) destaca que o livro de Euler, *Vollständige Anleitung zur Algebra* (Introdução Completa à Álgebra, 2 vols.), publicado em 1770 em alemão, como "[...] o livro de matemática mais impresso no mundo.", depois de *Elementos*, de Euclides. Devido aos seus problemas de visão, Euler ditou o livro para uma pessoa que o ajudava (CAJORI, 2007). O livro trata de temas polêmicos à época, como os números complexos e o infinito. Traduzido para o português com o título de *Elementos de Álgebra,* por Manuel Ferreira de Araújo Guimarães, e publicado em 1809, foi o primeiro livro didático impresso no Brasil, após a introdução da imprensa no Brasil, com a chegada da família Real portuguesa, em 1808 (SILVA apud D'AMBROSIO, 2009). A obra contém conceitos fundamentais, como números complexos e infinito. Silva (2009) investigou a utilização do livro pela Academia Militar, bem como a veracidade do real tradutor da obra. A mesma autora afirma que o livro foi utilizado até o ano de 1823 pela Academia Militar, no Rio de Janeiro, e que até aquele momento, havia fortes evidências de que o tradutor dos *Elementos de Álgebra* tenha sido Guimarães, concluindo que a efetiva publicação do livro seja de 1811, porém impressa na capa em 1809. (SILVA, 2009). Na versão alemã, publicado em 1770, Euler escreve:

> § 143. E, uma vez que todos os números que são possíveis conceber, ou são maiores ou menores do que 0, ou o próprio 0, é evidente que não se pode classificar a raiz quadrada de um número negativo entre os possíveis números, e que devem, portanto, dizer que é uma quantidade impossível. Desta forma nos leva à ideia de números, que por sua natureza são impossíveis, e, portanto, eles são geralmente chamados de *quantidades imaginárias*, porque eles existem apenas na imaginação. (EULER, 1822, p. 43, grifos do autor, tradução nossa)

Euler tratava os números complexos como "[...] uma espécie de números totalmente particular [...]" (EULER apud SILVA, 2009, p. 46) e contribuiu em reflexões sobre os mesmos, proporcionando avanços nos estudos desse conjunto numérico. Apesar do livro *Elementos de Álgebra* trabalhar o tema números complexos em equações do terceiro grau, Euler considera apenas como raízes de equações resultantes de situações-problema valores reais, desconsiderando o uso de raízes complexas. Para ele, os números imaginários só podem ser aceitos em equações que não estejam relacionadas a um problema, o que

> [...] nos leva a concluir que os números complexos que surgem nas equações devem ser considerados, mas eles não são legítimos, não possuem *status* de número; ele não conhece o significado deles, portanto, embora mereçam atenção, como afirmou, eles não se aplicam a situações-problema. (SILVA, 2009, p. 49, grifos da autora)

Com os avanços da matemática desde o período do Renascimento, "os números complexos, que haviam sido introduzidos no século XVII, com relação à resolução de equações, vêm ter no final do século XIX, uma grande importância nas generalizações do conceito de espaço, surgindo então, a análise complexa." (D'AMBROSIO, 1997, p. 52).

Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) nasceu em Brunswick na Alemanha e foi o matemático que teve o mérito ao demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), em sua tese de doutorado, em 1799, na Universidade de Helmstädt, intitulada de *Nova Demonstração do Teorema que Toda Função Algébrica Racional Inteira em uma Variável pode ser Decomposta em Fatores Reais de Primeiro ou Segundo Grau.* Essa foi a primeira das quatro demonstrações que Gauss realizou sobre o Teorema Fundamental da Álgebra, segundo o qual, independente do grau de uma equação polinomial, obrigatoriamente ela terá pelo menos uma raiz complexa (BOYER, 1996). Quando Gauss demonstrou que as equações polinomiais têm pelo menos uma raiz no campo complexo, consequentemente, ele demonstrou que elas têm exatamente n raízes, sendo n o grau do respectivo polinômio. Outro teorema importante se conclui a partir do fundamental: Se o número complexo a + bi é raiz de uma equação polinomial de coeficientes reais, então o complexo a – bi também o é (GARBI, 1997), isto significa que as raízes complexas de equações polinomiais aparecem sempre em pares conjugados e que toda equação polinomial de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real. Em 1816, Gauss publicou duas novas demonstrações (EVES, 1995) e em 1849, cinquenta anos após seu doutoramento, apresentou a quarta prova do TFA em ocasião do recebimento de seu jubileu doutoral (BOYER, 1996). Em 1832, Gauss introduziu a expressão "Números Complexos" para os já chamados imaginários (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2008). Neste período, outros matemáticos se destacaram ao publicar métodos para a determinação de raízes reais e complexas de funções. A Academia de Ciências de Berlim, premiou Carl Heinrich Gräffe, professor de Matemática em Zurique, por apresentar um método prático de calcular as raízes imaginárias de funções, conhecido como *método de Gräffe*, publicado em 1837. Seu método utiliza logaritmos, e não há a necessidade de calcular previamente o número de raízes reais (CAJORI, 2007).

Gauss também definiu os números complexos como pares ordenados de números reais para os quais (a, b) . (c, d) = (ac – bd, ad + bc). (HELLMICH, 1992). "Durante o tempo de R. Descartes, I. Newton e L. Euler, os negativos e os imaginários foram aceitos como números, mas esses últimos eram ainda considerados como uma ficção algébrica." (CAJORI, 2007, p. 353).

O século XIX foi marcado pela divulgação de Gauss sobre a interpretação geométrica dos números complexos, e assim esses números tiveram um maior reconhecimento pela comunidade matemática. "Parece que o fato de esses números poderem ser representados geometricamente lhes dá essa existência. Em outras palavras, parece que, para os matemáticos daquele período, os entes geométricos tinham um tipo de realidade que faltava aos objetos da aritmética." (MILIES, 1993, p.15). A representação geométrica de um número complexo foi algo marcante e evolucionário, pois:

> A simples ideia de considerar as partes real e imaginária de um número complexo a + bi como as coordenadas retangulares de um ponto do plano fez com que os matemáticos se sentissem muito mais à vontade com os números imaginários, pois esses números podiam agora ser efetivamente visualizados, no sentido de que a cada número complexo corresponde um único ponto do plano e vice-versa. Ver é crer, e ideias anteriores sobre a não-existência e o caráter fictício dos números imaginários foram geralmente abandonadas. (EVES, 1995, p. 524)

O primeiro matemático a fazer tentativas de legitimar o número complexo geometricamente foi John Wallis[7] (1616–1703), sugerindo "[...] que os imaginários puros fossem

[7] Ver Nota de rodapé de Eves (1995, p.522).

representados numa perpendicular ao eixo dos reais." (BOYER, 1996, p. 350). Porém seu trabalho não prosseguiu com sucesso na comunidade matemática de seus conterrâneos (MILIES, 1993).

Passado quase um século dos esforços de Wallis, o matemático francês Augustin Louis Cauchy (1789-1857) referenciou o cientista Henri Dominique Truel, dizendo que esse cientista já tinha em 1786 o seu esquema gráfico de um número complexo, onde os imaginários eram plotados em uma reta perpendicular aos reais, mas Truel nada publicou e nem seus manuscritos restaram (CAJORI, 2007). Outro matemático francês da mesma época foi Jean Victor Poncelet (1788-1867), o qual criou o famoso princípio de continuidade geométrica, gerando extremas discussões entre ele e Cauchy. O princípio de continuidade conduz

> [...] à consideração de pontos e retas que se desvanecem no infinito ou tornam-se imaginários. A inclusão de tais pontos e retas ideais foi um presente que a geometria pura recebeu da análise, onde quantidades imaginárias têm um comportamento muito parecido com o das quantidades reais. (CAJORI, 2007, p. 379)

Apesar de Cauchy demorar no reconhecimento das variáveis complexas, ele colaborou mais tarde nos estudos de integrações das funções de variáveis complexas na forma analítica, diferente da forma geométrica apresentada por Wessel, Argand e Gauss. Cauchy colaborou nas limitações do teorema de Sturn, ele "[...] descobriu em 1831 um teorema geral que revela o número de raízes, reais ou complexas, dentro de um determinado contorno." (CAJORI, 2007, p. 470).

Argand designou o comprimento do vetor a + bi com a palavra *módulo* (CAJORI, 2007). Ele também publicou a ideia de representação geométrica num livreto em 1806, porém a proposta foi ignorada até que Gauss demonstrasse a mesma ideia em 1831, conta Berlinghoff e Gouvêa (2008). Eves (1995, p. 522) comenta que em 1814, essa publicação foi apresentada nos *Annales de MathématiquesI* de Gergonne e que "parece não haver dúvida de que a prioridade da ideia cabe a Wessel [...]". Wessel a publicou em 1797 na Real Academia Dinamarquesa de Ciências (CAJORI, 2007; EVES, 1995), mas o atraso no reconhecimento, explica a razão do plano complexo vir a ser chamado plano de Argand ao invés de Wessel. Pode-se imaginar o quanto era enorme o entusiasmo de Gauss ao dar sentido aos números complexos em seus trabalhos quando relata:

> Durante este outono, preocupei-me largamente com a consideração geral das superfícies curvas, o que conduz a um campo ilimitado...Essas pesquisas ligam-se profundamente com muitos outros assuntos, inclusive – como me sinto tentado a dizer – com a metafísica da geometria, e não é sem ingentes esforços, que consigo me arrancar às consequências que daí advém, qual seja, por exemplo, a verdadeira metafísica das grandezas negativas e imaginárias. Em tais ocasiões, sinto vibrar em mim, com grande vivacidade, o verdadeiro sentido de $\sqrt{-1}$, mas creio que será extraordinariamente difícil expressá-lo com palavras. (GAUSS apud KARLSON, 1961, p. 589)

William Rowan Hamilton (1805-1865) nasceu em Dublin na Irlanda e definiu a soma e o produto dos números complexos na forma de pares ordenados. Para Hamilton *i* é simplesmente o ponto (0, 1). Essa nova forma de ver os números complexos provocou remodelações significativas no estudo da física (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2008).

No início do século XIX, Hamilton se esforçou em uma revelação incomum à álgebra, onde a ideia que poderia ser considerada ridícula à época, de que a lei comutativa da multiplicação a × b = b × a, não era válida. Hamilton utilizou os números complexos, na representação de pares ordenados (a, b). Para a álgebra de Hamilton, definir um número complexo $a + bi$ na forma de par ordenado é o mesmo que: $a + bi$ = (a, 0) + (b,0).(0,1) = (a, 0) + (b, 0) = (a, b) onde (0, 1) representa o símbolo *i*. Logo se $i^2 = -1$, ele pode ser representado por i^2 = (0, 1).(0, 1) = (–1, 0) = – 1 (EVES, 1995).

Em suas pesquisas, Hamilton utilizou as representações acima, para trabalhar com os quádruplos ordenados de números reais *(a, b, c, d)*, conhecidos como quatérnios. Nas operações com quatérnios, vale a lei comutativa e associativa da adição, e na multiplicação vale a lei associativa e distributiva em relação à adição, porém, não vale a lei comutativa da multiplicação. Segundo Eves (1995, p. 555), Hamilton "[...] libertou a álgebra de suas amarras com a aritmética dos números reais, abrindo assim as comportas da álgebra abstrata [...]" como a primeira álgebra não-comutativa. Os quatérnios *(a, b, c, d)* podem ser representados na forma $a + bi + cj + dk$, onde *i, j, k* são chamados de quatérnios unitários, representados respectivamente pelos quatérnios (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) e (0, 0, 0, 1). Dessa forma, partindo das definições da soma e de multiplicação de quatérnios "[...] pode-se mostrar que o sistema de números reais e o dos números complexos estão imersos no dos quatérnios [...]." (EVES, 1995, p. 550). Nota-se que o número real um, pode ser representado pelo quatérnio (1, 0, 0, 0), assim como a unidade imaginária *i* é representada pelo quatérnio (0, 1, 0, 0). Nas multiplicações de quatérnios, utiliza-se o quadro da multiplicação dos quatérnios unitários, criado por Hamilton no Quadro 2:

Quadro 2 – Multiplicação dos operadores imaginários nos quatérnios de Hamilton

$\times$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Fonte: EVES (1995, p. 551)

Dessa relação, tem-se que $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Estendendo a generalização da álgebra dos quatérnios para conjuntos ordenados de n números reais, Hermann Günther Grassmann (1809-1877) associou a cada conjunto (x_1, x_2, ..., x_n) um número hipercomplexo da forma $x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$, onde e_1, e_2, ...,e_n são as unidades fundamentais, semelhantes as que foram definidas por Hamilton, i, j, k (EVES, 1995). A álgebra com os números complexos, quatérnios e extensões foram aos poucos difundidas com as ideias de Grassmann entre os matemáticos de sua época. Pode-se dizer que "o quatérnion é peculiar a W. R. Hamilton, enquanto com Grassmann encontramos em acréscimos à álgebra de vetores uma álgebra geométrica de larga aplicação [...]." (CAJORI, 2007, p. 438). Outro detalhe importante, é que seguindo a lógica dos quatérnios, não se pode dizer que uma equação do tipo $x^2 + 1 = 0$, possui apenas duas raízes, pois dentro dos quatérnios têm-se três raízes: i, j e k. Já na extensão para os números hipercomplexos, terá infinitas soluções (PERLIS, 1992). Segundo Freitas (2013), ao utilizar coeficientes quatérnios numa equação do 2º grau, o número de raízes pode ser maior que dois, às vezes, pode mesmo ser infinito.

O matemático francês Jacques Hadamard (1865-1963) percebeu o poder das descobertas sobre números complexos, ao afirmar que: "a menor trajetória entre duas verdades no domínio real passa pelo domínio complexo". (HADAMARD apud BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2008, p. 186). Berlinghoff e Gouvêa (2008, p. 186) explicam que para Hadamard, "[...] mesmo que estejamos interessados apenas em problemas com números reais e respostas que sejam números reais, as soluções mais fáceis frequentemente envolvem números complexos." Para Stewart (1989, p. 252), "os números complexos têm suas próprias aritmética, álgebra e análise; são uma das mais importantes e belas ideias de toda a matemática."

3.5 APLICABILIDADES DOS NÚMEROS COMPLEXOS

As aplicações dos números complexos são apresentadas num contexto histórico e da necessidade de se entender a sua vasta ligação com outros temas científicos. Conforme as PCN+: “Em termos gerais a contextualização no ensino de ciências abarca competências de inserção da ciência e de suas tecnologias em um processo histórico, social e cultural e o reconhecimento e discussão de aspectos práticos e éticos da ciência no mundo contemporâneo [...]” (BRASIL, 2002, p.31). Gottardi (2012) explica que a abordagem histórica de conteúdos, também justifica a importância desses como uma ciência dinâmica relacionada à sua aplicabilidade.

Como exemplo que desperta a atenção, no que se refere ao ensino de números complexos, têm-se os belos fractais gerados por programas computacionais e a relação desses com outros estudos. Para Pinto (2000, p. 17-18), “[...] as dificuldades dos alunos e os erros por eles cometidos na matemática escolar talvez não sejam decorrentes do caráter abstrato da disciplina, mas originários de sua descontextualização, do fato de ela estar desconectada dos contextos de uso e, portanto, da atividade social.”

Buscando uma justificativa no decorrer da história, o matemático e filósofo René Descartes, já no século XVII, em seu livro *Discurso do Método*, acreditava nas aplicações da ciência pelo conhecimento do homem e acreditava que era:

> [...] possível chegar a conhecimentos que sejam úteis à vida, e que [...] se pode encontrar uma Filosofia prática, pela qual, conhecendo a força e as ações do fogo, da água, do ar, dos astros, dos céus e de todos os outros corpos que nos cercam, [...] poderíamos empregá-los da mesma maneira em todos os usos para os quais são adequados, e, assim, tornar-nos como senhores e possuidores da natureza. (DESCARTES, 1989, p. 79)

Embora seja evidente o aparecimento dos números complexos na resolução de equações polinomiais, seu campo de aplicações é vasto. Alguns exemplos encontram-se em estudos de eletricidade, teoria quântica, termodinâmica, geometria fractal, aerodinâmica e, sobretudo na própria matemática do ensino básico como na geometria (rotações e translações de figuras), trigonometria, logaritmos, etc.

Os séculos XIX e XX registram o início das aplicações dos números complexos. Planejava-se “[...] no século XIX, uma nova matemática aplicada, que depois viria possibilitar os grandes avanços da física, especificamente a teoria da relatividade e a mecânica quântica, no início do século XX, e a informática na segunda metade do século XX." (D'AMBROSIO, 1997, p. 51).

O uso de números complexos na geometria fractal destaca-se nos conjuntos de Julia e no conjunto de Mandelbrot. A abordagem da geometria fractal, neste trabalho, corrobora com o que Baier (2005, p.12) descreveu em sua tese sobre a incorporação de conteúdos da matemática contemporânea no ensino básico:

> Os objetos matemáticos conhecidos como fractais, formas belas, coloridas e dotadas de movimento, despertam especial fascínio e curiosidade. Os fractais aparecem em filmes de ficção científica, sítios da Internet, jogos eletrônicos, programas educativos na televisão e revistas populares de divulgação científica, proporcionando prazer estético e conduzindo professores e estudantes às indagações sobre as suas relações com a Matemática. Motivam o pensar sobre o distanciamento entre os conteúdos matemáticos estudados nas escolas e o mundo onde vivemos. Geram, com isso, preocupações com a ausência, nos currículos escolares, dos conteúdos matemáticos construídos nas últimas décadas.

Os franceses Gaston Julia (1893-1978) e Pierre Fatou (1878-1929) destacaram-se pelos seus trabalhos, ainda que em pesquisas não conjuntas no período da primeira guerra mundial. Benoit Mandelbrot (1924-2010) utilizou os resultados desses trabalhos que serviram como bases matemáticas para desenvolver, junto com recursos computacionais, o que é conhecido hoje como o conjunto de Mandelbrot e os famosos conjuntos de Julia que estavam esquecidos até a sua época. "Julia mostrava que simples mapeamentos dos números complexos podiam dar origem a formas monstruosamente complicadas." (STEWART, 1989, p. 237). Os conjuntos de Julia revelam no plano de Argand-Gauss várias formas, como de cavalos-marinhos, coelhos, nebulosas e cata-ventos. Porém podem ter uma ampla variedade de formas, sendo que algumas parecem compor uma só peça, e outros parecem se fragmentarem, parecendo grãos de poeira (STEWART, 1989).

Julia e Mandelbrot estudaram o que acontece com a imagem de funções quadráticas do tipo $f(x) = x^2 + c$ para um x complexo inicial e c complexo constante, no plano complexo, quando se aplica iteradamente na função as imagens obtidas com o valor de *x* inicial, chegando ao estudo de órbitas e pontos fixos atratores e repulsores. Uma órbita que "escapa" é assim chamada quando ela tende para o infinito. As sementes ou os valores de *x* inicial da iteração das órbitas que não escapam, formam o conjunto completo de Julia, que é uma coleção de todas as sementes, na qual as órbitas da iteração quadrática $x \to x^2 + c$ não tendem para o infinito. Gaston Julia foi o primeiro a fazer o estudo desses conjuntos no início do século XX. Cada constante c, na iteração da função quadrática $x \to x^2 + c$, tem seu próprio conjunto de Julia (DEVANEY, 1999).

O conjunto de Mandelbrot é um objeto de estudo considerado complexo, porém admirado pela beleza que proporciona. Em 1958, Benoit Mandelbrot ingressou na equipe da IBM, e em 1980 foi gerada a primeira imagem, quando Mandelbrot e Thomas Watson, também matemático da IBM, utilizaram pela primeira vez o computador para ver e explorar em detalhes a beleza e o entendimento desses conjuntos. E foi a partir dessa experiência que esse tema se transformou em intensa pesquisa. Entender a Matemática que está por trás desta geometria complexa foi o objeto de estudo de muitos matemáticos que aceitaram os desafios que persistiam naquele tempo. O conjunto de Mandelbrot é gerado pela iteração da função quadrática $x \to x^2 + c$, sempre iniciando a iteração pela semente zero (x inicial igual a zero), na busca de constantes complexas c, para os quais a órbita não escapa para o infinito. Esse conjunto de pontos c no plano de Argand-Gauss define o conjunto de Mandelbrot (DEVANEY, 1999). Stewart (1989, p. 254) se refere ao conjunto de Mandelbrot como o *boneco de pão de mel*, e relata que esse conjunto "[...] já foi apontado, corretamente, como a mais complexa forma matemática jamais inventada."

Dentro do conjunto de Mandelbrot estão todos os valores da constante complexa c da função quadrática $x^2 + c$ que formam conjuntos de Julia possíveis.

Segundo Stewart (1989, p. 239) "[...] os fractais aparecem na ciência de duas maneiras diferentes. Podem ocorrer como objeto matemático primário, uma ferramenta descritiva para o estudo de processos e formas irregulares; ou podem ser uma dedução matemática de uma dinâmica caótica subjacente." Com o uso de um computador com alta definição de imagem e ótima velocidade de processamento, pode-se ampliar (*zoom*) a imagem do conjunto de Mandelbrot e perceber que os detalhes desse conjunto revelam novas formas surpreendentes como remoinhos, arabescos, cavalos-marinhos, torrões, brotos, cactos em flor, finas serpentes, espirais, bolhas com formas de insetos, raios em ziguezague, além de outros, bonecos de pão de mel, contendo sub-bonecos que podem ser réplicas perfeitas do conjunto ampliado, característica notável de figuras fractais conhecida como autossimilaridade. (STEWART, 1989). Essa característica também é evidente em estudos de botânica, onde:

> sistemas biológicos, de árvores a comunidades florestais, possuem um padrão típico de estruturação com propriedades auto-similares que independem da escala de observação. Por exemplo, o padrão de ramificação de uma árvore formando sua copa pode ser igualmente observado no padrão de ramificação das nervuras de uma única folha. Este

> padrão auto-repetitivo de construção de estruturas tem sido associado à construção de estruturas fractais. (SOUZA; BUCKERIDGE, 2004, p. 409)

O desenvolvimento da teoria fractal de Mandelbrot junto com outras teorias, como a do caos e sistemas dinâmicos não-lineares, “[...] trouxe novas possibilidades de observação e interpretação de dados biológicos, permitindo-nos uma maior aproximação da realidade complexa e dinâmica dos sistemas vivos.” (SOUZA; BUCKERIDGE, 2004, p. 408).

A seguir, descreve-se a utilização de números complexos na teoria quântica. Hawking (1989) exemplifica a utilização do tempo imaginário na teoria quântica, essa ideia está na proposta do físico Feynman, que consiste em uma teoria que combina a mecânica quântica e a gravidade, onde a teoria quântica é respondida pela soma das histórias. Entende-se que uma partícula não possui apenas uma única história como na teoria clássica. Dessa forma é necessário somar as ondas associadas a cada história possível de que a partícula passe através de um determinado ponto, tendo que encontrar a probabilidade dela nesse ponto. E justamente ao tentar obter essas somas, aparecem os problemas sobre os quais, a teoria dos números complexos auxilia a resolver, pois a única maneira de resolver essas somas consiste em trabalhar com os números complexos, onde a soma das ondas para as histórias das partículas não estão num tempo “real”, mas acontecem num tempo imaginário.

> Quando se tenta unificar a gravidade com a mecânica quântica, temos que introduzir a ideia do tempo ‘imaginário’, que é indistinguível do conceito de direções no espaço. Se podemos ir para o norte, podemos também voltar e nos dirigirmos para o sul; da mesma maneira, se podemos ir em frente no tempo imaginário, devemos ser capazes de voltar atrás. Isto significa que não há diferença significativa entre as direções para frente e para trás no tempo imaginário. (HAWKING, 1989, p. 199)

Nessa teoria, um grupo de histórias prováveis, como a história do universo, pode ser comparado geometricamente ao formato esférico do planeta Terra e seus polos norte e sul em um tempo imaginário. Para Hawking (1989, p.194-195), a utilização dos números complexos como fator tempo nessa teoria faz sentido numa aplicação direta. “Só não haverá singularidades se pudermos registrar o universo em termos do tempo imaginário. [...] Isto por sua vez, conduz à idéia de que o universo pode ser finito no tempo imaginário, mas sem limites ou singularidades.”

Outro importante uso dos números complexos na teoria quântica está na aplicação da teoria de Einstein para explicar as quatro dimensões.

> Segundo Einstein, a diferença física entre distâncias espaciais e durações temporais pode ser acentuada na formulação matemática de um teorema de Pitágoras generalizado, utilizando-se o *sinal negativo* antes do quadrado do tempo coordenado. Assim podemos designar a distância quadridimensional entre dois acontecimentos como a *raiz quadrada da soma dos quadrados das três coordenadas espaciais, menos o quadrado da coordenada temporal*, que terá de ser expressa, decerto, primeiramente em unidades de espaço. (GAMOW, 1962, p.81, grifos do autor)

Entende-se que a fórmula para se calcular as distâncias entre dois acontecimentos é $\sqrt{(e_1)^2 + (e_2)^2 + (e_3)^2 - (t)^2}$, onde e_1, e_2, e_3 são as coordenadas espaciais e t a coordenada temporal. Todas as coordenadas precisam estar na mesma unidade de medida, por isso, a coordenada t é transformada em unidades de espaço com ajuda da velocidade da luz. Acontece que em alguns casos, a coordenada temporal assume um valor muito alto, ocasionando um radicando negativo dentro da raiz quadrada. A solução para esse problema estaria em considerar a quarta coordenada como sendo um número imaginário puro, ou seja, acompanhado de i. Dessa forma, $-(ti)^2$, será um número real positivo (GAMOW, 1962).

Gamow (1962) descreve que essa solução foi sugerida pelo matemático alemão Minkowski tendo como objetivo transformar a geometria de espaço e tempo de Einstein na geometria euclidiana. Segundo Cajori (2007, p. 436), essas interpretações dadas por Minkowski "[...] abriram novos pontos de vista." Para isto, ele utilizou de um modo limitado a análise vetorial, com o cálculo matricial de Arthur Cayley (1821-1895). Cayley também fundamentou os números hipercomplexos de dimensão 8, conhecidos como octônios ou números de Cayley.

Nos estudos da quarta dimensão Gilbert N. Lewis utilizou a análise vetorial do sistema de números hipercomplexos de Hermann Güenther Grassmann (CAJORI, 2007). Segundo Gamow (1962) há dois exemplos fisicamente diferentes de separações quadridimensionais: um em que se utiliza a unidade imaginária quando a coordenada temporal for um valor relativamente alto (distâncias imaginárias ou separação temporal); e outro quando não há essa necessidade, ou seja, a distância entre os dois acontecimentos utilizam números reais (distâncias espaciais ou separação espacial).

> Porém o fato de que uma delas se represente por um número real e a outra por um número imaginário constitui uma barreira intransponível a qualquer tentativa de transformar uma na outra, tornando impossível para nós fazer de uma fita métrica um relógio, ou de um relógio uma fita métrica. (GAMOW, 1962, p.84)

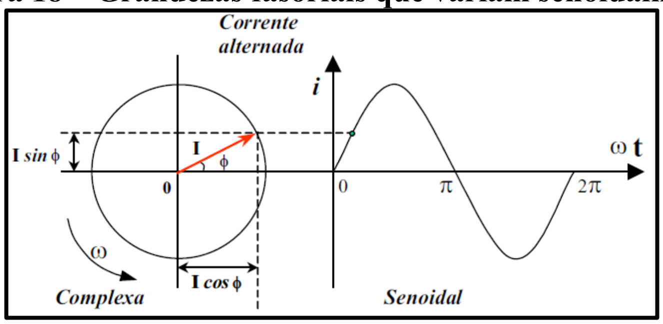
Os quatérnions, criados por Hamilton, são vetores formados por números complexos unitários (a, i, j, k). Esses vetores também podem ser representados na forma matricial. Eles se destacam por fazerem parte de uma álgebra não comutativa e descrevem os fenômenos da mecânica quântica, pesquisados por August Heisenberg em 1925 (BAUMGART, 1992). Em 1927 eles foram utilizados nas *variáveis spin* na teoria quântica de Wolfgang Pauli (1900-1958) (EVES, 1995).

O século XIX e o início do século XX foram os períodos com grandes descobertas e publicações científicas. E entre os diversos assuntos da época, estavam as teorias da eletricidade e do magnetismo, concomitante ao cálculo e a álgebra dos imaginários. (CAJORI, 2001). O matemático Gauss (1777-1855) contribuiu significativamente na representação geométrica dos números complexos no século XIX e fez contribuições notáveis à eletricidade. “Em 1831 começou a colaborar com seu colega Wilhelm Weber (1804-1891) em pesquisas básicas em eletricidade e magnetismo; em 1833 os dois descobriram o telégrafo eletromagnético.” (EVES, 1995, p. 521).

Historicamente, os números complexos são utilizados nos estudos de análise de circuitos elétricos de correntes alternadas (CA), onde a representação geométrica, nesse caso vetorial, de funções senoidais, que variam no tempo *t*, são transformadas e operadas no chamado *domínio da frequência* ou domínio complexo. As funções senoidais representam dominantemente o sistema de energia elétrica e assim pode se concluir que o sinal encontrado nas tomadas residenciais e prediais é senoidal. “*Senóide* é um sinal que possui a forma de uma função seno ou co-sseno.” (ALEXANDER; SADIKU, 2003, p.322, grifo dos autores). E por esse motivo, grandezas que variam senoidalmente podem ser representadas por números complexos no domínio complexo, denominados fasores. Pode-se concluir que fasor é um número complexo que representa a amplitude e a fase de uma senóide. A ideia de utilizar fasores na análise de circuitos CA foi apresentada num artigo em 1893 por Charles Proteus Steinmetz (1865-1923), vindo a culminar posteriormente, em vários livros de CA (ALEXANDER; SADIKU, 2003). A mudança de representação pode ser entendida pela Figura 18.

Os números complexos estão presentes nos cálculos de correntes, tensões, potências, resistências e defasagens da eletricidade. As representações de um número complexo nas formas polar, exponencial e retangular são as mais comuns no estudo de eletricidade. A troca da letra *i* por *j* para a unidade imaginária, ou operador imaginário, se deve ao fato de que a letra *i* representa a intensidade da corrente elétrica, portanto j = $\sqrt{-1}$.

Figura 18 – Grandezas fasoriais que variam senoidalmente



Fonte: PAZ (2005, p. 141)

Na forma exponencial, Z = z.e$^{j\theta}$, o módulo z = |Z| é chamado de *magnitude* ou *amplitude* e o argumento principal θ é medido em radianos ou em graus, também chamado de ângulo de fase ou somente *fase*. Frequentemente, nos cálculos com fasores, utiliza-se a representação polar Z = |Z| ∠θ, pela simplicidade de expressar as características de magnitude, fase e também pela facilidade operatória.

Nas relações entre os fasores provenientes das funções de tempo *v(t)* e *i(t)* é necessário transformar "[...] um conjunto de equações diferenciais com funções de excitação senoidais no domínio do tempo em um conjunto de equações algébricas contendo números complexos no domínio da frequência." (IRWIN, 2000, p. 348).

Matematicamente, para determinar os fasores desconhecidos é necessário mudar o domínio das funções. A função que envolve a variável tempo é trocada por outra função, representada por um número complexo. Com a solução nesse domínio (da frequência), é necessário transformar, novamente, para o domínio do tempo e tem-se a solução para o problema original. "Em resumo, enquanto v(t) representa a tensão no domínio do tempo, o fasor V representa a tensão no domínio da frequência. O fasor contém somente magnitude e informação de fase, e a frequência é implícita nessa representação." (IRWIN, 2000, p. 348). O Quadro 3, mostra as representações, onde *A* é a magnitude (matematicamente é o módulo) e θ é a fase (argumento principal).

Duas quantidades são úteis em análises de circuitos de correntes alternadas: *impedância* e *admitância*.

Quadro 3 – Representação de fasores

Domínio do Tempo	Domínio da Frequência
$A\cos(\omega t \pm \theta)$	$A\angle \pm \theta$
$A\,sen(\omega t \pm \theta)$	$A\angle \pm \theta + 90^{o}$

Fonte: IRWIN (2000, p. 348)

A *impedância* é definida, segundo Irwin (2000, p.354), "[...] como a razão entre o fasor V pelo fasor de corrente I[...]", ou seja, $Z = \frac{V}{I}$, e tem como unidade de medida *ohms*. Na forma retangular tem-se Z(jω) = R(ω) + jX(ω), onde R e X são funções reais de ω e Z(jω) é a frequência dependente. Da razão inversa da *impedância* obtém-se a *admitância*, representada por $Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{V}$, onde sua forma retangular é expressa por Y = G + jB e sua unidade de medida é *siemens*. Segue abaixo no Quadro 4 a descrição sintetizada da impedância e admitância e o significado das partes real e imaginária desses termos.

Quadro 4 – Termos utilizados nos estudos de eletricidade

Impedância: $Z = \frac{V}{I} \rightarrow$ (Z = R + jX)	É a razão entre o fasor V e o fasor I (em *ohms*)	*R* é a parte real chamada de resistência e *X* é a parte imaginária chamada de reatância.
Admitância: $Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{V} \rightarrow$ (Y = G + jB)	É a razão inversa da impedância. (em *siemens*)	*G* é a parte real que representa a condutância e B é a parte imaginária que representa a suscetância.

Na parte 6 do produto educacional, há um exemplo dessa aplicação. A mesma encontra-se no apêndice da presente dissertação e destina-se a estudantes do ensino superior (cursos de física, matemática e engenharias) e cursos técnicos de eletricidade.

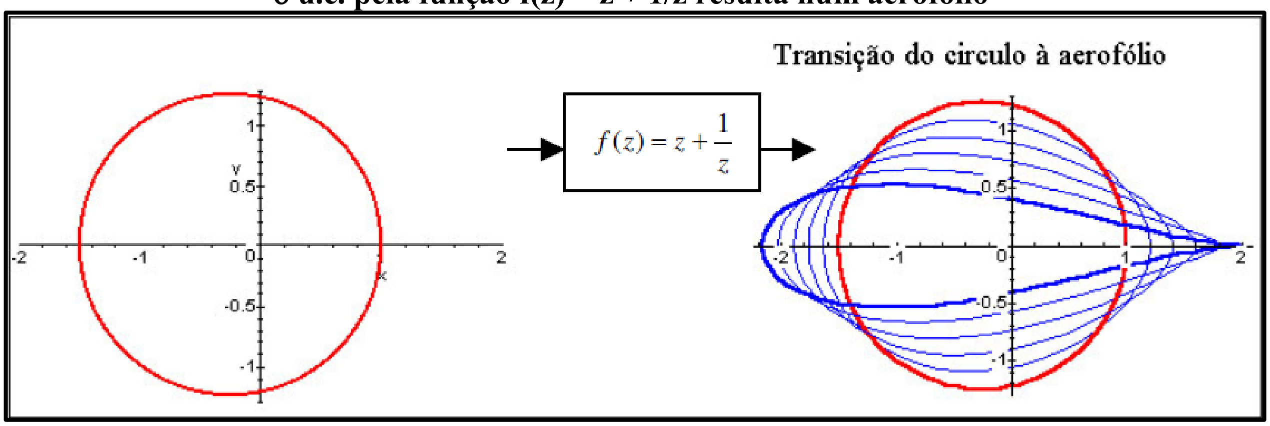
Os números complexos também aparecem nas equações de estado cúbico em estudos da termodinâmica como nas equações de van der Waals, podendo ter como raízes da equação uma raiz real e duas complexas conjugadas, ocorrendo o vapor superaquecido. Utiliza-se a fórmula de Tartaglia-Cardano na resolução.

Nos estudos da aerodinâmica, tem-se a aplicação dos números complexos na chamada transformação de Joukowski, que possibilita entender o funcionamento de aerofólios de aviões. O criador dessa ideia foi o russo Nicolai Joukowski (1847-1921).

> Utilizando transformações geométricas, construiu uma curva fechada no plano complexo, tal como o perfil de uma asa de avião (aerofólio de Joukowski). Usando o Princípio de Bernoulli e a Teoria das Funções Complexas, deduziu uma fórmula, F=x+ yi, que permite calcular a força de arrasto responsável pela sustentação do corpo. (SMOLE; DINIZ, 2010, p. 261)

A função que permite a transformação de Joukowski é $f(z) = z + \frac{1}{z}$, ou seja, é a soma da função identidade com a inversa multiplicativa. Pazos (2005) explica que quando tomada a circunferência unitária com centro na origem, a transformação de todos os pontos pertencentes à ela pela função *f(z)* será um segmento de reta sobre o eixo real do plano complexo. Quando aumentado o raio da circunferência em δ e deslocado o centro para a esquerda da origem na mesma medida δ tem-se na transformação de *f(z)* um aerofólio como mostra a Figura 19.

Figura 19 – Transformação do círculo unitário deslocado δ da origem e raio dilatado em δ u.c. pela função f(z) = z + 1/z resulta num aerofólio



Fonte: PAZOS (2005, p. 8)

É através dessa função que "[...] os engenheiros aeronáuticos estabelecem previsões das forças de sustentação e arrasto nas asas de um avião cujas seções transversais possuem certas formas de aerofólios." (PAZOS, 2005, p. 9).

A contribuição de Joukowski na aerodinâmica proporcionou consequentemente o progresso tecnológico (SMOLE; DINIZ, 2010).

4 METODOLOGIA DE PESQUISA E CONSTRUÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

Neste capítulo é apontada a importância de investigar os conhecimentos dos estudantes antes de lecionar um conteúdo matemático. É apresentada a fundamentação teórica do produto educacional seguido da metodologia bem como os resultados da aplicação do produto educacional que envolveu estudantes do ensino médio e acadêmicos do 1º semestre de Matemática. Esses últimos contribuíram com uma análise descritiva da sequência de atividades propostas. O tratamento do tema números complexos, no presente capítulo, provém de documentos legais do ensino básico e de produções científicas que abarcam inclusive o ensino superior.

4.1 OS CONHECIMENTOS PRÉVIOS DOS ESTUDANTES E OS ERROS NO PROCESSO DE ENSINO

Considera-se neste trabalho a relevância dos conhecimentos prévios e o tratamento dado aos erros dos estudantes no processo de ensino. Para Pinto (2000, p. 22), "[...] analisar os erros a partir da perspectiva docente pode ser um valioso objeto de análise, uma vez que a sala de aula vem sendo apontada como um precioso objeto de análise para o campo da didática." Considerar as concepções iniciais dos estudantes sobre um determinado objeto, revela a forma como esse foi construído ao longo da história de vida do sujeito em contato com outros sujeitos e objetos e destaca-se num processo contextualizado de ensino-aprendizagem. Ao trabalhar

> o aprendizado que tem seu ponto de partida no universo vivencial comum entre os alunos e os professores, que investiga ativamente o meio natural ou social real, ou que faz uso do conhecimento prático de especialistas e outros profissionais, desenvolve com vantagem o aprendizado significativo [...]. (BRASIL, 1999, p. 105)

Damásio (1996, p. 128, grifo do autor) afirma que:

> Todos possuímos provas concretas de que sempre que recordamos um dado objeto, um rosto ou uma cena, não obtemos uma reprodução exata, mas antes uma *interpretação*, uma nova versão reconstruída do original. Mas ainda, à medida que a idade e experiência se modificam, as versões da mesma coisa evoluem.

Os educandos trazem consigo uma bagagem histórica de saberes prévios relevantes para o ponto de partida em sala. Muitas vezes, esses saberes necessitam de uma discussão ou revisão, de acordo com a necessidade dos novos conhecimentos a serem estudados.

> O conhecimento prévio dos alunos, tema que tem mobilizado educadores, especialmente nas últimas duas décadas, é particularmente relevante para o aprendizado científico matemático. Os alunos chegam à escola já trazendo conceitos próprios para as coisas que observam e modelos elaborados autonomamente para explicar sua realidade vivida, inclusive para fatos de interesse científico. É importante levar em conta tais conhecimentos, no processo pedagógico, porque o efetivo diálogo pedagógico só se verifica quando há uma confrontação verdadeira de visões e opiniões; o aprendizado da ciência é um processo de transição da visão intuitiva, de senso comum ou de auto-elaboração, pela visão de caráter científico construída pelo aluno, como produto do embate de visões. (BRASIL, 1999, p. 104)

Ao tratar da construção do currículo para o ensino médio, as DCN (2013) ostentam a importância de se considerar os sujeitos e seus saberes, com base no respeito e no acolhimento dos sujeitos no currículo, defendendo a inserção do diálogo entre os saberes.

> O diálogo entre saberes precisa ser desenvolvido, de modo a propiciar a todos os estudantes o acesso ao indispensável para a compreensão das diferentes realidades no plano da natureza, da sociedade, da cultura e da vida. [...] mostra-se indispensável a promoção de um ambiente democrático em que as relações entre estudantes e docentes e entre os próprios estudantes se caracterizem pelo respeito aos outros e pela valorização da diversidade e da diferença. (BRASIL, 2013, p. 181)

O ensino contextualizado de números complexos requer tempo e planejamento. Abstrair o entendimento da raiz quadrada de um número negativo pode não ser uma tarefa fácil, onde o sucesso ou o fracasso da aprendizagem dependerá exclusivamente do seu ponto de partida, ou seja, das rupturas dos erros que os estudantes possuem sobre a raiz quadrada de números negativos. Para os PCN, “[...] o pano de fundo das salas de aula se constitui dos preconceitos e concepções errôneas que esses alunos trazem sobre o que é aprender, sobre o significado das atividades matemáticas e a natureza da própria ciência.” (BRASIL, 1999, p. 85).

As concepções iniciais dos estudantes não devem ser totalmente descartadas no processo de aprendizagem. O matemático e filósofo René Descartes exemplificou as modificações no pensamento do sujeito como a desconstrução de uma casa velha para o aproveitamento na construção de uma nova:

> E, como ao demolir uma velha casa, reservam-se geralmente os escombros para servir à construção de outra nova, do mesmo modo, ao destruir todas as minhas opiniões, que

> julgava mal fundadas, fazia diversas observações e adquiria muitas experiências, que posteriormente me serviriam para fundamentar outras certas. (DESCARTES, 1989, p.53)

Ao analisar erros dos estudantes, Pinto (2000, p. 12) afirma que "[...] o erro apresenta-se como uma pista para o professor organizar a aprendizagem do aluno." Para Cury (2007) a análise de erros é uma tendência em Educação Matemática podendo ser útil como metodologia de ensino e como metodologia de pesquisa. Para a mesma autora "[...] o erro é fonte de saberes, é um saber, enquistado, resistente, apontando para algum problema que exige atenção." (CURY, 2007, p. 93). Para a mesma autora, o matemático francês Jacques Hadamard foi um dos pioneiros na análise de erros. Hadamard inspirou-se nas ideias de Henri Poincaré e escreveu sobre as falhas e erros de matemáticos experientes: "para um aluno, (re)criar um conceito é um processo sujeito às mesmas influências psicológicas que Poincaré e Hadamard visualizavam nas invenções dos matemáticos [...]", conclui Cury (2007, p. 25). Deve ser considerado que na análise de erros, "[...] os erros não devem ser tratados como fracassos, mas como fonte de informação para o professor na sua tarefa de 'treinador' e para a auto-avaliação do aluno." (PÉREZ ECHEVERRÍA, 1998, p. 65).

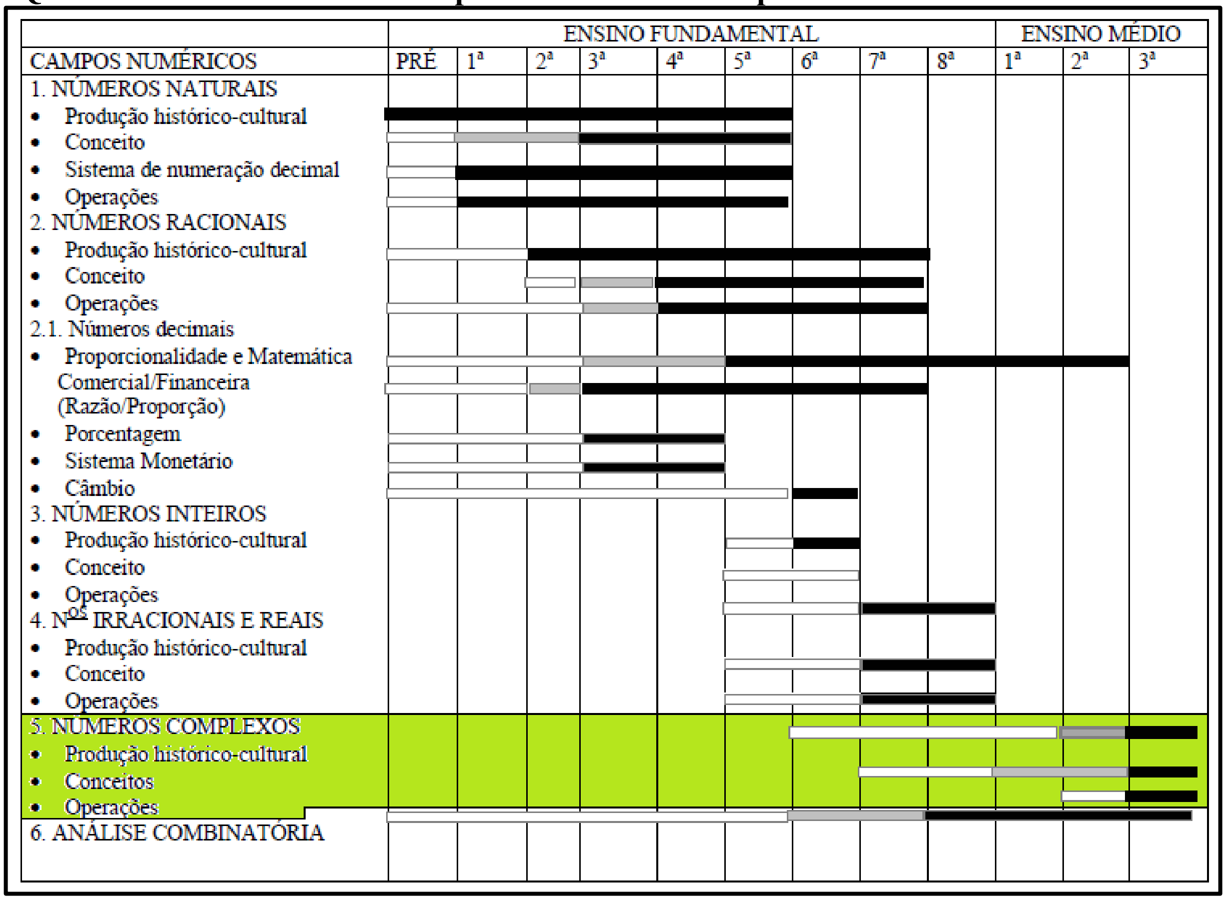
4.2 NÚMEROS COMPLEXOS NOS DOCUMENTOS LEGAIS DO ENSINO BÁSICO E NAS PRODUÇÕES CIENTÍFICAS

Consta na Proposta Curricular de Santa Catarina (1998, p. 107-108), nos conteúdos do ensino básico, uma gradativa passagem do *tratamento assistemático* para o *sistemático*. É detalhado nesse documento que trabalhar um conteúdo *assistematicamente*, "[...] significa abordá-lo enquanto noção ou significação social, sem preocupação em defini-lo simbólica ou formalmente." No que diz a respeito à abordagem *sistemática*, "[...] significa dizer que ele será trabalhado conceitualmente, utilizando-se na medida do possível, a linguagem matemática simbólica tal como foi historicamente convencionada e organizada." Embora a Proposta Curricular de Santa Catarina (1998) sugira a sistematização dos conceitos a partir de uma determinada série, ela enfatiza que um conceito pode ser antecipado, caso for necessário e existir condições favoráveis para o mesmo. Essa possibilidade permite ao professor discutir conceitualmente[8] os casos de aparecimento de raízes quadradas de números negativos já nos anos

[8] No produto educacional há alguns exemplos: Atividades 1 e 2 da cartilha contidas na Parte 3 e os desafios 1 e 2 da apresentação inicial que estão na Parte 2.

finais do ensino fundamental, com o objetivo de romper a ideia de que não existe o quadrado de um número cujo sinal seja negativo.

Quadro 5 – Conteúdos dos Campos Numéricos da Proposta Curricular de Santa Catarina



Fonte: SANTA CATARINA (1998, p.108)

No Quadro 5 pode ser visto que o conteúdo números complexos está enquadrado no campo numérico da referida proposta, e percebe-se o estudo *assistemático* a partir da 6ª série do ensino fundamental (atual 7º ano), visto que nesse período os estudantes começam a estudar a produção histórica e cultural mais intensa dos números inteiros, proporcionando-lhes melhores concepções das propriedades e operações com esses, entre elas, a raiz quadrada. Seguindo as linhas no quadro acima, observa-se que a passagem para a cor mais escura acontece, no último ano do ensino básico, ou seja, no 3º ano do ensino médio, correspondendo a um estudo *sistemático*, permitindo dessa forma, trabalhar conceitos, símbolos matemáticos e operações mais avançadas. A Proposta Curricular de Santa Catarina (1998, p. 111) sugere que a abordagem dos números complexos aconteça também no estudo de equações do 2º grau com soluções complexas, ou seja, é o momento propício para que os estudantes entendam a necessidade da ampliação do campo numérico dos reais, “[...] momento em que o aluno pode ter uma primeira noção de Números Complexos.” Já no 7º ano, onde estudam as potências e raízes quadradas de números negativos, há a possibilidade de trabalhar de forma *assistemática* os números complexos com o confronto entre raízes quadradas de números positivos e de números negativos.

No ensino básico, quando ocorre o trabalho com números complexos é notado que o ensino aprofundado, apenas acontece no 3º ano do ensino médio, ou seja, no último ano do ensino básico. Essa fixação de conteúdos relacionada à uma ordem de acordo com o grau de complexidade remete à uma visão cartesiana[9] fortalecendo mais a ideia de que números complexos é um conteúdo abstrato de alta complexidade para o ensino, podendo ser classificado como um dos últimos conteúdos da formação básica dos estudantes. É certo, como ocorre com outros conteúdos matemáticos, que o nível de abstração e conhecimento, bem como experiências e habilidades de operações matemáticas, para o ensino de números complexos, requerem um amadurecimento cognitivo.

Atualmente falar de raízes e-nésimas de um número complexo na forma trigonométrica, só é possível no 2º ou 3º ano do ensino médio, pois é nessa fase que, estudantes entre 15 a 17 anos, alcançam uma bagagem escolar de conhecimentos de trigonometria, geometria e álgebra. As PCN+ (2002) destacam que o ensino de números complexos “[...] isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas.” (BRASIL, 2002, p. 122). As DCN (2013) para o ensino médio formulam ideias para o currículo escolar e para o currículo flexível:

> A definição e a gestão do currículo inscrevem-se em uma lógica que se dirige, predominantemente, aos jovens, considerando suas singularidades, que se situam em um tempo determinado. Os sistemas educativos devem prever currículos flexíveis, com diferentes alternativas, para que os jovens tenham a oportunidade de escolher o percurso formativo que atenda seus interesses, necessidades e aspirações, para que se assegure a permanência dos jovens na escola, com proveito, até a conclusão da Educação Básica. (BRASIL, 2013, p. 154-155)

Historicamente, a preocupação de se trabalhar com os números complexos, surgiu a partir da resolução de equações do 3º grau. Consta nas orientações curriculares para o ensino

[9] Terceiro preceito definido por Descartes: “O terceiro, o de conduzir por ordem meus pensamentos, a começar pelos objetos mais simples e mais fáceis de serem conhecidos, para galgar, pouco a pouco, como que por graus, até o conhecimento dos mais complexos e, inclusive, pressupondo uma ordem entre os que não se precedem naturalmente uns aos outros.”(DESCARTES, 1989, p. 44).

médio (BRASIL, 2008, p. 71) que os conteúdos classificados como n*úmeros e operaçõe*s precisam proporcionar ao estudante

> [...] uma diversidade de problemas geradores da necessidade de ampliação dos campos numéricos e suas operações, [...] Os números complexos devem ser apresentados como uma histórica necessidade de ampliação do conjunto de soluções de uma equação, tomando-se, para isso, uma equação bem simples, a saber, $x^2 + 1 = 0$.

Esse exemplo faz com que os estudantes percebam as limitações dos números reais e a necessidade de entenderem e apropriarem-se de novos conhecimentos em matemática.

Algumas publicações científicas e dissertações visam um tratamento adepto às mudanças sobre o ensino de números complexos nas escolas. Entre essas mudanças, é ressaltado que o ensino do mesmo, não fique apenas na limitação demasiadamente algébrica, porém Carneiro (2004a, p. 20) ressalta que o ensino nas escolas "[...] permanece ainda excessivamente preso à sua origem histórica e até hoje ainda não se beneficiou como poderia e deveria da revolução iniciada há 200 anos por Wessel, Argand e Gauss." Monzon (2012) e Oliveira (2010), em suas dissertações, mostraram a potencialidade de se trabalhar com o software de geometria dinâmica *Geogebra*, no qual possibilita a interpretação geométrica das operações através de transformações no plano complexo. Para Oliveira (2010, p. 167), "[...] o uso do software Geogebra mostra-se atrativo para os estudantes, porque permite a visualização dinâmica entre os vetores que representam os números complexos e mantém as propriedades, no caso simetria, invariante entre elas." Ao apresentar as transformações geométricas de algumas funções complexas, Pazos (2005, p. 5) observa que:

> Na prática educacional resulta gratificante perceber que o aluno capta as formas de trabalho geométrico no plano complexo mais rapidamente que o cálculo ou a análise com funções complexas. Após ter refrescado a aritmética e geometria dos números complexos na sala de aula, o emprego do computador aperfeiçoa a aprendizagem.

Tratado como proposta de tema complementar nas Orientações Curriculares para o ensino médio (2008), o tema números complexos é evidenciado na algébrica e na geometria:

> Outro tópico que pode ser tratado como tema complementar é o estudo mais aprofundado dos números complexos. Por um lado, podem-se explorar os aspectos históricos da introdução dos números complexos e de seu papel fundamental no desenvolvimento da álgebra. Por outro lado, podem-se explorar as conexões entre as operações com números complexos e as transformações geométricas no plano. (BRASIL, 2008, p. 93-94)

Destaca-se ainda, que a exploração geométrica dos complexos não está isolada dos aspectos históricos, como apresentados no Capítulo 3 deste trabalho.

A dissertação de Rosa (1998) apresenta alguns obstáculos que acompanham, ou acompanharam a evolução histórica dos números complexos e, que podem estar presentes no ensino atual. Entre eles está o *obstáculo epistemológico*. O autor descreve "[...] um obstáculo epistemológico quando os matemáticos utilizam esses números como ferramenta de cálculo por aproximadamente trezentos anos, até que com sua representação no quadro geométrico eles adquirem o estatuto de números." (ROSA, 1998, p. 34).

Evitar o estudo de números complexos no ensino básico, limitaria o conhecimento sobre as raízes das equações do 2º grau e de situações-problema que resultam em equações do 3º grau, como no caso irredutível da fórmula de Tartaglia-Cardano.

Para Cajori (2007), partir de problemas que remetem uma situação à equações do 2º ou do 3º grau, comparada às semelhantes experiências pelas quais passaram alguns matemáticos, oportuniza ao professor entender que:

> a crença ingênua de um jovem estudante em supor que toda equação algébrica possui uma raiz dá lugar ao prazer em saber da vagarosa conquista da realidade dos números imaginários e da precoce genialidade de Gauss que pode demonstrar esta obscura e fundamental proposição relacionada com as equações algébricas. (CAJORI, 2007, p.19)

Caraça (1998) relatou que sem os números complexos não seria possível a unificação de certos resultados, estando reduzidos a restos dispersos nos reais. Esse autor mostra como introduzir os complexos pelo método chamado *negação da negação* (grifos do autor). O método se trata de negar a negação: "seja a um número real, qualquer; não existe $\sqrt{-a^2}$, isto é, não existe nenhum número real x tal que $x^2 = -a^2$." (CARAÇA, 1998, p. 152). Para mostrar a negação dessa negação, ele utiliza o símbolo i tal que $i^2 = -1$ e chega ao valor de ai, porém i não é um número real e conclui que há a necessidade de um novo campo numérico.

O atraso em apresentar os números complexos como entes geométricos, logo no início do aprendizado dos estudantes, priorizando a forma algébrica e a facilidade de operar com eles neste quadro[10], gera, segundo Carneiro (2004a, 2004b), duas consequências ao aprendizado: uma visão demasiadamente formal e algebrizante e a difícil aplicação dos números complexos em problemas de geometria.

---

[10] Ver Rosa (1998, p. 30); A noção de quadro foi introduzida na Didática da Matemática por Régine Douady (1986).

Os números complexos têm suma importância em temas contemporâneos. Discutir com os estudantes sobre as aplicações, como na geometria fractal, na teoria quântica e na aerodinâmica, despertam interesses, pois o contato de conhecimentos gerados pelas discussões desse objeto de estudo proporcionam aos estudantes, sentidos para aprendê-lo. Em estudos como da teoria quântica, Baier (2005) expõe que a utilização de *números imaginários* faz desaparecer completamente a distinção entre tempo e espaço. A mesma autora faz observações quanto ao estudo do tema no ensino básico, destacando que esses são "[...] muitas vezes, considerados como sendo um tópico inútil. No entanto, sua abordagem possibilita o entendimento de que o espaço euclidiano não é o único possível, o que é evidenciado com a criação das teorias científicas contemporâneas." (BAIER, 2005, p. 56). Contudo, os estudos como o da teoria quântica, provocaram uma mudança na visão de homem e de mundo que "[...] pode levar à errônea dedução que a Matemática que sustentou o desenvolvimento da ciência moderna tornou-se obsoleta. No entanto, a Matemática que sustenta a produção da ciência moderna não perde validade, continuando a ser utilizada, porém apresenta limitações." (BAIER, 2005, p. 56-57). Historicamente, parece que os números complexos são tratados como ferramentas a dar respostas a alguns porquês, e sendo assim, presencia-se atualmente, o tratamento dado aos mesmos como um objeto sem sentido, onde é "[...] a ferramenta que funciona quase sempre primeiro; ela parece mesmo ser a origem da criação do objeto, o qual se constituirá pedaço à pedaço pela soma das ações que a utilizam." (ROSA, 1998, p. 73).

Nos cursos superiores e técnicos de engenharia elétrica e eletrônica, os números complexos são utilizados como objeto e ferramenta para os estudos de eletricidade e magnetismo.

Mello e Santos (2005) relataram em suas pesquisas, a importância de se trabalhar com os números complexos em análise de circuitos elétricos em corrente alternada. A pesquisa foi realizada em todos os cursos técnicos de nível médio do estado do Rio Grande do Sul, envolvendo docentes da disciplina de eletricidade. A pesquisa constatou que 41,9% dos docentes relataram que os alunos têm dificuldades ao trabalharem com a análise complexa, devido ao fato de que os estudantes "[...] não têm noção de sua aplicabilidade, mas professam um ensino que tem por pedra filosofal a reprodução mecânica de cálculos matemáticos, repercutindo na continuidade de um ensino tradicional e empirista." (MELLO; SANTOS, 2005, p. 64). Concluíram também que o uso da análise complexa traz melhor compreensão, quando são estudados circuitos mistos, do que a análise fasorial, mais recomendada para circuitos simples.

Na mesma pesquisa, apenas 13,5% dos docentes entrevistados, possuindo pós-graduação, relataram utilizar a análise complexa. Os docentes pesquisados revelaram que a dificuldade em utilizar a análise complexa em suas metodologias de ensino, se justifica pelo mesmo fato dos estudantes, ou seja, o baixo conhecimento sobre a aplicabilidade dos números complexos, que pode estar na carência do "[...] conhecimento pedagógico e metodológico de sua aplicação prática ao ensino, seja por desconhecimento do professor ou, ao que se arriscaria supor, a problemas nos cursos de formação docente." (2005, p. 56). Ainda, para Mello e Santos (2005, p. 58), a dificuldade de usar os números complexos nos estudos de circuitos mistos em corrente alternada se deve "[...] às deficiências de conhecimentos matemáticos e que são consideradas como pré-requisitos aos estudantes de Eletricidade [...]", mesmo assim, os docentes participantes dessa pesquisa disseram que é possível a utilização dos números complexos sem os necessários pré-requisitos matemáticos.

Conhecimentos de trigonometria, funções, geometria, vetores estão implicitamente ligados ao ensino de números complexos. As razões trigonométricas seno e cosseno são exemplos que podem ser explorados na representação geométrica de um número complexo, vindo a esclarecer algumas possíveis dificuldades dos estudantes.

4.3 METODOLOGIA DA PESQUISA E ELABORAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

A presente pesquisa teve como cenário de investigação, uma escola pública estadual localizada no município de Gaspar – SC, com a participação de dois professores de Matemática: o autor e pesquisador deste trabalho e a professora regente das três turmas[11]. No total participaram 73 estudantes do 3º ano do ensino médio noturno. As sequências de atividades (apresentação e cartilha) desenvolvidas com esses estudantes, também foram aplicadas à uma turma de 15 acadêmicos do 1º semestre de licenciatura em Matemática. Ao término da aplicação, os acadêmicos descreveram uma análise das atividades. Foi avaliado apenas o desempenho dos estudantes do ensino médio, de forma quantitativa, com a aplicação de uma avaliação diagnóstica (pré-testes e pós-testes) e sobre esses, uma análise qualitativa.

[11] Nas duas primeiras semanas de investigação haviam três turmas, porém com o processo de enturmação a comando da Secretaria de Educação do Estado de Santa Catarina, no início do mês de maio de 2013, foram reduzidas à duas turmas com média de 36 estudantes em cada.

A validação das atividades do produto educacional ocorreu em meados do mês de abril até o término do mês de maio do ano de 2013. Classificada a pesquisa como qualitativa, foi utilizada a metodologia de pesquisa participante, por contar com a participação ativa dos estudantes no processo investigativo e do pesquisador como sujeito participante dessa investigação, no intuito de melhorar a prática. Para Brandão (1999, p. 13, grifos do autor) a

> [...] relação de participação da prática científica no trabalho político das classes populares desafia o pesquisador a ver e compreender tais classes, seus sujeitos e seus mundos, tanto através de suas pessoas nominadas, quanto a partir de um trabalho social e político *de classe* que, constituindo a razão da prática, constitui igualmente a razão da pesquisa.

A denominação de pesquisa participante para Gianotten e Wit (1999, p. 168) consiste em uma investigação na qual há um trabalho orgânico "[...]de assessoria para que a investigação se converta em uma investigação orgânica; em outras palavras, quando a participação se situa no processo orgânico de produção de conhecimentos, no qual o conhecimento popular espontâneo transforma-se em conhecimento popular orgânico (conhecimento científico)."

A investigação ocorreu de acordo com os princípios éticos de confidencialidade e em respeito aos estudantes participantes. A equipe gestora da escola concordou com a realização da pesquisa pelo fato de que, os números complexos fazem parte do conteúdo curricular dos estudantes do 3º ano (esse foi o motivo pela qual foram escolhidas turmas do 3º ano) em um período de 30 dias.

Os primeiros passos da investigação foram conhecer as concepções que os estudantes dessa escola de ensino médio possuíam sobre raízes quadradas de números negativos, e assim contextualizar a realização da sequência didática para auxiliar no processo de estudo dos números complexos.

Foi utilizado o mesmo instrumento de avaliação diagnóstica, já descrito no Capítulo 2, sendo que os resultados foram essenciais para que o produto educacional fosse previamente pensado em termos de estratégias. Foi constatada a semelhança nas respostas e nos conhecimentos prévios de raízes quadradas de números negativos entre os estudantes que responderam em 2012 e os que participaram da aplicação das atividades em 2013, apesar de haver diferenças nas frequências das categorias. A avaliação diagnóstica foi utilizada também como instrumento medidor da aprendizagem, sobre números complexos dos estudantes do 3º ano, aplicadas no início e no fim da investigação.

Para realizar a pesquisa na escola de ensino médio, foi necessário conhecer como funcionava o ambiente escolar em detalhes, ou seja, conhecer os recursos, os materiais didáticos, acompanhar as aulas da professora regente para manter contatos com os estudantes e a rotina dos professores e funcionários dentro da escola. Neste período inicial, que durou duas semanas, também foram realizados alguns procedimentos, como a aplicação da avaliação diagnóstica, a apresentação inicial do tema em formato de arquivo PowerPoint, diálogo com os estudantes sobre o objeto de estudo e a revisão de potenciação, raízes quadradas e equações do 2º grau. Esses procedimentos foram essenciais para que o pesquisador dessa investigação fosse percebido como professor de Matemática (sujeito participante) e colaborou nas observações iniciais que os estudantes manifestaram sobre o aparecimento de raízes quadradas de números negativos, e na organização dos procedimentos posteriores. Durante as aulas, o papel do professor como pesquisador estava "[...] em gerenciar, de facilitar o processo de aprendizagem e, naturalmente, de interagir com o aluno na produção e crítica de novos conhecimentos, e isso é essencialmente o que justifica a pesquisa." (D'AMBROSIO, 1997, p. 80).

Com o acompanhamento da professora regente, a sequência de atividades foi aplicada pelo professor pesquisador e participante. O papel dos dois professores foi de cooperação, onde o professor pesquisador coordenava os trabalhos e a professora regente auxiliava no que era necessário, principalmente nas dúvidas e nos registros de observações dos estudantes. Dessa forma, atendia-se um grande número de estudantes quanto às dúvidas e aproveitava-se melhor o tempo. Foi dedicado mais tempo às aulas iniciais e na mudança da forma algébrica para a geométrica dos números complexos. Foram trabalhadas 11 atividades, e dessa forma, obteve-se o registro dos estudantes em relação aos erros e às dúvidas na compreensão de números complexos. Os acadêmicos de Matemática também tiveram oportunidade de ver a apresentação inicial do tema em arquivo do PowerPoint e resolverem as atividades. Eles fizeram suas contribuições com uma análise descritiva, que auxiliou na modelação do produto educacional.

Em relação ao perfil das turmas de ensino médio estavam estudantes entre 17 a 20 anos de idade. Muitos deles trabalhavam no período diurno em empresas e comércios próximos à escola e outros ajudavam nas atividades de renda familiar. Alguns frequentavam cursos profissionalizantes e técnicos. Em consulta prévia com a professora regente, obteve-se a informação de que havia um baixo índice de evasão escolar e de faltas desde o início do ano letivo. Os estudantes sentavam-se em pares, o que facilitava a troca de ideias e discussão das dúvidas que surgiam.

Entendendo que a avaliação também fez parte do processo investigativo, ao final da realização, as participações e atividades realizadas por cada estudante do ensino básico, foram registradas, gerando uma nota quantitativa sobre as mesmas.

Os instrumentos de coleta de dados utilizados foram: caderno de anotações, fotos e registros dos estudantes nas cartilhas de atividades. Os estudantes foram orientados sobre as cartilhas de atividades que, além de respostas, podiam registrar suas dúvidas e indagações quanto ao tema números complexos.

4.4 DIFICULDADES ENCONTRADAS NA APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

A maior dificuldade da pesquisa estava em aproveitar o tempo com os estudantes participantes, sem se aprofundar em questões de caráter operatório. O tempo de uma aula do ensino noturno é menor em relação à uma aula do ensino diurno. Não foi possível a aplicação de todas as atividades previstas na cartilha e de algumas atividades de aplicação. Cabe ressaltar que as DCN (2013) destacam observações[12] que asseguram a formação dos estudantes do ensino médio regular noturno, entre elas a ampliação para mais de três anos garantindo o mínimo total de 2.400 horas de curso. A ocorrência de conselhos de classes, reuniões pedagógicas e apresentações culturais e artísticas nos horários de aula afetaram o período de 30 dias programados. Por esse motivo, a aplicação da sequência esteve limitada à algumas explorações pretendidas, como a de representar a radiciação de números complexos na forma de polígonos regulares e a sua relação com a fórmula de De Moivre. A Parte 4 do produto educacional que orienta ao uso e manuseio de planilhas eletrônicas e do software *Fractint* na construção de fractais, foi planejada para ser aplicada ao final das atividades da Parte 3 do produto educacional. Porém, a proposta não ocorreu, pela escassez do tempo. Por esse motivo, foi apresentado apenas o software e alguns exemplos na turma 3º ano 1, quando ocorreu a última aula com os mesmos.

Descreve-se a seguir a análise realizada de cada atividade, a começar com a apresentação inicial do tema.

---

[12] Ver *Formas de oferta e de organização do ensino médio - IV* (BRASIL, 2013, p. 188-189).

4.5 ANÁLISE DOS DADOS OBTIDOS COM A SEQUÊNCIA DO PRODUTO EDUCACIONAL

O produto educacional está disponível no site: https://sites.google.com/site/julianoeli/

Ele está dividido em seis partes contendo instruções (considerações didáticas) ao professor. A seguir são analisadas as aplicações da Parte 2 e Parte 3 que ocorreram na escola participante e as observações dos estudantes que apreciaram os fractais, colaborando na construção da Parte 4. A Parte 5 e a Parte 6 não foram aplicadas na escola participante. A Parte 1 foi utilizada como pré-teste e pós-teste e o relato da aplicação se encontra no subtítulo 4.6 dessa desta dissertação.

Parte 2 - Apresentação inicial: Arquivo de apresentação em PowerPoint:

Este arquivo compõe a parte introdutória do produto educacional e apresenta a história da raiz quadrada de um número negativo e suas aplicações. Ele se encontra nos formatos PowerPoint 2010 (.ppsx) e BrOffice.org Impress 3.1 (.odp), podendo ser acessado na Parte 2 do site na qual se encontra o produto educacional.

Análise do arquivo de apresentação inicial:

A apresentação inicia com duas indagações que foram denominadas de Desafio 1 e Desafio 2, para que os estudantes refletissem sobre as mesmas: 1 - Existe um número que elevado à potência quadrada dê resultado negativo? 2 - Existe a raiz quadrada de um número negativo? A consulta à avaliação diagnóstica realizada no Capítulo 2 e, também aplicada no início da pesquisa com as referentes turmas do 3º ano, mostra que as respostas dos estudantes variam em relação ao aparecimento da raiz quadrada de um número negativo. Por esse motivo, as provocações proporcionam o início do estudo através das hipóteses dos estudantes e a apresentação conduziu à uma revisão das regras de sinais, potências quadradas, raízes quadradas e equações do segundo grau. O objetivo estava em esclarecer concepções matemáticas que não eram óbvias para os estudantes. A apresentação em arquivo situou os estudantes na dimensão da proposta de aprendizagem e da construção histórica desse saber.

O tempo utilizado para essa apresentação foi de duas aulas de 40 minutos em cada turma. Os estudantes expressaram suas dúvidas, ainda que de forma muito tímida quanto às operações que apareciam. Durante a apresentação inicial, uma estudante da turma 3, havia percebido que: "-1 sempre fica na resposta da simplificação.", se referindo a $\sqrt{-1}$ como o valor presente na simplificação de raízes quadradas de números negativos. Ao apresentar as aplicações mostraram-se encantados com as figuras fractais. A estudante *J* da turma 2 perguntou: "Por que eles usam contas para fazer figuras?" A pergunta foi respondida no sentido de explicar como são usados os cálculos e operações na geração de fractais, ou seja, foi necessário explicar que a figura é resultado de uma iteração (repetição contínua das imagens a partir de um valor inicial) de um certo tipo de função. Não ficou clara a explicação para eles e o estudante *A* perguntou: "Que tipo de função é usada para fazer um fractal?" Foi necessário explicar que no caso dos fractais apresentados, de Mandelbrot e de Julia, utiliza-se a função quadrática $x \rightarrow x^2 + c$ sob algumas condições de obtê-los no plano complexo, com a utilização de muitos valores (pontos), onde o uso de computadores facilita e agiliza o cálculo. Outro estudante C, questionou: "Qual área utiliza os fractais?" Foi respondido que alguns exemplos estão nas semelhanças de imagens encontradas na natureza, que podem ser construídas com o auxílio de computadores, como por exemplo, folhas de samambaias, couves-flores, fungos, etc., havendo uma intensa ligação com estudos de botânica. A Figura 20 registrou o momento da apresentação dos complexos em aplicações com a turma 2.

Figura 20 – Apresentação das aplicações dos números complexos

Foi percebido o interesse dos estudantes pelos fractais, o que motivou a busca de mais informações sobre o tema e a sua relação com os números complexos. Na turma 1 também houve uma pergunta sobre fractais proferida por um estudante denominado B: "Como se faz um fractal?." O tema realmente despertou interesse dos estudantes. Para Baier (2005), o tema fractais é classificado como um conteúdo matemático contemporâneo, já para D'Ambrosio (1997) o tema faz parte da matemática do futuro. A apresentação do conjunto de Mandelbrot na turma 1 está registrada na Figura 21.

Figura 21 – Apresentação do conjunto de Mandelbrot

A turma de acadêmicos de Matemática observou atentamente a apresentação e nas discussões que ocorreram, disseram que não tinham conhecimento sobre a dimensão histórica e das aplicações dos números complexos. De certo modo, as respostas sobre a raiz quadrada de um número negativo estavam justificadas pela regra de sinais e dessa forma responderam que *não existe dentro do conjunto dos reais*.

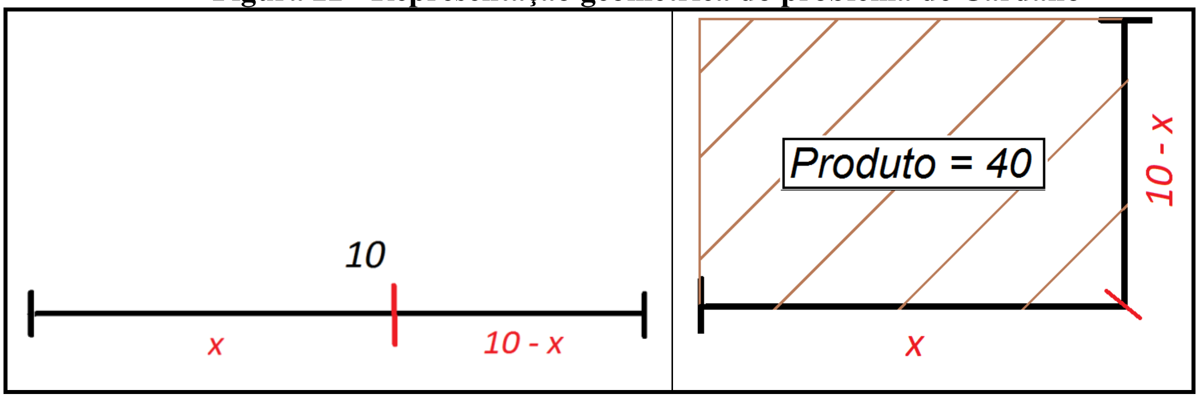
Parte 3 - Sequência de atividades:

No início da sequência de atividades com os estudantes do ensino médio, as três turmas passaram a compor somente duas devido ao processo de reorganização de turmas. Duas variáveis decorrentes dessa mudança foram observadas: a ressocialização entre os estudantes que vieram da turma 3 e foram para as turmas 1 e 2; e o aumento no número de estudantes por sala, onde passou de vinte e cinco para quase quarenta, diminuindo o espaço físico. Essas mudanças fizeram com que a sequência de atividades fosse iniciada cautelosamente a fim de que a socialização entre os jovens e os estudos sobre números complexos não fossem prejudicados.

Atividade 1:

Um problema clássico é apresentado na história da matemática: *Divida 10 em duas partes tal que o produto dessas partes seja 40.*

Figura 22 - Representação geométrica do problema de Cardano



Complete o quadro abaixo, conforme a primeira linha e faça a verificação com os números reais atribuídos na coluna do x.

Soma: Verifique se a soma é igual a 10				Produto: Verifique se o produto é igual a 40			
x	Somado com	$10 - x$	Resultado	x	Multiplicado por	$10 - x$	Resultado
9	+	1	= 10, ok!	9	×	1	= 9, não!
8	+			8	×		
7	+			7	×		
6	+			6	×		
5	+			5	×		
4 (repete)	+			4	×		

Analisando o quadro acima, responda:

a) Esse problema possui solução no conjunto dos números reais? Justifique sua resposta.

___

___

___

A solução desse problema foi publicada pela primeira vez no livro *Ars Magna* (1545), por Girolamo Cardano (1501-1576). Ele apresenta a resposta que envolve raízes quadradas de números negativos, conhecidos hoje como *Números Complexos*: $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ e considera esses resultados como *números sofísticos*, tratando-os de *tão sutil quanto inútil*. (BOYER, 1996; MILIES, 1994).

b) Faça a verificação da solução de Cardano, e confira se a soma de 5 + $\sqrt{-15}$ com 5 - $\sqrt{-15}$ é igual a 10 e se o produto dos mesmos é igual a 40.

Soma horizontal: (5 + $\sqrt{-15}$) + (5 - $\sqrt{-15}$) = ______________________________________

____

____

Soma vertical: Você também pode utilizar o quadro abaixo que separa a parte real da parte imaginária, para efetuar a mesma soma.

	Parte Real	Parte imaginária
	5	+ $\sqrt{-15}$
+	5	- $\sqrt{-15}$

Produto horizontal: A ser resolvido pela propriedade distributiva:(5 + $\sqrt{-15}$) × (5 - $\sqrt{-15}$)

____

____

____

Produto vertical: Utilize também o quadro abaixo para resolver a mesma multiplicação:

	Parte Real	Parte Imaginária
	5	+ $\sqrt{-15}$
×	5	- $\sqrt{-15}$

Analisando a resolução acima, responda:

c) Você conseguiu verificar se a resposta apresentada por Cardano estava correta? Justifique se a utilização de números complexos é uma resposta válida para esse problema.

____

____

____

Atividade 2:

A aceitação de raízes quadradas de números negativos é um fato marcante na história da matemática. Para o matemático Leonardo Euler (1707-1783), as respostas envolvendo números complexos, como na atividade anterior (dividir 10 em duas partes de tal forma que o produto seja 40), não eram aceitas para questões que remetessem às situações-problema. Ele operava com muita precisão com os números complexos e mostrava que às vezes, preferia contornar as dificuldades que os envolvessem "[...] alterando os valores numéricos dos problemas." (SILVA, 2009, p.47). Euler tratava os números complexos como "[...] uma espécie de números totalmente particular [...]" (EULER apud SILVA, 2009, p. 46) e contribuiu em reflexões sobre os mesmos, proporcionando avanços nos estudos desse conjunto numérico. Em seu livro *Introdução Completa à Álgebra*, publicado em alemão, no ano de 1770, Euler propôs um problema semelhante aquele resolvido por Cardano: Dividir o número 12 em duas partes, tal que o produto dessas partes fosse 40. Ele chega à solução envolvendo números complexos conjugados: $6 + \sqrt{-4}$ e $6 - \sqrt{-4}$, e mesmo assim conclui que o problema é impossível de ser resolvido. Porém, observa que se a questão fosse dividir 12 em duas partes tal que a multiplicação delas fosse igual a 35, teria como resposta os números reais 7 e 5. (EULER, 1822).

Figura 23 – Representação geométrica do 1º caso do problema de Euler

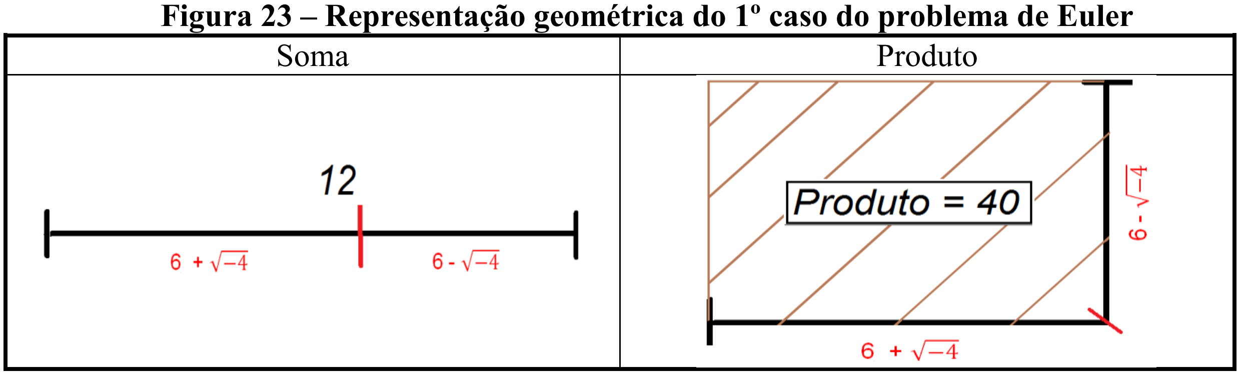
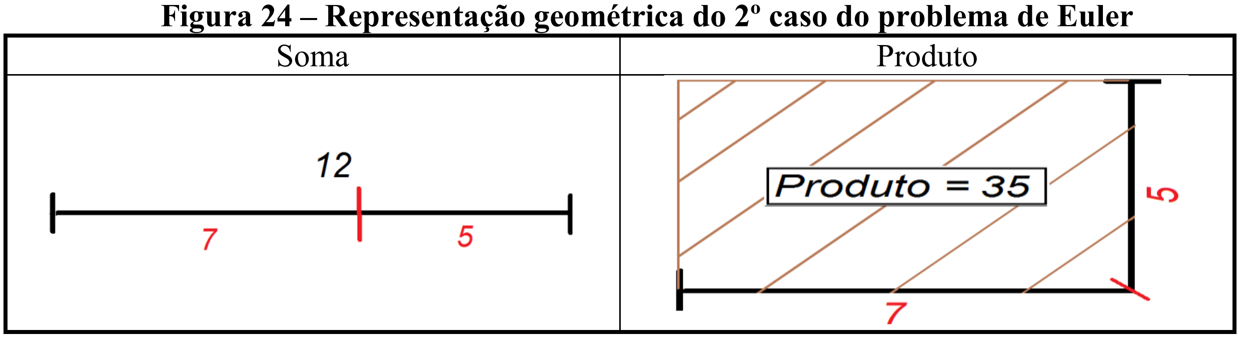


Figura 24 – Representação geométrica do 2º caso do problema de Euler



a) Faça a verificação do primeiro caso, ou seja; 12 separado em duas partes, tal que o produto seja igual a 40. Solução $6 + \sqrt{-4}$ e $6 - \sqrt{-4}$.

Soma horizontal: $(6 + \sqrt{-4}\,) + (6 - \sqrt{-4}) =$ ____

____

____

Soma vertical: Você também pode utilizar a tabela abaixo, que separa a parte real da parte imaginária, para efetuar a mesma soma.

	Parte Real	Parte imaginária
	6	$+\sqrt{-4}$
+	6	$-\sqrt{-4}$

Produto horizontal: A ser resolvido pela propriedade distributiva: $(6 + \sqrt{-4}\,) \times (6 - \sqrt{-4}) =$

____

____

____

Produto vertical: Utilize também a tabela abaixo para resolver a mesma multiplicação:

	Parte Real	Parte Imaginária
	6	$+\sqrt{-4}$
×	6	$-\sqrt{-4}$

b) Apesar de envolver números complexos nas respostas, Euler considerava apenas o 2º caso como possível de solução. Escreva uma justificativa pessoal que possa descrever o pensamento de Euler sobre os números complexos, chamados de *quantidades imaginárias* na sua época.

____

____

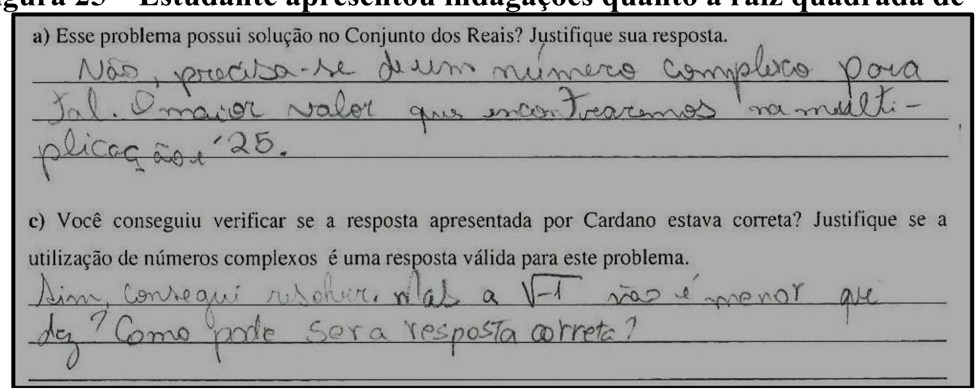
____

Análise da aplicação das atividades 1 e 2:

Participaram 34 estudantes na turma 1, 35 na turma 2 e 12 acadêmicos na turma de Matemática. O tempo de aplicação variou, nas turmas de ensino médio, entre 25 a 30 minutos na primeira atividade e 15 a 20 minutos na segunda atividade. Os estudantes de Matemática resolveram em 15 minutos a primeira e em 10 minutos a segunda atividade.

Na turma 1, após lerem o enunciado e iniciarem a resolução, manifestaram-se confusos quanto ao preenchimento da tabela com os números reais, necessitando da intervenção dos professores para a compreensão. Na verificação com os números complexos, tiveram dúvidas e foi necessário esclarecer as duas maneiras de resolver (horizontal e vertical) a soma e produto. Muitos estudantes optaram por resolver apenas por um método. Mas a maior dúvida estava no produto, principalmente na propriedade distributiva. As respostas descritivas (1a, 1c) mostraram as reflexões dos estudantes quanto ao uso de raízes quadradas de números negativos, como mostra a Figura 25.

Figura 25 – Estudante apresentou indagações quanto à raiz quadrada de – 1



a) Esse problema possui solução no Conjunto dos Reais? Justifique sua resposta.

Não, precisa-se de um número complexo para tal. O maior valor que encontraremos na multiplicação é 25.

c) Você conseguiu verificar se a resposta apresentada por Cardano estava correta? Justifique se a utilização de números complexos é uma resposta válida para este problema.

Sim, consegui resolver, mas a $\sqrt{-1}$ não é menor que dez? Como pode ser a resposta correta?

A experiência na aplicação das atividades com a turma 1 proporcionou estratégias para sanar as dúvidas e interpretações confusas na turma 2. Muitos perguntavam se era necessário fazer pelos dois métodos (horizontal e vertical) sabendo que pelos dois, chegariam ao mesmo resultado. Os estudantes foram autônomos nas resoluções das atividades e objetivos nas respostas como mostra a Figura 26.

Na turma de Matemática, os acadêmicos optaram por fazer as leituras das atividades individualmente, sem ajuda do professor. Eles assimilaram bem o que foi discutido na apresentação inicial do arquivo em PowerPoint, sobre conceitos importantes, que facilitaram a resolução dessas atividades. Foram identificadas algumas dúvidas quanto à verificação do produto e por vezes, discutiam entre eles, ou perguntavam ao professor pesquisador.

Figura 26 – Estudante justificou a solução para o problema de Cardano

Soma: Verifique se a soma é igual a 10				Produto: Verifique se o produto é igual a 40			
x	Somado com	$10-x$	Resultado	x	Multiplicado por	$10-x$	Resultado
9	+	1	= 10, ok!	9	X	1	= 9, não!
8	+	2	=10	8	X	2	16
7	+	3	=10	7	X	3	21
6	+	4	=10	6	X	4	24
5	+	5	=10	5	X	5	25
4 (repete)	+	6	=10	4	X	6	24

Analisando a tabela, responda:

a) Esse problema possui solução no Conjunto dos Reais? Justifique sua resposta.

Não, pois todo número que somado com outro, para ser igual a dez, deve ser inferior a dez e o seu complemento deve ser a distância entre ele e o dez: (ex: 6 + 4 = 10 → 24) mas o produto deriva do da multiplicação entre os dois jamais será 40, sendo os dois reais

1

Na atividade 2 os estudantes perceberam a analogia da mesma com a primeira e seguiram o mesmo processo de resolução, discutindo com os seus pares as dificuldades quando surgiam. Percebe-se que os estudantes tendem a dar respostas curtas e objetivas às atividades descritivas, como mostra a Figura 27 da atividade 2 b.

Figura 27– Estudante justificou a resposta de Euler como rejeição ao uso dos complexos

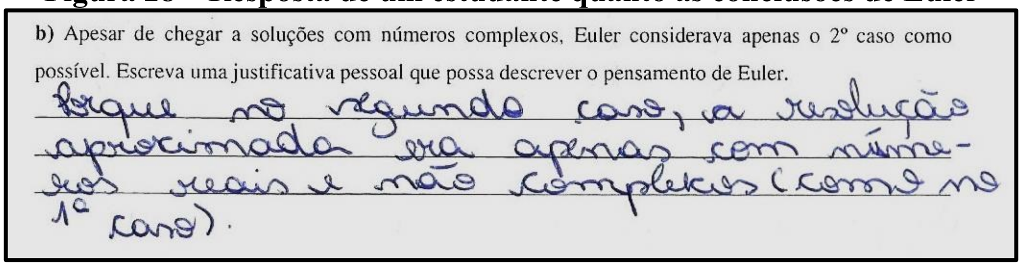
b) Apesar de chegar a soluções com números complexos, Euler considerava apenas o 2° caso como possível. Escreva uma justificativa pessoal que possa descrever o pensamento de Euler.

É que ele Regeitava os números complexos.

As atividades proporcionaram cálculos com a unidade imaginária, em que o quadrado dos números imaginários $\left(\sqrt{-15}\right)^2 = -15$ e $\left(\sqrt{-4}\right)^2 = -4$ geram números reais negativos. Os estudantes estavam acostumados com os números reais, onde todo número elevado ao quadrado é positivo. Dessa forma, para que não houvesse conflitos, foi necessário renegociar essa última afirmação.

Observa-se que as atividades provocaram reflexões nos estudantes quanto ao uso de raízes quadradas de números negativos, como mostra a resposta de um estudante na Figura 28, atividade 2b.

Figura 28 – Resposta de um estudante quanto às conclusões de Euler

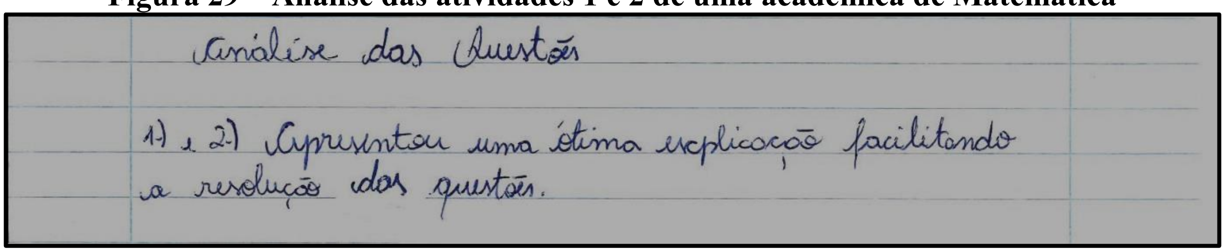


b) Apesar de chegar a soluções com números complexos, Euler considerava apenas o 2º caso como possível. Escreva uma justificativa pessoal que possa descrever o pensamento de Euler.

Porque no segundo caso, a resolução aproximada era apenas com números reais e não complexos (como no 1º caso).

Segundo a análise descritiva de uma acadêmica de Matemática na Figura 29, as atividades propostas de forma sucinta facilitaram as resoluções.

Figura 29 – Análise das atividades 1 e 2 de uma acadêmica de Matemática



Análise das Questões

1) e 2) Apresentou uma ótima explicação facilitando a resolução das questões.

Para melhorar as atividades, constatou-se a necessidade de modificar a sequência de verificação da soma e produto de números complexos no produto educacional. Também foi necessário ajustar a tabela da atividade número um, incluindo a realização do gráfico da função $y = f(x) = x(10-x)$. Foi necessária a intervenção do professor na verificação das potências $\left(\sqrt{-15}\right)^2$ e $\left(\sqrt{-4}\right)^2$, onde o quadrado de um número imaginário puro torna-se um número real.

Atividade 3:

Os números complexos $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 5 + 2i$ e $z_3 = 2 + 6i$, em que i é a unidade imaginária, representados geometricamente no plano de Argand-Gauss, definem, respectivamente, o triângulo retângulo ABC. Calcule a área desse triângulo em unidades de área.

(Questão adaptada de Smole e Diniz, 2010, p. 245, Cefet- MG)

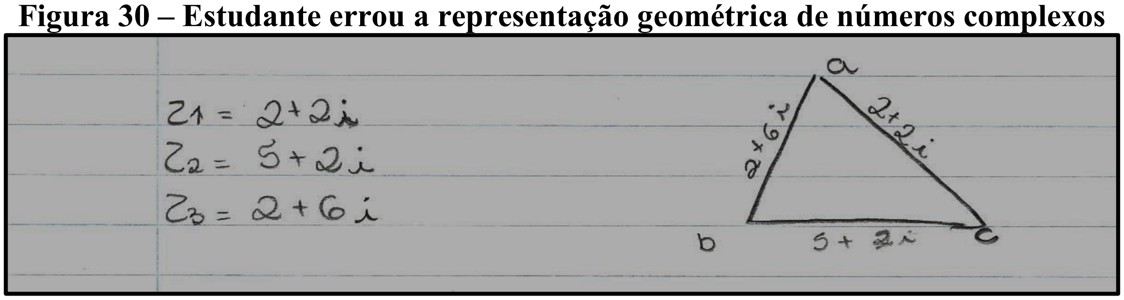
Análise da aplicação da atividade 3:

Esta atividade, assim como as atividades 4 e 5, podem ser representadas geometricamente no plano cartesiano ($\mathbb{R}^2$) sem a necessidade de envolver os números complexos nas suas resoluções. Porém, enfatizou-se a utilização do plano complexo, a fim de que os estudantes pudessem verificar as diferenças e semelhanças com o plano cartesiano.

Participaram 34 estudantes da turma 1, 35 estudantes da turma 2 e 12 acadêmicos da turma de Matemática. O tempo com essa atividade variou de 7 a 10 minutos entre as turmas.

Alguns acadêmicos de Matemática não estavam acostumados com a representação geométrica dos números complexos no plano de Argand-Gauss, e foram orientados que essa atividade era análoga à representação de pontos (a, b) no plano cartesiano. A mesma orientação foi passada aos estudantes do ensino médio que conseguiram trabalhar com o plano complexo. Destaca-se que os estudantes da turma 1 mostravam apreço pela geometria. A ocorrência de erros nessa atividade foi semelhante entre vários estudantes com dúvidas, como mostra a resposta de um estudante da turma 2 na Figura 30.

Figura 30 – Estudante errou a representação geométrica de números complexos



Essa observação fez com que fosse refletida a prática proposta, sendo retomada e discutida a atividade, considerando os erros como fundamentais no processo de esclarecimento das primeiras ideias dos estudantes sobre a representação geométrica dos complexos. Os acadêmicos de Matemática precisaram de mais tempo para associar a mudança de quadro do número complexo, ao sair da sua forma a+ bi para a forma (a, b) no plano complexo.

Atividade 4:

É comum, em física, estudar o centro de massa de um corpo, aproximadamente plano, considerando-o contido no plano de Argand-Gauss. Dessa forma, define-se o centro de massa de um conjunto de pontos materiais de massas m_1, m_2, m_3 localizadas, respectivamente, nas imagens dos números complexos z_1, z_2 e z_3 como a imagem do número complexo z dado por:

$$z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

De acordo com essa ideia, considerando três pontos materiais de massas 2kg, 3kg e 5kg localizados no plano de Argand-Gauss, nos afixos dos complexos $z_1 = 6 + 3i$, $z_2 = -2 + 4i$ e $z_3 = 6i$, determine o centro de massa desse conjunto de pontos.

(*Nota:* O **centro de massa** de um corpo é o ponto onde se considera concentrada toda a massa do corpo, para simplificação de cálculos.)

(Questão nº 26 de PAIVA, M., 2009, p. 146)

Atividade 5:

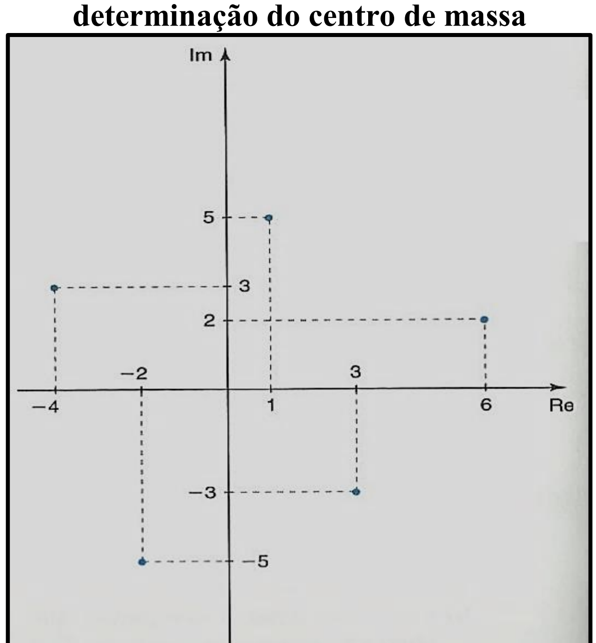
A definição de centro de massa z, apresentada no exercício anterior, é estendida para qualquer número n de pontos materiais, com $n \in \mathbb{N}^*$, de massas $m_1, m_2, m_3, ..., m_n$ localizados, respectivamente, em n pontos do plano complexo, imagens $z_1, z_2, z_3, ..., z_n$, isto é:

$$z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \cdots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}$$

De acordo com essa ideia, considere cinco pontos materiais, de mesma massa m, localizados nas posições indicadas no plano complexo abaixo. Determine o número complexo que representa o centro de massa do sistema constituído por esses cinco pontos materiais.

Fonte: PAIVA (2009, p. 146)

Figura 31 - Representação geométrica dos pontos para determinação do centro de massa



(Questão nº 27 de PAIVA, M., 2009, p. 146)

Análise da aplicação das atividades 4 e 5:

Participaram desta atividade, 33 estudantes em cada turma do ensino médio. Os estudantes foram informados que o tempo necessário para a realização das atividades é uma variável importante, e não pode ser desperdiçada com o excesso de conversas. Sendo assim, ganhariam mais nas discussões das atividades e das dúvidas pertinentes. Por isso, foi negociado e combinado um tempo hábil para os estudantes resolverem cada questão. O tempo das atividades em negociação foi um passo importante para manter a boa relação entre o professor pesquisador e os estudantes (BRASIL, 2008). O objetivo desta estratégia não estava em pressioná-los, mas no fato de evitar o uso do tempo em conversas paralelas. O comprometimento dos estudantes com o tempo nas atividades constituiu um fator que colaborou no processo investigativo. Existindo as dúvidas, não haveria problema em estender o tempo.

O tempo médio de resolução de cada atividade foi de 15 minutos. Após a leitura, poucos estudantes entenderam que os problemas necessitavam da fórmula expressa nas atividades. Por isso, foram orientados que se tratava de uma aplicação dos números complexos na mecânica, parte que compõe a física. As atividades têm como objetivo encontrar um ponto de equilíbrio de massa no plano de Argand-Gauss, e para entenderem melhor a situação, foi necessário associar esses problemas a um exemplo prático, como o uso de bandejas planas no equilíbrio de copos. As dúvidas dos estudantes persistiam na multiplicação do número real pelo número complexo, onde muitos questionavam se deveria ser aplicada a propriedade distributiva. Novamente foram orientados a somarem as partes reais com as partes reais e o mesmo com as partes imaginárias. Também perguntaram se a resposta final deveria ser escrita na forma de fração ou de número decimal. Foram orientados que para a localização geométrica convém deixar na forma decimal.

Na atividade 5, os estudantes perceberam que precisavam dos números complexos na forma algébrica, tendo que localizá-los inicialmente no plano complexo. Ao questionarem sobre a massa ser comum para todos os pontos sem informações de valores, foi levantada outra questão: o que poderia ser feito nesse caso? Concluíram que poderia ser atribuído um valor. Essa ideia levou alguns a utilizarem um valor baixo, ou seja, adotaram a massa igual a um quilograma. Outros questionaram se poderiam utilizar uma letra (variável). Foram orientados que sim, porém nenhum estudante utilizou, pois preferiram trabalhar com números reais. Um acadêmico de matemática descreveu que essa informação deveria constar no enunciado da atividade, como mostra a Figura 32.

Figura 32 – Acadêmica de Matemática sugeriu indicar o valor da massa na atividade 5

A definição de centro de massa z, apresentada no exercício anterior, é estendida para qualquer número n de pontos materiais, com $n \in \mathbb{N}^*$, de massas $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ localizados, respectivamente, em n pontos do plano complexo, imagens $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$, isto é:

$$z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \cdots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}$$

Poderia ser mencionado que a massa pode ser de qualquer valor.

Os acadêmicos de Matemática, ao lerem a atividade 4, mostraram dúvidas em relação à multiplicação do número real pelo complexo, e foram informados que deveriam fazer a multiplicação distributiva. Alguns acadêmicos não lembravam mais, e reduziram em um único termo, a parte real com a parte imaginária, pelo fato de associarem a soma de frações com denominadores iguais. Esse fato foi rediscutido com o grupo. Essa ocorrência foi similar nas turmas de ensino médio, como mostra a Figura 33, referente à atividade 5.

Figura 33 – Estudante somou a parte real com a parte imaginária na atividade 5

$$z = \frac{m1 \cdot z1 + m2 \cdot z2 + m3 \cdot z3 + m4 \cdot z4 + m5 \cdot z5}{m1 + m2 + m3 + m4 + m5}$$

$$z = \frac{1.(6+2i) + 1.(1+5i) + 1.(-4+3i) + 1.(-2-5i) + 1.(3-3i)}{1+1+1+1+1}$$

$$z = \frac{6+2i+1+5i-4+3i+2-5i+3-3i}{5}$$

$$z = \frac{4+2i}{5}$$

$$z = \frac{4}{5} + \frac{2i}{5} = 0{,}8 + 0{,}4i = 1{,}2$$

Na análise dos acadêmicos de Matemática, os dois problemas são interessantes, pois envolvem a física.

Sem constar no enunciado do problema, alguns estudantes fizeram a representação geométrica dos pontos na atividade 4, como mostra a Figura 34. Foi modificado o enunciado da atividade no produto educacional, sendo solicitada a representação geométrica após a resolução.

Nota-se que alguns estudantes utilizaram o processo operatório de soma vertical das atividades 1 e 2, como mostra a Figura 35.

Figura 34 – Estudante representou geometricamente a atividade 4

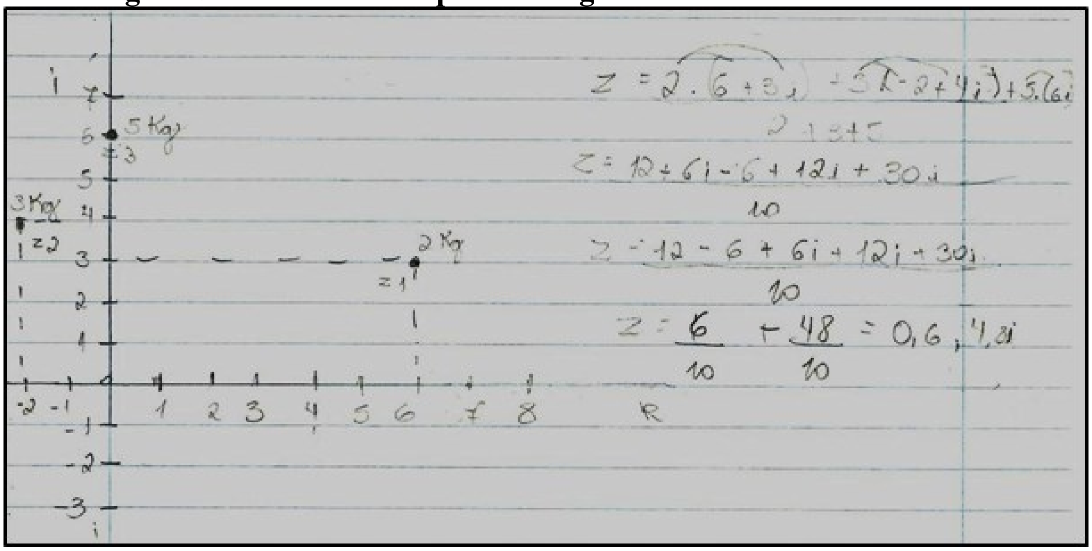
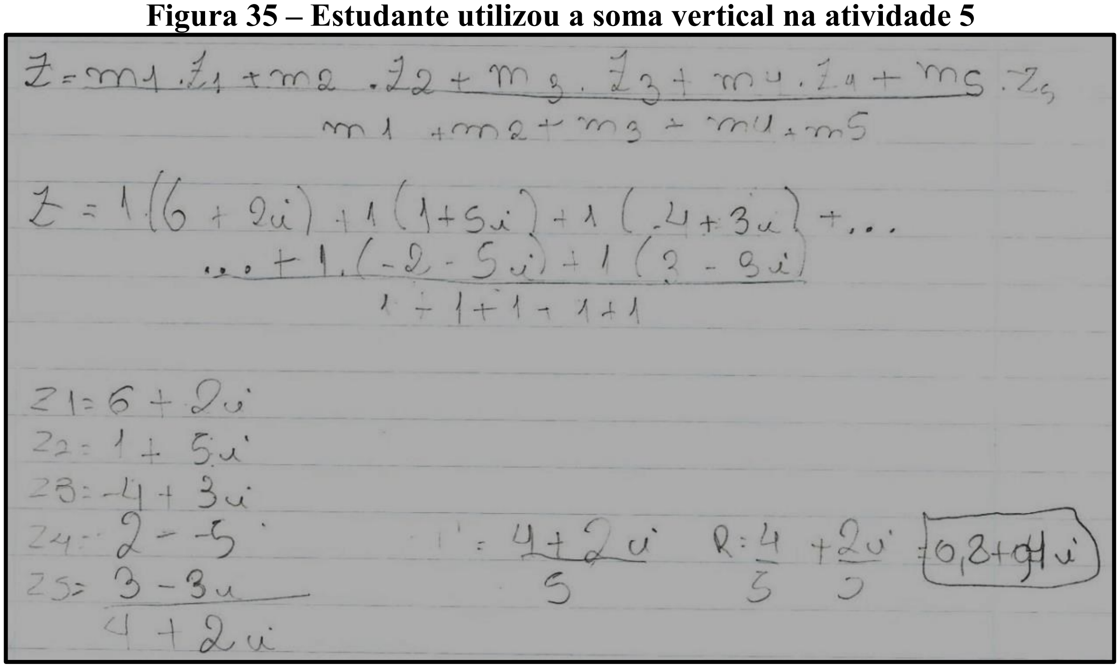


Figura 35 – Estudante utilizou a soma vertical na atividade 5



Atividade 6:

João desenhou um mapa no quintal de sua casa, onde enterrou um cofre. Para isso, usou o plano complexo de Argand-Gauss. Nesse sistema, cada ponto (x, y) representa um número complexo z = x + yi, em que x e y $\in$ IR e $i^2 = -1$. Para indicar a posição do cofre (x_1, y_1), João escreveu a seguinte observação no canto do mapa: $x_1 + iy_1 = (1 + i)^3$. Calcule:

a) as coordenadas de (x_1, y_1);

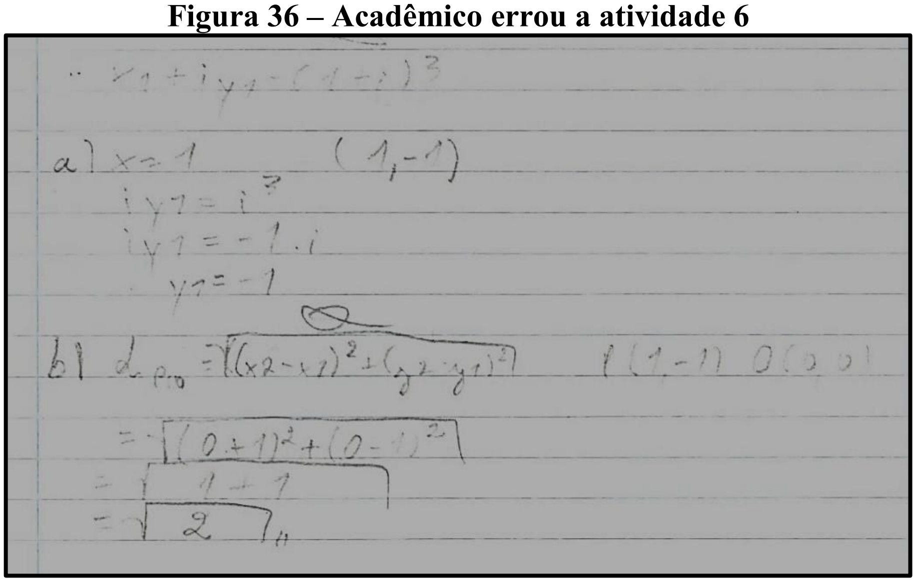
b) A distância do cofre em relação à origem do plano de Argand-Gauss, e a representação geométrica nesse plano.

(Questão nº16 adaptada de IEZZI et al; 2010, p. 158 – UE-RJ)

Análise da aplicação da atividade 6:

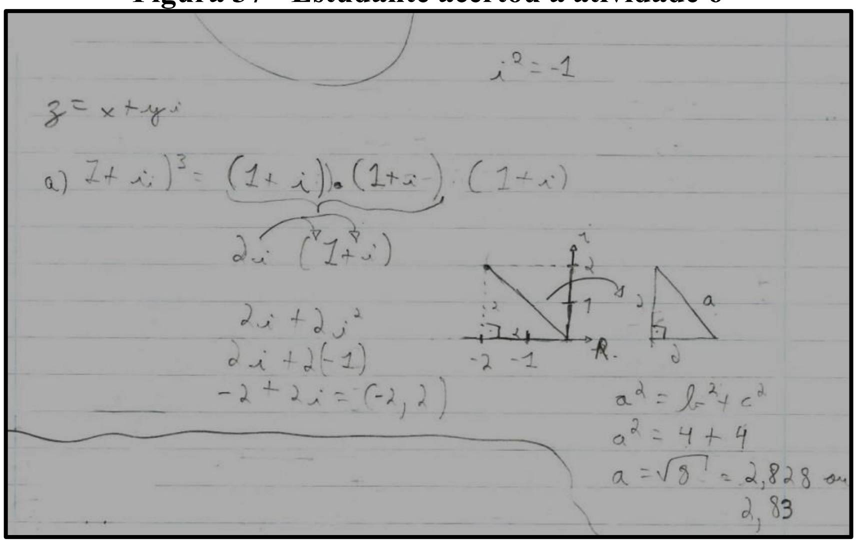
Participaram desta atividade 29 estudantes da turma 1, 33 estudantes da turma 2 e 15 acadêmicos de matemática. Resolveram em um tempo médio de 10 a 15 minutos. Até o momento da realização dessa atividade, os estudantes não haviam resolvido nenhum tipo de potenciação de complexos do tipo $(a + bi)^n$. Na turma 1 foi deixado como tarefa a expressão $(1 + i)^2$, pois a mesma ajudaria na resolução do problema proposto. Os erros nessa tarefa foram os mais diversos, desde a soma do quadrado de dois termos à regra de sinais, semelhantes à resposta de um acadêmico de matemática que consta na Figura 36.

Figura 36 – Acadêmico errou a atividade 6



Foi solicitado a um estudante que lesse novamente para a turma. Precisaram de esclarecimentos para entender que o ponto $x_1 + iy_1$ se tratava do desenvolvimento de $(1 + i)^3$. Em relação à localização geométrica e a distância até a origem, não apresentaram problemas de compreensão. A turma 2 necessitou de ajuda no desenvolvimento de $(1 + i)^3 = (1 + i). (1 + i). (1 + i)$. Sem constar na atividade, os acadêmicos de Matemática questionaram como determinar o ângulo (argumento) do ponto (x_1, y_1). Muitos não perceberam que poderiam trocar $i^2 = -1$ no desenvolvimento da potência e preferiram substituir o valor no final. Dois acadêmicos acharam difícil a interpretação da atividade. Na Figura 37 há a resolução de um estudante que a resolveu corretamente.

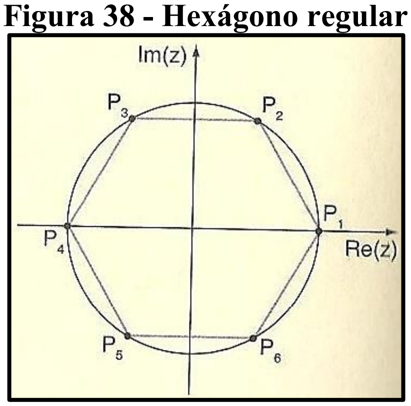
Figura 37 - Estudante acertou a atividade 6



Atividade 7:

A Figura 38 apresenta, no plano complexo, um hexágono regular inscrito em uma circunferência cujo raio mede 4. Determine o argumento principal dos complexos z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 e z_6, cujas respectivas imagens são os vértices P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6.

Figura 38 - Hexágono regular



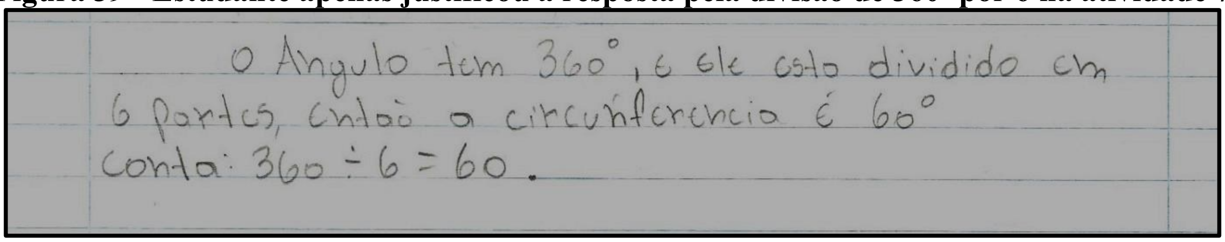
Fonte: IEZZI et al (2010, p. 142)

(Questão nº 59 de IEZZI et al; 2010, p. 142)

Análise da aplicação da atividade 7:

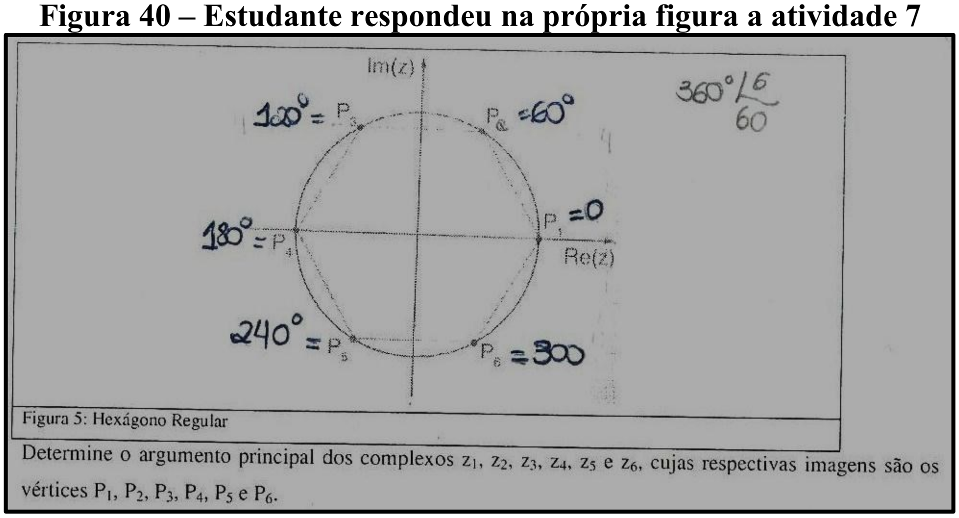
Participaram 29 estudantes na turma 1, 33 estudantes na turma 2 e 15 acadêmicos na turma de Matemática. O tempo médio desta atividade foi de 10 minutos. Na análise dos acadêmicos a atividade foi de fácil interpretação e ajudou nas atividades seguintes. Foi preciso uma explicação inicial para o conceito de argumento principal. Aproveitando a oportunidade foi explicado o conceito de módulo.

Figura 39 - Estudante apenas justificou a resposta pela divisão de 360º por 6 na atividade 7



Uma estudante da turma 1 disse: *"A pergunta é muito difícil para uma resposta tão fácil."* Entende-se que o enunciado tenha confundido com informações que não fizeram sentido, como informar o raio e enunciar que $z_n = P_n$. Alguns estudantes não entenderam o problema por completo e deram como resposta apenas o ângulo de 60º, resultado da divisão de 360º por 6 pontos como mostra a Figura 39. Na Figura 40 há a resolução de um estudante que registrou sua resposta na própria figura do hexágono, o que pode ter facilitado a sua resolução.

Figura 40 – Estudante respondeu na própria figura a atividade 7

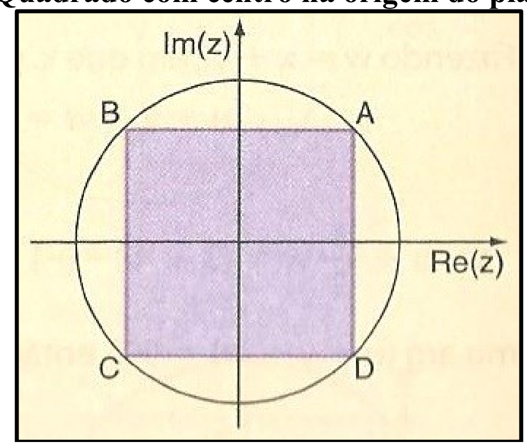


Por haver várias indagações dos estudantes, foi modificado o enunciado da atividade: retirou-se a informação do valor do raio e foi acrescentado que a resolução seja realizada na própria folha impressa, onde consta o desenho do hexágono, para fins de associação geométrica.

Atividade 8:

Sabe-se que a medida do lado do quadrado ABCD é 10. Expresse as medidas dos ângulos dos afixos A, B, C e D (argumentos) e as distâncias desses até a origem (módulos).

Figura 41 - Quadrado com centro na origem do plano complexo



Fonte: IEZZI et al (2010, p. 146)

(Questão nº 67 adaptada de IEZZI et al; 2010, p. 146)

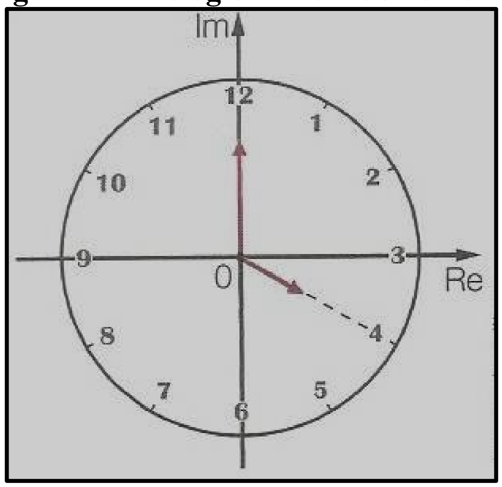
Análise da aplicação da atividade 8:

Participaram 29 estudantes da turma 1, 34 estudantes da turma 2 e 15 acadêmicos de Matemática. Resolveram a atividade no tempo médio de 10 minutos. De modo geral, os estudantes gostaram da realização dessa atividade e alguns disseram que a atividade anterior ajudou na compreensão. Na turma 2, após a correção da atividade 7, foram discutidas novamente as características do módulo e do argumento de um número complexo, pois esses dois parâmetros ajudam na identificação do número complexo no plano. Dois estudantes questionaram: "Por que se somar 315º com 90º, não dá 360º?". Eles estavam assimilando a atividade anterior (nº 7), no qual o último vértice estava sobre o ângulo de 360º. Dessa forma foram orientados a observar na própria figura, onde o primeiro ângulo inicia em 45º e que ao somar 315º + 90º, o resultado será 405º correspondendo ao próprio argumento de A, ou seja, 45º.

Atividade 9:

Observe a representação de um relógio em um plano complexo. Considerando que o comprimento do ponteiro dos minutos seja de 10 cm e o das horas 6 cm, resolva:

Figura 42 - Relógio marcando 16 horas



Fonte: SOUZA (2010, p. 245)

a) Em relação à hora marcada no relógio, determine o número complexo z_1, na forma trigonométrica, cuja representação geométrica corresponde ao ponto extremo do ponteiro das horas. Do mesmo modo, determine z_2 que corresponde ao ponto extremo do ponteiro dos minutos.

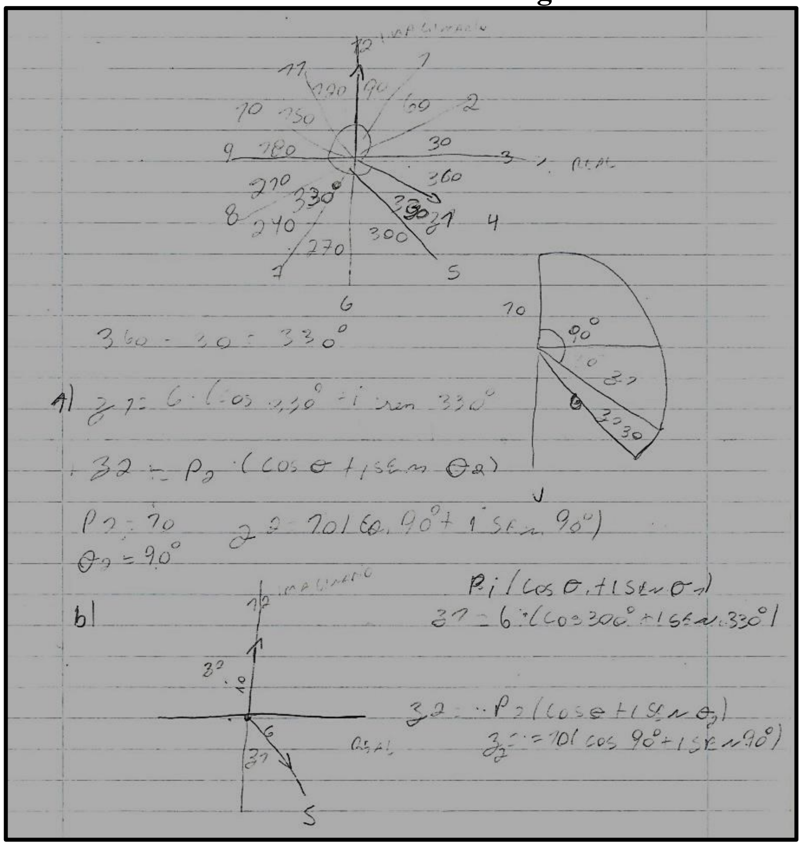
b) Após 60 minutos do horário registrado acima, quais as representações de z_1 e z_2 na forma trigonométrica?

(Questão nº 68 adaptada de SOUZA, J. R., 2010, p. 245)

Análise da aplicação da atividade 9:

Na turma 1, assim como na turma 2, participaram 34 estudantes e 15 acadêmicos na turma de Matemática. O tempo médio da atividade foi de 15 minutos. Por se tratar da primeira atividade na qual utilizaram a forma trigonométrica dos números complexos, foi necessário explicar alguns detalhes, como a necessidade de usar seno e o cosseno na fórmula, o que causou estranheza para alguns estudantes.

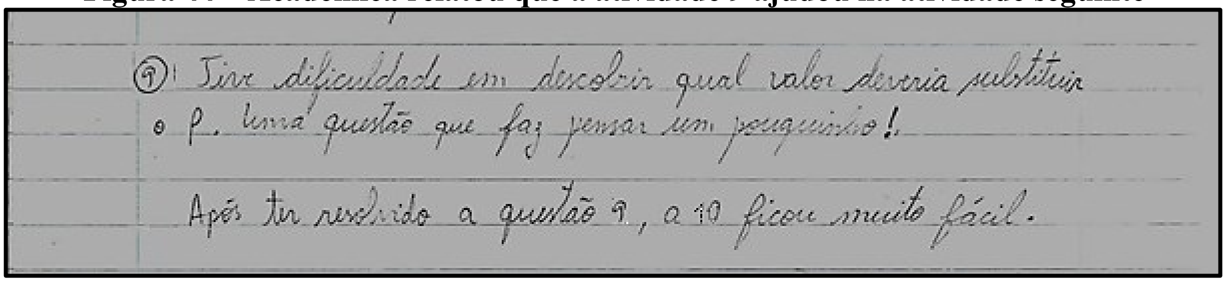
Figura 43 - Estudante dividiu o ciclo do relógio em 12 na atividade 9



Foi questionado às turmas, como podem ser determinados os valores de *a* (real) e *b* (imaginário), neste relógio conhecidos apenas os ângulos e os comprimentos dos ponteiros. Foi sugerido aos estudantes que utilizassem as razões seno e cosseno. Poucos entenderam a sugestão, sendo necessário resolver a questão proposta pelo professor pesquisador, na lousa, e assim esclarecer o uso da forma trigonométrica dos complexos. Muitas dúvidas nesta mudança de representação (forma geométrica para a forma trigonométrica) foram presenciadas, do tipo: "É assim mesmo professor?" Os estudantes compreenderam que na atividade (b) (após 60 minutos), o ponteiro dos minutos continua no mesmo ponto, por isso não muda o módulo e nem o argumento. No ponteiro das horas muda apenas o argumento principal. O procedimento de dividir o ciclo do relógio em intervalos de 30º foi adotado por alguns estudantes como mostra a Figura 43.

A presente atividade contribuiu para o entendimento conceitual de argumento principal e de módulo, bem como na representação de um número complexo na sua forma trigonométrica. Ouvir as dificuldades dos estudantes e perceber seus méritos nas resoluções foi importante para avaliar as atividades aplicadas. A análise que consta na Figura 44 de uma acadêmica de Matemática mostra que a presente atividade colaborou na resolução da atividade 10.

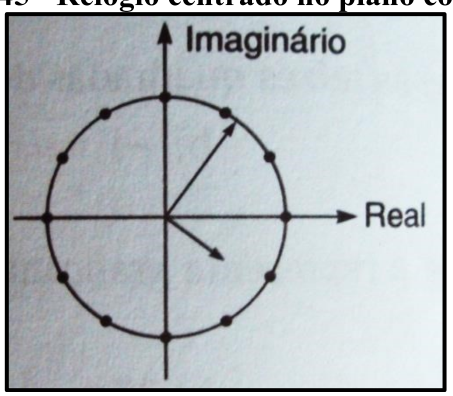
Figura 44 – Acadêmica relatou que a atividade 9 ajudou na atividade seguinte



Atividade 10:

Admita que o centro do plano complexo Argand-Gauss coincida com o centro de um relógio de ponteiros, como indica a Figura 45:

Figura 45 - Relógio centrado no plano complexo



Fonte: GIOVANNI; BONJORNO (2005, p. 162)

Se o ponteiro dos minutos tem 2 unidades de comprimento, às 11 h:55, o ponto extremo deste ponteiro pode ser representado por um número complexo na forma a + bi, ou na forma de par ordenado (a, b). Determine esse número.

(Questão nº 22 adaptada de GIOVANNI e BONJORNO, 2005, p. 162-FGV-SP)

Análise da aplicação da atividade 10:

Na turma 1, assim como na turma 2, participaram 34 estudantes e na turma de Matemática haviam 15 acadêmicos. O tempo médio desta atividade foi de 15 minutos. Os conhecimentos da atividade anterior foram úteis nessa resolução, mas os estudantes não estavam acostumados com a utilização da forma trigonométrica para determinação da forma algébrica. Por isso, como exemplo, foi retomada a atividade anterior para mostrar como pode ser determinada a forma algébrica. Para consultarem os valores de seno e cosseno foi entregue uma tabela trigonométrica. Houveram dúvidas quanto à multiplicação distributiva do módulo, como mostra a Figura 46. Os dois professores envolvidos consideraram mais eficaz atender e discutir as dúvidas das respectivas duplas, pois desta forma, ganhava-se a confiança dos estudantes e podia-se entender melhor suas conjecturas. Alguns estudantes confundiram-se ao reduzir os dois termos, real e imaginário, como mostra a Figura 47.

Figura 46 - Estudante errou a atividade 10 na propriedade distributiva da multiplicação

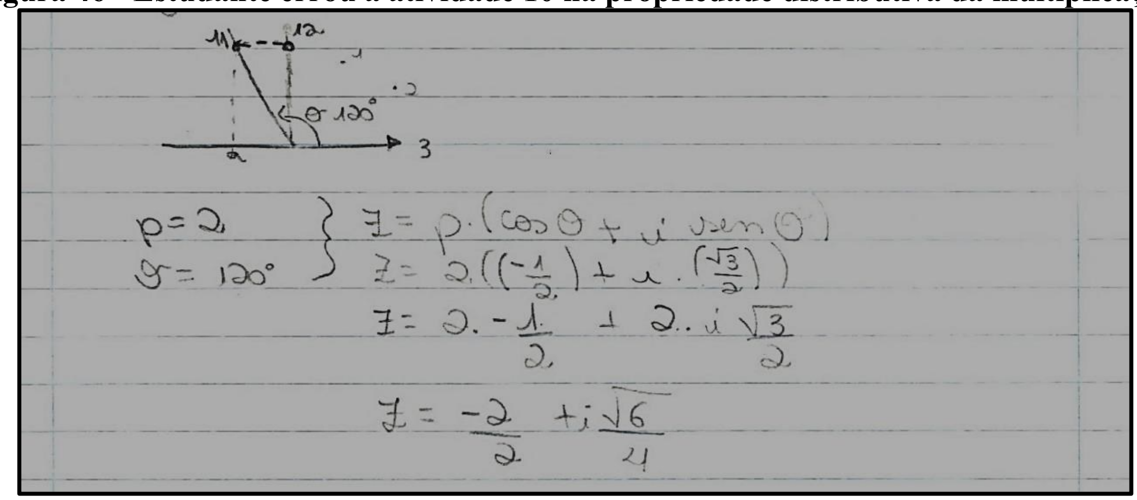
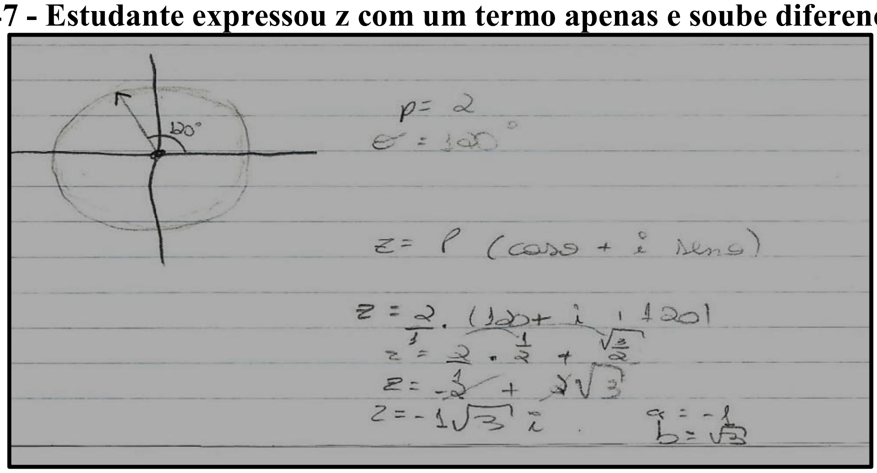


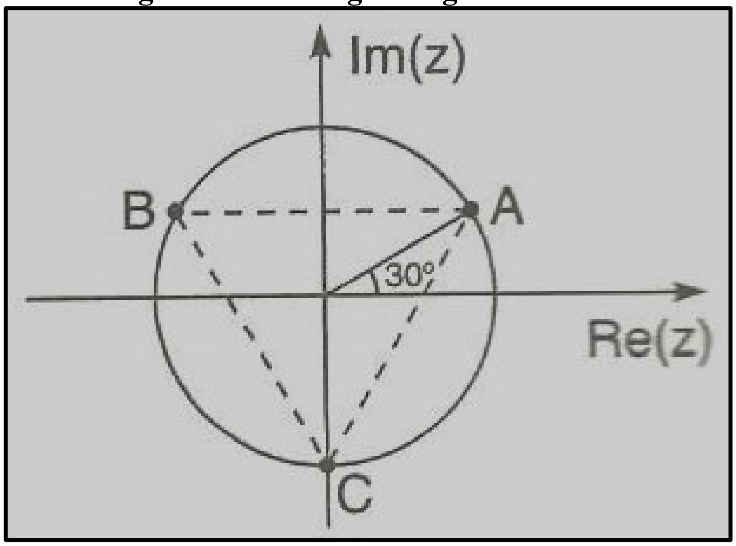
Figura 47 - Estudante expressou z com um termo apenas e soube diferenciar *a* e *b*



Atividade 11:

Na Figura 48 tem-se o triângulo equilátero ABC, inscrito em uma circunferência de raio 1 e centro na origem do plano de Argand-Gauss. Os pontos *A*, *B* e *C* são as respectivas imagens dos números complexos z_1, z_2 e z_3.

Figura 48 - Triângulo regular inscrito



Fonte: GIOVANNI e BONJORNO (2005, p. 163)

Determine a forma algébrica dos vértices desse triângulo.

(Questão nº 36 adaptada de GIOVANNI; BONJORNO, 2005, p. 163-UFS)

Análise da aplicação da atividade 11:

Nesta atividade participaram 34 estudantes da turma 1 e 15 acadêmicos de Matemática. O tempo médio de resolução foi de 15 minutos. A atividade anterior ajudou na compreensão da determinação de um número complexo na forma a + bi, expressos pelo módulo e argumento principal. A turma 1 resolveu a atividade 11 com muita confiança e determinação. As dúvidas, basicamente, permeavam à simplificação de frações e à permissão de expressá-las na forma decimal. Uma acadêmica de Matemática observou que a atividade exigia conhecimentos geométricos do triângulo equilátero, como mostra a Figura 50.

Mesmo com o valor do módulo igual a um, novamente foram notadas algumas dificuldades e erros dos estudantes com relação à propriedade distributiva da multiplicação (envolvendo número real e número imaginário). Uma acadêmica de Matemática determinou a forma algébrica do afixo $A,$ sem utilizar propriamente a forma trigonométrica $z = \rho.(cos\ \theta + i.sen\ \theta)$, e percebeu a semelhança da mesma com a utilização das razões seno e cosseno como mostra a Figura 49.

Figura 49 - Acadêmica utilizou as razões seno e cosseno na transformação (a, b) → a + bi

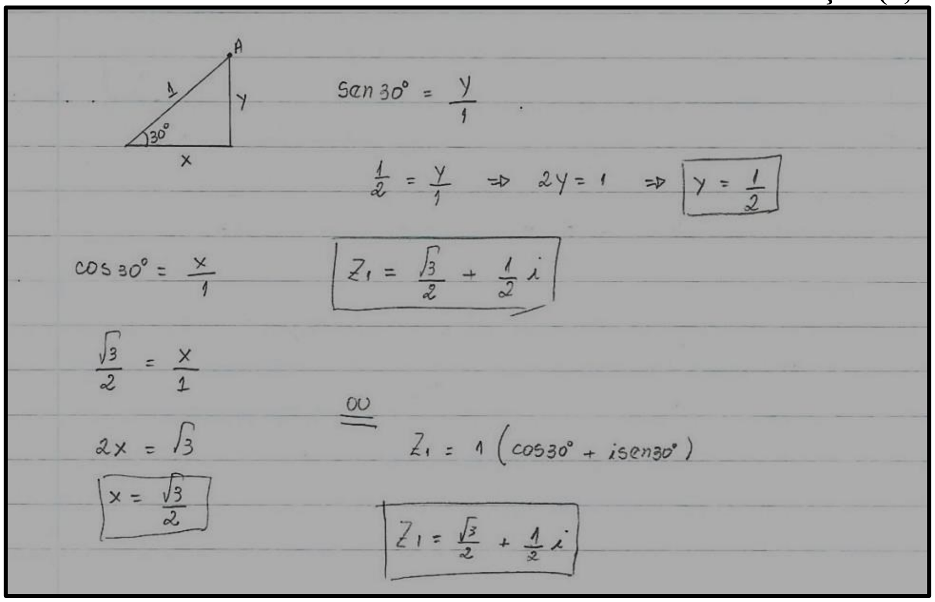
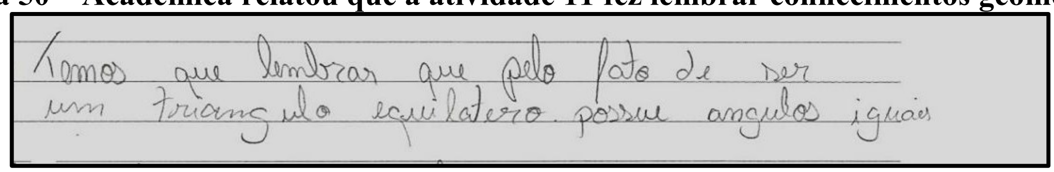


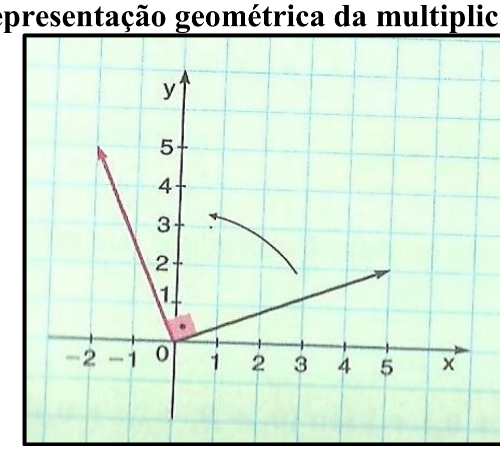
Figura 50 – Acadêmica relatou que a atividade 11 fez lembrar conhecimentos geométricos


Temos que lembrar que pelo fato de ser um triangulo equilatero possue angulos iguais

Atividade 12:

Os números complexos são utilizados na realização de operações geométricas como na forma de vetores. Veja: • Multiplicar por *i*, corresponde a girar 90º, no sentido positivo ao redor da origem, a imagem do complexo pelo qual se multiplica *i*. Exemplo: (5 + 2i).**i** = 5i + $2i^2$ = -2 + 5i

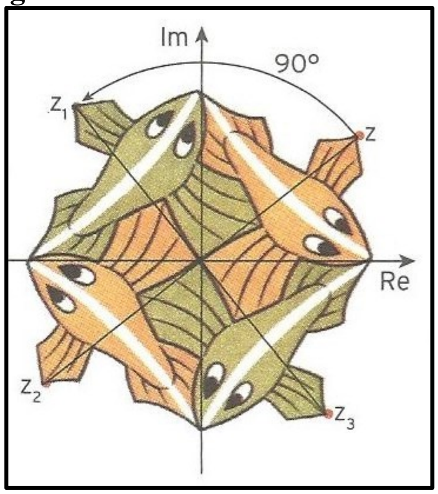
Figura 51 – Representação geométrica da multiplicação por *i*



Fonte: GIOVANNI; BONJORNO (2005, p. 153)

A rotação de imagens foi um dos recursos utilizado pelo artista Maurits C. Escher, em suas obras, como no quadro a seguir, denominado *Limite circular III*. Observe que em cada quadrante há uma repetição do mesmo peixe com a rotação de 90º em torno da origem.

Figura 52 – Obra do artista Escher



Fonte: SMOLE; DINIZ (2010, p. 252)

O ponto z é um número complexo de argumento igual a 45º. O ponto z_1 pode ser encontrado com a rotação de 90º, basta multiplicar z por i. Ao rotacionar z_1 em 90º, obtém-se z_2, e rotacionando z_2 em 90º obtém-se z_3. Portanto:

$$z_1 = i.z$$

$$z_2 = i.z_1$$

$$z_3 = i.z_2$$

Considerando que a distância da origem do plano de Argand-Gauss até o complexo z é igual a 2 cm (módulo), e que seu ângulo correspondente mede 45º (argumento) em relação à origem e o eixo real, responda:

a) Qual o argumento de z_2 e o seu módulo?

b) Represente z_2 na forma algébrica.

c) Qual é a parte imaginária de z_2?

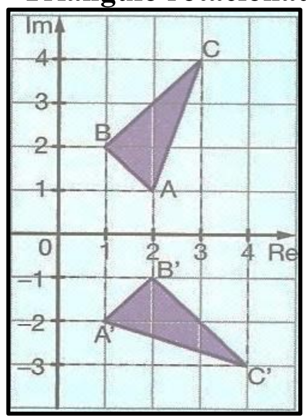
d) O que faz de z_2 ser diferente de um número real?

(Questão adaptada de SMOLE; DINIZ, 2010, p. 252; GIOVANNI; BONJORNO, 2005, p. 153)

Atividade 13:

Dado o triângulo ABC de vértices A(2, 1), B(1, 2) e C(3, 4), determine as coordenadas dos vértices do triângulo A'B'C', obtidos pela rotação do triângulo ABC em 270º, em torno da origem, no sentido anti-horário.

Figura 53 - Triângulo rotacionado em 270º



Fonte: SOUZA (2010, p. 249)

(Questão R24 de SOUZA, J. R., 2010, p. 249)

Análise da aplicação das atividades 12 e 13:

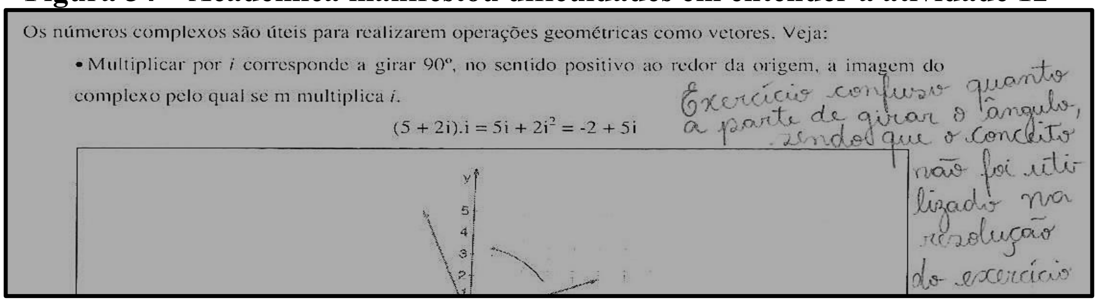
A análise conjunta das duas atividades se deve à semelhança dos conhecimentos envolvidos. Nelas e nas três procedentes, participaram apenas os acadêmicos de matemática, pois o prazo combinado para aplicação na Escola Básica havia terminado. Portanto não foi possível finalizar a aplicação de todas as atividades propostas na cartilha, com as turmas do ensino médio.

Sendo assim, participaram 15 acadêmicos de Matemática e o tempo médio de leitura e resolução foi de 20 minutos na atividade 12, e 12 minutos na atividade 13. Por se depararem com a representação geométrica da multiplicação por *i*, no plano complexo, a atividade causou surpresa aos acadêmicos. Eles ficaram admirados ao observar esse tipo de aplicação. As manifestações foram desde elogios à dúvidas e críticas, onde foi percebida a necessidade de algumas modificações. Na forma final do produto educacional, as atividades 12 e 13 foram reunidas, por exigirem o mesmo raciocínio nas resoluções.

Foi notado que nem todos acadêmicos perceberam que a multiplicação por *i* provocava a rotação em 90º, como mostra a Figura 54. As atividades 12c e 12d permitiram aos acadêmicos que descrevessem a diferença ou semelhança entre um número real e um número complexo, a fim de verificar o aprendizado nesta fase das atividades. A Figura 55 apresenta a resposta de uma acadêmica que fez uma associação entre os números reais e os números complexos.

As linhas das grades na atividade 13, proporcionaram a visualização direta das coordenadas, sem precisar da multiplicação por *i*. Por esse motivo foi retirado o gráfico e modificado o enunciado, para que os estudantes localizassem os triângulos ABC e A'B'C', após a rotação no plano complexo.

Figura 54 – Acadêmica manifestou dificuldades em entender a atividade 12



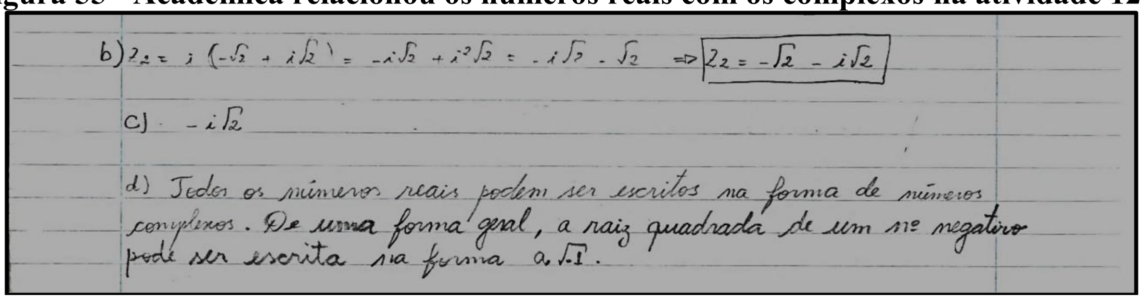
Os números complexos são úteis para realizarem operações geométricas como vetores. Veja:

• Multiplicar por *i* corresponde a girar 90°, no sentido positivo ao redor da origem, a imagem do complexo pelo qual se m multiplica *i*.

$$(5 + 2i).i = 5i + 2i^2 = -2 + 5i$$

Exercício confuso quanto a parte de girar o ângulo, sendo que o conceito não foi utilizado na resolução do exercício

Figura 55 - Acadêmica relacionou os números reais com os complexos na atividade 12 d



b) $z_2 = i(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = -i\sqrt{2} + i^2\sqrt{2} = -i\sqrt{2} - \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$

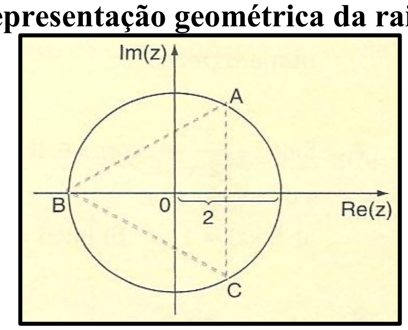
c) $-i\sqrt{2}$

d) Todos os números reais podem ser escritos na forma de números complexos. De uma forma geral, a raiz quadrada de um nº negativo pode ser escrita na forma $a.\sqrt{-1}$.

Atividade 14:

Se, na Figura 56, os pontos *A*, *B* e *C* são os afixos da raiz cúbica de – 8 obtenha a forma algébrica dessas raízes.

Figura 56 - Representação geométrica da raiz cúbica de – 8



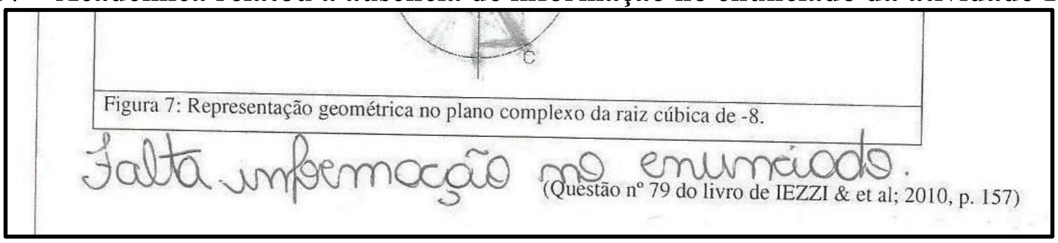
Fonte: IEZZI et al (2010, p. 157)

(Questão nº 79 de IEZZI et al; 2010, p. 157)

Análise da aplicação da atividade 14:

Participaram 15 acadêmicos de Matemática que levaram um tempo médio de 15 minutos para a leitura e resolução. Para eles, a atividade foi analisada como difícil e com ausência de informação no enunciado como mostra a Figura 57. Outros perguntaram: “Qual é a relação da $\sqrt[3]{-8}$ com o problema?”

Figura 57 – Acadêmica relatou a ausência de informação no enunciado da atividade 14



(Questão nº 79 do livro de IEZZI & et al; 2010, p. 157)

A radiciação de números complexos representa no plano complexo os vértices de um polígono regular. Foi perceptível que os estudantes não entenderam, visto que o enunciado não abordava essas informações iniciais. A raiz cúbica de – 8 possui três raízes no conjunto dos números complexos, que representam os vértices de um triângulo equilátero. Essa informação foi acrescentada no enunciado da atividade do produto educacional final.

Atividade 15:

A prefeita Maria decidiu escolher três das comunidades carentes do município, nas quais seriam construídos postos de saúde. O número de comunidades carentes e a disposição geográfica dessas comunidades são representadas no plano de Argand-Gauss pelos resultados da $\sqrt[6]{1}$, ou seja, representam os seis vértices de um hexágono regular com raio 1.

a) Calcule o número de possibilidades de escolha das três comunidades

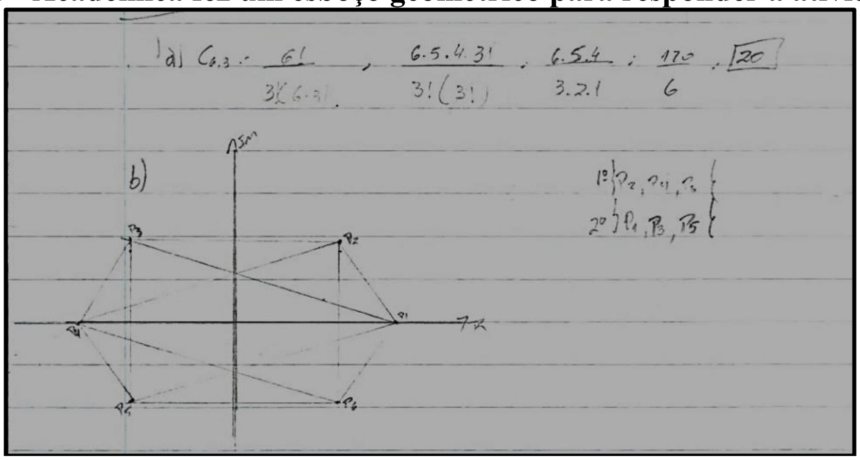
b) Calcule o número de possibilidades de escolha das três comunidades, sabendo-se que essas comunidades devem ser equidistantes entre si.

(Questão nº 35 adaptada de GIOVANNI e BONJORNO, 2005, p. 163-UFPB)

Análise da aplicação da atividade 15:

Participaram 15 acadêmicos de Matemática num tempo médio de 20 minutos para leitura e resolução. Por se tratar da representação geométrica da radiciação de números complexos no plano complexo, os esclarecimentos de dúvidas na atividade anterior ajudaram na presente atividade. Outras dúvidas pertinentes referiram-se à análise combinatória. Alguns utilizaram a fórmula da combinação de elementos e esboçaram desenhos de combinações como mostra a Figura 58.

Figura 58 - Acadêmica fez um esboço geométrico para responder a atividade 15-b



Atividade 16:

Por que a necessidade das três formas de expressão para os complexos?

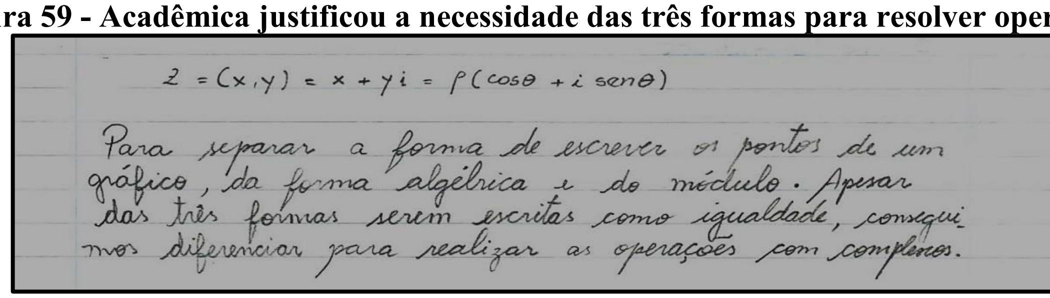
$$z = (x, y) = x + yi = \rho(\cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta)$$

(Questão de IEZZI et al; 2010, p. 155)

Análise da aplicação da atividade 16:

Nesta atividade participaram 15 acadêmicos de Matemática, em tempo médio de 10 minutos. Ao se depararem com a atividade, os acadêmicos perguntaram: "*o que precisa resolver?*" Foram orientados que a atividade é subjetiva e que deveriam responder de acordo com os entendimentos obtidos no decorrer das aulas. Observa-se na Figura 59 a resposta de uma acadêmica que descreveu sobre a necessidade das formas para resolver operações.

Figura 59 - Acadêmica justificou a necessidade das três formas para resolver operações



$z = (x, y) = x + yi = \rho(\cos\theta + i\ \text{sen}\theta)$

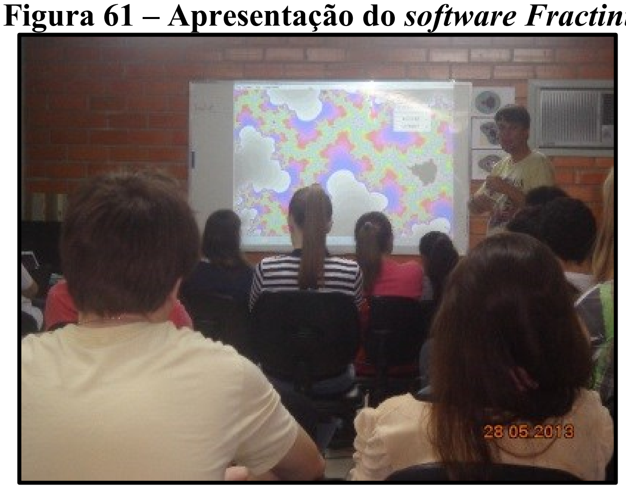
Para separar a forma de escrever os pontos de um gráfico, da forma algébrica e do módulo. Apesar das três formas serem escritas como igualdade, consegui-mos diferenciar para realizar as operações com complexos.

Parte 4 - Atividade na sala informatizada:

Por despertar interesse dos estudantes do ensino médio, durante a apresentação inicial (nas duas primeiras semanas), o tema fractal foi apresentado aos estudantes como mostra a Figura 60, com o uso do software de criação de fractais *Fractint,* como apresenta a Figura 61. Especificamente, se refere às atividades que envolvem a função $z \rightarrow z^2 + c$ para a construção dos conjuntos de Julia e de Mandelbrot, com o auxílio de planilhas eletrônicas e o *software Fractint*.

Figura 60 - O conjunto de Mandelbrot

Figura 61 – Apresentação do *software Fractint*



Esta abordagem aconteceu no último dia de aula, com 25 estudantes da turma 1, no tempo de uma aula, porém não foi possível trabalhar com os computadores para que os jovens tivessem contato com o software apresentado. Mesmo assim, uma proposta para o uso na sala informatizada segue na Parte 4 do produto educacional. Baier (2005) afirma que alguns conteúdos do ensino básico podem ser articulados com a teoria dos fractais, tais como a relação entre o c*onjunto de Mandelbrot* e os números complexos. A mesma autora explica o interesse dos jovens pelos fractais: "No mundo vivido por nossos jovens se fazem presentes diversas criações científicas contemporâneas, tais como a teoria quântica, a teoria da relatividade, a teoria dos fractais e a do caos." (BAIER, 2005, p. 14).

A sala informatizada é uma opção para explorar os números complexos. Planilhas eletrônicas ajudam na construção de tabelas, a fim de verificar as órbitas críticas das sementes nos conjuntos de Julia e de Mandelbrot. "As planilhas eletrônicas, mesmo sendo ferramentas que não foram pensadas para propósitos educativos, também podem ser utilizadas como recursos tecnológicos úteis à aprendizagem Matemática." (BRASIL, 2008, p. 89). Pode ser lançado um desafio aos estudantes: a criação de comandos na planilha eletrônica para verificar o comportamento das órbitas, o que irá exigir deles conhecimentos lógicos e matemáticos que proporcionam a construção conceitual e operacional de números complexos.

4.6 INSTRUMENTO AVALIATIVO DA APRENDIZAGEM SOBRE NÚMEROS COMPLEXOS E SEUS RESULTADOS

Foi utilizado como instrumento avaliativo a mesma avaliação diagnóstica referida no Capítulo 2, aplicada no momento inicial (pré-teste) e final (pós-teste). Nos dias 22 e 23 de abril de 2013, período em que iniciou a pesquisa na escola de ensino básico, responderam ao pré-teste 68 estudantes das turmas do 3º ano do ensino médio. No dia 03 de junho de 2013, após a aplicação das atividades, 70 estudantes responderam ao pós-teste. Foram descartados dois pós-testes por apresentarem rasuras e respostas incompreensíveis às questões. Dessa forma, foram consideradas para a análise, as respostas de 63 estudantes que estiveram presentes nos dois testes.

A Tabela 7 apresenta as frequências dos dois testes em relação à questão 1, ou seja, os resultados de potências quadradas. Observa-se a redução na categoria *Erro no sinal* das questões 1(c) e 1(d) no pós-teste. Na categoria *Correto*, houve aumento significativo em todas as questões. Na Tabela 8 está a frequência das respostas dos estudantes, para justificar o sinal das potências quadradas da questão 1. Apesar de não ser significativo, houve um declínio no pós-teste na categoria *Positivos: de acordo com regras dos reais.* Também é observado um relativo aumento na categoria *Positivos sem justificativa ou justificou-se por contagem.*

Tabela 7 – Cálculo de potências quadradas

Questão 1: Calcule as seguintes potências:					
Categorias:	Teste:	a) 4^2	b) 5^2	c) $(-6)^2$	d) $(-3)^2$
Correto	Pré	95,2%	100%	88,9%	90,5%
	Pós	98,4%	98,4%	93,6%	93,6%
Erro no sinal	Pré	0%	0%	7,9%	7,9%
	Pós	0%	0%	1,6%	1,6%
Incorreto	Pré	4,8%	0%	1,6%	1,6%
	Pós	1,6%	1,6%	3,2%	3,2%
Branco	Pré	0%	0%	1,6%	0%
	Pós	0%	0%	1,6%	1,6%
TOTAL		100%	100%	100%	100%

Tabela 8 – Justificativa dos resultados das potências quadradas

Questão 2: Analisando os sinais dos resultados obtidos acima, o que apareceu mais: números positivos ou números negativos? Justifique sua resposta.		
Categorias	Teste	Porcentagem
Positivos: de acordo com as regras dos reais	Pré	76,2%
	Pós	73,0%
Positivos: Sem justificativas ou justificou-se por contagem	Pré	14,3%
	Pós	20,6%
Erraram	Pré	9,5%
	Pós	4,8%
Branco	Pré	0%
	Pós	1,6%
TOTAL		100%

Os resultados da $\sqrt{36}$ e da $\sqrt{16}$ estão na Tabela 9 e mostram que no pós-teste, apenas um estudante errou a resposta para a $\sqrt{16}$, apesar de ter acertado no pré-teste.

Tabela 9 – Cálculo de raízes quadradas de números positivos

Questão 3: Calcule as raízes quadradas abaixo e justifique o resultado obtido:			
	Teste	a) $\sqrt{36}$	b) $\sqrt{16}$
Correto	Pré	98,4%	100%
	Pós	98,4%	98,4%
Incorreto	Pré	1,6%	0%
	Pós	1,6%	1,6%
TOTAL		100%	100%

A Tabela 10 apresenta mudanças na comparação dos testes em relação aos resultados da $\sqrt{-25}$. É notável que após realização das atividades uma quantidade expressiva de estudantes usou a unidade imaginária para responder a questão no pós-teste. Muitos desses estudantes, que no pré-teste haviam registrado outras respostas, entre essas, estavam as mais comuns: *5 ou - 5*; *dúvidas*; *inexistência como número*.

É observável na Tabela 11 que as respostas dos estudantes para a raiz quadrada de um número negativo são as mais diversas no pré-teste. Porém, se concentram expressivamente no pós-teste, em escritas que revelam o entendimento de que se trata de um número complexo.

Tabela 10 – Respostas para a raiz quadrada de – 25

Questão 3c: $\sqrt{-25}$:		
Categorias	Teste	Porcentagem
±5: sem justificativa	Pré	6,4%
	Pós	4,8%
±5: com justificativa	Pré	20,6%
	Pós	12,7%
0: sem justificativa	Pré	1,6%
	Pós	0%
0: com justificativa	Pré	0%
	Pós	0%
Não existe, sem mencionar os reais	Pré	34,9%
	Pós	1,6%
Não existe nos reais	Pré	0%
	Pós	0%
Dúvidas	Pré	23,8%
	Pós	0%
Número Complexo / usou *i*	Pós	74,6%
Branco	Pré	12,7%
	Pós	6,3%
TOTAL		100%

Tabela 11 – Respostas dos estudantes para a existência da raiz quadrada de um número negativo

Questão 4: É possível calcular a raiz quadrada de um número negativo? Justifique sua resposta.		
Categoria	Teste	Porcentagem
Não existe, sem mencionar os reais	Pré	25,4%
	Pós	1,6%
Não existe nos reais	Pré	1,6%
	Pós	1,6%
Não, sem justificativa	Pré	4,8%
	Pós	0%
Sim, com justificativa nos reais	Pré	12,7%
	Pós	9,5%
Sim, sem justificativa	Pré	30,1%
	Pós	1,6%
Dúvidas	Pré	25,4%
	Pós	0%
Nº complexo / usou *i*	Pós	80,9%
Branco	Pré	0%
	Pós	4,8%
TOTAL		100%

Em relação às respostas de equações quadráticas com resultados complexos é observável na Tabela 12, que muitos estudantes utilizaram os números complexos no pós-teste. Outros estudantes não responderam a questão no pré-teste, deixando-a em branco, vindo a diminuir esse índice no pós-teste. Na categoria *Prosseguiu com* $\sqrt{-\boldsymbol{R}}$ estão os estudantes que prosseguiram com o cálculo, atribuindo valores reais às raízes com radicandos negativos.

Tabela 12 – Respostas dos estudantes para as equações quadráticas com resultados de números complexos

Questão 5: Resolva as equações abaixo e escreva uma explicação sobre a resposta.			
Categorias	Teste	a) $x^2 + 9 = 0$	b) $x^2 - 4x + 5 = 0$
Prosseguiu com $\sqrt{-R}$	Pré	0%	9,5%
	Pós	17,5%	9,5%
$\sqrt{-R}$, não existe	Pré	11,0%	6,4%
	Pós	0%	0%
$\sqrt{-R}$, parou	Pré	8,0 %	12,7%
	Pós	3,2%	7,9%
Incorreto	Pré	36,5%	12,7%
	Pós	14,3%	6,4%
Incompleto	Pré	8,0%	14,3%
	Pós	0%	4,8%
Nº complexo / usou *i*	Pós	42,8%	52,4%
Branco	Pré	36,5%	44,4%
	Pós	22,2%	19,0%
TOTAL		100%	100%

4.7 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS

Os valores das tabelas do pós-teste mostraram significativas mudanças nas respostas dos estudantes quanto às raízes quadradas de números negativos, após a sequência de atividades. Porém, é necessário analisar e discutir esses resultados. Para direcionar a discussão, pretende-se responder a seguinte questão:

A sequência de atividades aplicada aos estudantes do ensino médio proporcionou conhecimentos sobre o conjunto dos números complexos?

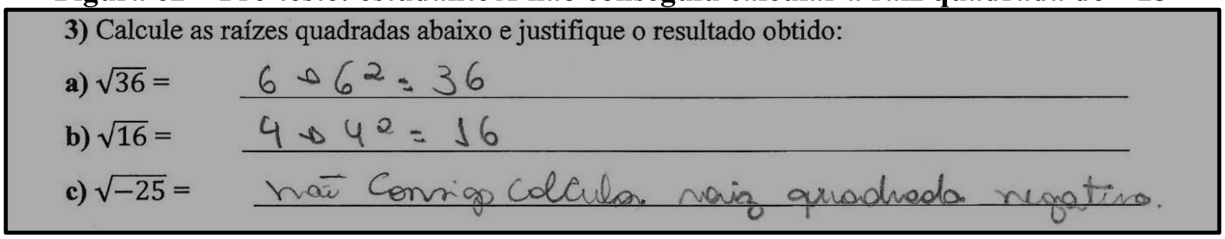
Concomitante à discussão, objetiva-se responder à uma das questões norteadoras da pesquisa: Atividades contextualizadas despertam o interesse dos estudantes no tema números complexos?

Ao resolver algumas situações-problema da cartilha, espera-se primeiramente que os estudantes tenham compreensão do problema e planejem estratégias de resolução. Certamente o domínio operatório com os números complexos é outro fator relevante para chegar à solução. A facilidade e habilidade em operações podem acontecer com exercícios adicionais, envolvendo números complexos. Pérez Echeverría (1998) relata que, ao resolver um problema, o estudante precisa encontrar alguma dificuldade, obrigando a se questionar sobre o caminho correto a seguir para alcançar a meta. Entretanto, a mesma autora explica que exercícios diferenciam de problemas, pois esses servem para assegurar e automatizar certas técnicas, habilidades e procedimentos para resolver problemas. Dessa forma, exercícios operatórios não são problemas, mas ajudam na resolução dos mesmos.

O perfil dos estudantes do ensino médio noturno, faz entender que eles possuem um tempo reduzido de dedicação aos estudos, conforme aponta as DCN (2013, p. 157-158): "Levantamentos específicos mostram que os estudantes do ensino noturno diferenciam-se dos estudantes do ensino diurno, pois esses últimos têm o estudo como principal atividade/interesse, enquanto os do noturno são, na sua maioria, trabalhadores antes de serem estudantes." Porém os resultados do pré-teste não diferenciaram significativamente dos estudantes do ensino médio diurno e noturno apresentados no Capítulo 2. A forma como respondem ao aparecimento da raiz quadrada de um número negativo é semelhante quando se comparam as Figuras 5, 6, 7, 8, 10 e 11 com as Figuras 62, 64 e 66. A justificativa de tal diversidade para a raiz quadrada de um número negativo pode ser proveniente do conceito de potência quadrada, pois "durante anos, convencemos e fomos convencidos de que o quadrado de um número não pode ser negativo [...]." (CARNEIRO, 2004b, p. 2-3).

A Tabela 10 apresenta as respostas para a $\sqrt{-25}$ nos testes. No pré-teste, observa-se que as maiores frequências, por ordem, estão nas categorias: *Não existe, sem mencionar os reais* (34,9%); *Dúvidas* (23,8%); *± 5 com justificativa* (20,6%); *Branco* (12,7%). Após a sequência de atividades é notável expressiva mudança nas respostas para a $\sqrt{-25}$, como pode ser observado na comparação das respostas de um estudante denominado *A* (anonimato), nas Figuras 62 e 63. No pós-teste, a maior frequência está na categoria *nº complexo/usou i* (74,6%), indicando que 25,4% dos estudantes não conseguiram representar a $\sqrt{-25}$ como sendo um número complexo.

Figura 62 – Pré-teste: estudante *A* não conseguiu calcular a raiz quadrada de – 25



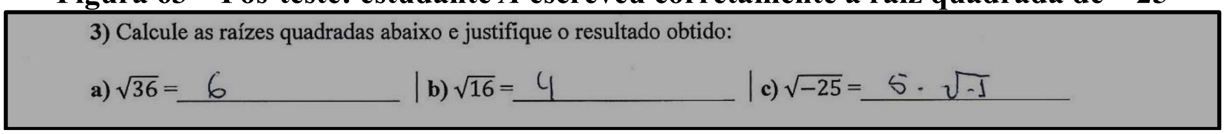
3) Calcule as raízes quadradas abaixo e justifique o resultado obtido:

a) $\sqrt{36} =$ 6 → $6^2 = 36$

b) $\sqrt{16} =$ 4 → $4^2 = 16$

c) $\sqrt{-25} =$ não Consigo calcular raiz quadrada negativa.

Figura 63 – Pós-teste: estudante *A* escreveu corretamente a raiz quadrada de – 25



3) Calcule as raízes quadradas abaixo e justifique o resultado obtido:

a) $\sqrt{36} =$ 6 | **b)** $\sqrt{16} =$ 4 | **c)** $\sqrt{-25} =$ $5 \cdot \sqrt{-1}$

É observável nas comparações da Tabela 10, que a maioria dos estudantes compreendeu após os estudos, que existe uma resposta para a raiz quadrada de números negativos. Porém, saber apenas que se trata de um número complexo não é o suficiente para os estudantes. No caso do estudante denominado *B* (anonimato), que respondeu aos testes conforme apresentados nas Figuras 64 e 65, é evidente que o conceito de potência e de raiz quadrada precisam de esclarecimentos. Pois, são esses dois conceitos básicos que proporcionam o entendimento de um número complexo. Para Pinto (2000, p. 21), ao trabalhar com a análise de erros, "a opção por esse espaço deve-se à oportunidade que o próprio erro oferece à observação do intenso movimento de relações que ocorre na sala de aula entre o professor, aluno e conhecimento, no processo de produção e superação dos erros." Percebe-se pela Figura 64 que, ao responder zero, o mesmo estudante escreveu um ponto de interrogação entre os parênteses, o que pode representar uma incerteza. Na Figura 65, ele apresenta a resposta -5 sem dúvidas, porém é visível o erro na justificativa conceitual da raiz quadrada. "Os erros podem informar tanto a respeito das dificuldades que um aluno apresenta para adotar procedimentos de tipo técnico ou estratégico, como do tipo de teorias ou crenças com as quais ele tem que lidar em um determinado momento." (PÉREZ ECHEVERRÍA, 1998, p. 65). Nesse sentido, o estudante apresentou erros em sua resposta na Figura 65, porém mostra que reconhece a existência da $\sqrt{-25}$, diferente da sua resposta anterior.

Figura 64 – Pré-teste: estudante *B* respondeu zero para a raiz quadrada de – 25

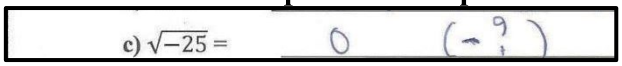
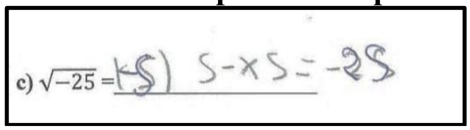

c) $\sqrt{-25} =$ 0 (-?)

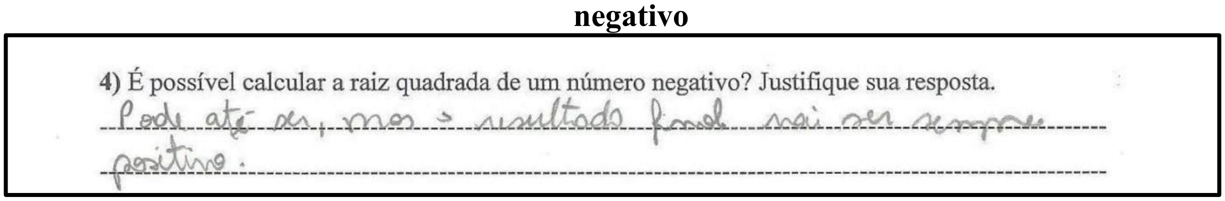
Figura 65 – Pós-teste: estudante *B* respondeu – 5 para a raiz quadrada de – 25


c) $\sqrt{-25} =$ (-5) 5-x5=-25

Em relação à existência da raiz quadrada de um número negativo, a Tabela 11 apresenta as categorias para as resposta dos estudantes. No pré-teste, com maiores frequência estão: *Sim, sem justificativa* (30,1%); *Dúvidas* (25,4%); *Não existe, sem mencionar os reais* (25,4%), *Sim, com justificativa nos reais* (12,7%). A maior concentração de respostas no pós-teste está na categoria *nº complexo/usou i* com 80,9%, implicando que 19,1 % não conseguiram descrever na resposta alguma relação com números complexos ou a unidade imaginária.

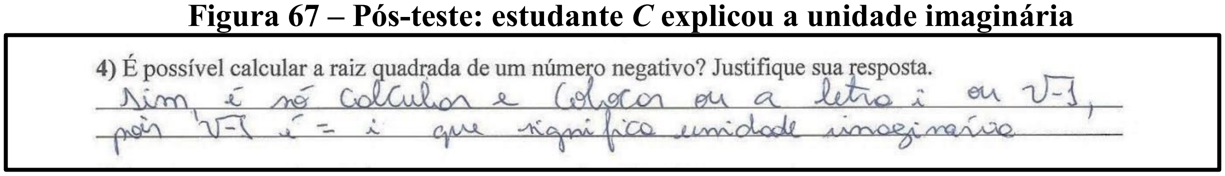
Nas Figuras 66 e 67, pode-se observar a mudança na resposta de uma estudante denominada *C* (anonimato), que no primeiro momento acreditava ser um número real positivo e no pós-teste respondeu que é possível com a unidade imaginária.

Figura 66 – Pré-teste: estudante *C* apresentou dúvidas para a raiz quadrada de um número negativo


4) É possível calcular a raiz quadrada de um número negativo? Justifique sua resposta.

Pode até ser, mas o resultado final vai ser sempre positivo.

Figura 67 – Pós-teste: estudante *C* explicou a unidade imaginária


4) É possível calcular a raiz quadrada de um número negativo? Justifique sua resposta.

Sim, é só calcular e colocar ou a letra i ou $\sqrt{-1}$, pois $\sqrt{-1}$ é = i que significa unidade imaginária

Durante a investigação, ocorreu a mudança nos estudos do campo numérico dos reais para os complexos, instigada pelo professor pesquisador. Dessa forma fez parte do aprendizado a seguinte afirmação: *existe o quadrado de um número com resultado negativo* implicando na existência da raiz quadrada de números negativos. É observável um conflito na Figura 25, pela resposta da estudante que refletiu sobre a utilização da $\sqrt{-1}$ para o problema de Cardano:

"Sim, consegui resolver. Mas a $\sqrt{-1}$ não é menor que dez? Como pode ser a resposta correta?"

As respostas de negação à raiz quadrada de números negativos nos resultados dos pré-testes (2013) e na avaliação diagnóstica (2012) evidenciaram um reflexo do que os estudantes sabiam sobre o tema. O aparecimento de erros nas respostas, segundo Pinto (2000, p. 12) “[...] dirige o olhar do professor para o contexto e para o processo do conhecimento a ser construído.” De acordo com as DCN para o ensino médio (2013, p. 175), o estudante é “[...] um sujeito com todas as suas necessidades e potencialidades, que tem uma vivência cultural e é capaz de construir a sua identidade pessoal e social.” Portanto, ao considerar as potencialidades dos jovens para o ensino, como protagonistas[13] de saberes, é creditado ao próprio estudante que no entendimento inicial de números complexos, esses podem conjecturar respostas válidas para a raiz quadrada de um número negativo, com base nos conceitos de potências e raízes quadradas.

É visível na Tabela 12, que muitos estudantes deixaram em branco a resolução de equações do 2º grau no pré-teste. Assim, quando apresentado o arquivo de apresentação inicial dos complexos em PowerPoint, foi discutida amplamente a resolução dessas equações com os estudantes. No pós-teste é observada a mudança desses índices, porém com porcentagens de 22,2% na primeira equação e 19% na segunda equação, estão os estudantes que não as resolveram, deixando em branco.

Ao planejar o ensino de números complexos, o professor, muitas vezes, objetiva ter estudantes preparados para o mesmo, pois esse tema exige muitos conhecimentos matemáticos. O presente estudo, aplicado com estudantes do ensino médio noturno, mostrou o contrário dessa hipótese – até mesmo com os acadêmicos do primeiro semestre de Matemática foi constatado que alguns não haviam estudado no ensino médio o tema números complexos. Assim, o uso da avaliação diagnóstica serviu para entender que “a análise de respostas, além de ser uma metodologia de pesquisa, pode ser, também enfocada como metodologia de ensino, empregada em sala de aula [...].” (CURY, 2007, p. 13). Portanto, as propostas que foram testadas com a aplicação e estão contidas na Parte 1, 2 e 3 do produto educacional, permitem ao professor não temer a hipótese de incapacidade dos estudantes e a exigência de pré-requisitos ao estudo de números complexos, podendo assim, nessa mesma proposta, trilhar os caminhos do estudo sem exigir um domínio matemático, fazendo revisões de conceitos caso for necessário, pois muitos erros e obstáculos dos estudantes colaborarão para o próprio estudo.

---

[13] O termo é utilizado nas DCN (BRASIL, 2013) onde descreve o papel do estudante na prática de pesquisa como princípio pedagógico.

A Matemática é disciplina presente em todo o ensino básico, como fundamental na formação do estudante. Obviamente, os números complexos não fazem parte do currículo dos anos iniciais do ensino fundamental, mas iniciam sua presença com o aparecimento de raízes quadradas de números negativos nos anos finais do ensino fundamental e com mais intensidade no ensino médio. A carência de conhecimentos sobre os números complexos no ensino básico, assim como a falta do domínio operatório ou o desconhecimento histórico e de aplicabilidades, resulta em dificuldades dos estudantes que seguem em cursos superiores ou cursos técnicos, como apresenta a pesquisa de Melllo e Santos (2005), e consequentemente no fortalecimento da decisão de professores extirparem esse conteúdo do ensino básico, por concluírem equivocadamente o desuso desse objeto de ensino.

A apresentação dos fractais de Mandelbrot e de Julia evidenciaram na investigação a curiosidade e o interesse dos jovens estudantes do ensino noturno. “Pela mídia, pela televisão e pela internet, o jovem vive intervalos curtos de atenção, momentos desconectados que não formam uma progressão contínua. Poderíamos acrescentar a esse raciocínio, que o jovem vive, não em tempo linear, mas em tempo fractal.” (BAIER, 2005, p.136). É nesse pensar que se aproxima uma justificativa para tal interesse, marcado pelo potencial tecnológico das mídias interativas e móveis, possibilitando a comunicação e informação de forma acelerada e atrativa aos jovens. Há quase duas décadas, D'ambrosio (1997, p. 80) afirmou que: “Informática e comunicações dominarão a tecnologia educativa do futuro.” Essa afirmação remete aos dias atuais e tem se evidenciado nas escolas.

Ao adotar a metodologia de pesquisa participante, contou-se com a participação dos estudantes no intuito de obter um produto educacional com foco nos estudantes do ensino médio para a compreensão dos números complexos. Realizando algumas modificações necessárias na investigação e considerando “[...] o que os estudantes já sabem, o que eles gostariam de aprender e o que se considera que precisam aprender.” (BRASIL, 2013, p. 181), possibilitou, assim, um modelo final do produto educacional, que se apresenta nesta dissertação com implícitas manifestações e colaborações dos estudantes participantes da pesquisa.

5 CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES

O professor do ensino básico sente-se, muitas vezes, sobrecarregado ao ter que trabalhar uma série de conteúdos de forma contextualizada e relacionada à suas aplicações. O ensino de números complexos é muitas vezes, um exemplo perceptível desse caso.

A sequência de atividades foi interessante, por permitir uma relação dialética, provocando a mudança da prática e no planejamento das questões, como já havia sido constatado no início da investigação, durante a apresentação inicial em PowerPoint, o interesse dos sujeitos participantes de conhecer as figuras fractais. No decorrer das atividades iniciais, quando discutido o uso da $\sqrt{-1}$, destaca-se o comentário de dois estudantes, ambos da turma 2 do 3º ano do ensino médio, que manifestaram-se confusos ao observarem que a raiz quadrada de um número negativo possa ser realmente um número. Disse o jovem rapaz: *"Como pode, um número imaginário elevado ao quadrado se tornar real?"* A jovem estudante complementou a discussão manifestando o interesse pelos fractais apresentados no PowerPoint: *"Achei lindo aqueles desenhos, parecem com tatuagens. Nós também vamos fazer?"*. O interesse dos jovens por fractais representa um dos temas que D'Ambrosio (1997) descreveu como: a Matemática do futuro e que Baier (2005) descreveu como conteúdo matemático construído na contemporaneidade, atualmente pouco estudado no ensino básico, porém tem se destacado fortemente com as recentes pesquisas em educação matemática.

Em resposta à uma das questões norteadoras desta pesquisa, que pretende saber quais as concepções dos estudantes do ensino médio sobre raízes quadradas de números negativos, foram apresentadas no Capítulo 2 diversas concepções. E entre essas concepções, muitos dos estudantes pesquisados negaram a existência de raízes quadradas de números negativos. Não foi diferente com as turmas do 3º ano do ensino médio, que responderam ao pré-teste. Porém, comparados os resultados do pré-teste e pós-teste, constata-se de forma quantitativa, sinais de mudança nas respostas de negação.

Sendo necessária para o início dos estudos, a aceitação da raiz quadrada de um número negativo, foi utilizada no arquivo de apresentação inicial, Parte 2 do produto educacional, a proposta análoga de Caraça (1998, grifos nosso) de *negar a negação*, porém na forma afirmativa: existe a raiz quadrada de um número negativo, porém não se trata de um número real.

A aceitação das raízes quadradas dos números negativos como um novo conjunto numérico, foi percebida de forma gradativa, durante a aplicação das atividades relacionadas aos conhecimentos históricos. Os fatos históricos ajudaram os estudantes a entenderem que as dificuldades dos matemáticos e o tempo necessário para a construção conceitual desse conhecimento foi, também, um processo longo.

As atividades se relacionam a diversos temas – como geometria, trigonometria, rotações no plano, aplicação na física, história da matemática, aplicação na geometria fractal – o que provocou, de forma surpreendente nos estudantes, a revelação da diversidade dos estudos que envolvem a $\sqrt{-1}$.

Pelos resultados analisados, acredita-se que a presente proposta do produto educacional possa contribuir para um ensino contextualizado sobre números complexos relacionados a seus conhecimentos históricos, aplicáveis e aos conhecimentos prévios dos estudantes.

A atividade 13 do produto educacional, no seu formato final, foi uma entre as mais relatadas pelos acadêmicos como difícil, que segundo eles, apresentava-se com ausência de informação no enunciado. Entende-se a manifestação, pois além da utilização da forma trigonométrica, a atividade 13 representa geometricamente a radiciação de um número complexo. A mudança representativa de um número complexo (forma trigonométrica e forma geométrica das raízes cúbicas de – 8) provocou tais manifestações. Alguns acadêmicos observaram que a atividade 13 ajudou na compreensão da questão seguinte.

O produto educacional ficou limitado quanto às atividades de aplicações, porém estas relações necessitam de mais tempo para que o próprio estudante entenda as conexões que existem.

As atividades 3 e 12 foram muito elogiadas pelos estudantes, pois consideraram interessante a exploração dos complexos no plano. Os estudantes apreciaram construir o plano complexo e localizar os vértices do triângulo na atividade 3. Pareciam deixar de lado todo o pensamento algébrico e por vezes abstrato da $\sqrt{-1}$ quando trabalhavam com a representação geométrica desses. A atividade 12, que envolve movimentos de rotações com os complexos, surpreendeu os acadêmicos de matemática mostrando como a exploração geométrica dos complexos desperta o interesse do tema.

No produto educacional há atividades que visam explorar a representação geométrica dos números complexos. Fica a critério do professor selecionar ou adaptar o que pretende trabalhar. Ele está acessível para estudantes e professores na internet, no endereço a seguir:

https://sites.google.com/site/julianoeli/

Nele se encontram: um prefácio com instruções ao professor; uma avaliação para diagnosticar as concepções de raízes quadradas de números negativos; uma apresentação inicial do tema, focando a história e as aplicações dos números complexos, nos arquivos PowerPoint e BrOffice; uma cartilha com atividades; apresentação em PowerPoint e BrOffice da construção dos conjuntos de Julia e do conjunto de Mandelbrot, focando o uso de planilhas eletrônicas (nos formatos Excel e BrOffice.org Calc) e o software Fractint; uma síntese para utilização dos capítulos 5 e 6 do filme *Dimensions*[14]; apresentação da aplicação de fasores na análise de circuitos elétricos de corrente alternada e atividades.

Mesmo que aplicada no 3º ano do ensino médio e com o 1º semestre de graduação em Matemática, a presente proposta pode ser explorada (selecionada e/ou adaptada) nas demais séries do ensino médio e nos anos finais do ensino fundamental. Outra proposta é trabalhar com a radiciação de números complexos relacionada com polígonos regulares. Inúmeras atividades são realizadas no ensino básico, como mandalas e mosaicos de polígonos regulares, e nesse caso, um possível trabalho, envolvendo esses temas, pode colaborar na desmistificação dos números complexos como números abstratos.

Todo o processo investigativo contribuiu na formação como professor e como pesquisador dessa dissertação. A elaboração do produto educacional exigiu muito dos conhecimentos de informática tais como planilhas eletrônicas, produção de textos matemáticos no LaTeX, software *Fractint* e uma percepção do potencial dinâmico da representação geométrica dos complexos no software *Geogebra*. De acordo com Carneiro (2004a, 2004b), há a necessidade de ampliar a abordagem geométrica dos números complexos, utilizando recursos computacionais. Ao apresentar algumas aplicações de funções complexas, Pazos (2005) corrobora com a ideia do uso de um sistema de computação algébrica ou de geometria dinâmica que envolva o estudante em experiências novas que proporcionam outras conjunturas.

Com a pesquisa, observou-se que os termos *imaginários* da época de Euler e *complexos* da época de Gauss, interpretados atualmente como difíceis e abstratos para o ensino básico, têm

[14] Acesse: http://www.dimensions-math.org/Dim_regarder_PT.htm

outras interpretações. É possível que tais denominações sejam provenientes de uma época em que se pensava na necessidade de compreendê-los como números e ao mesmo tempo, se observava a sua vasta relação com outros saberes. Entender a amplitude de conexões dos números complexos com outras áreas do conhecimento é o que leva esse conjunto numérico a ser chamado de complexo.

Referente à metodologia de ensino de análise de erros dos estudantes, Cury (2007, p. 80) destaca "[...] a idéia de que o erro se constitui como um conhecimento, é um saber que o aluno possui, construído de alguma forma, e é necessário elaborar intervenções didáticas que desestabilizem as certezas, levando o estudante a um questionamento sobre suas respostas." Embora muitas vezes terem sido necessárias intervenções corretivas sobre os erros, tentou-se preservar ao máximo as construções e conclusões dos estudantes, a fim de perceberem como é possível aprender através de seus conhecimentos prévios e de seus erros.

Recomenda-se que professores do ensino fundamental evitem o comentário equivocado "não existe" quando surge na resolução de uma equação do 2º grau, a raiz quadrada de um número negativo.

REFERÊNCIAS

ALEXANDER, Charles K; SADIKU, Matthew N. O. **Fundamentos de circuitos elétricos**. Porto Alegre : Bookman, 2003.

BAIER, Tânia. **O nexo "geometria fractal - produção da ciência contemporânea" tomado como núcleo do currículo de matemática do ensino básico**. 2005. 147 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Unesp, Rio Claro, 2005.

BAUMGART, J.K. História da álgebra. In: BAUMGART , J.K. **Álgebra**: tópicos de história da matemática para uso em sala de aula. São Paulo: Atual, 1992.

BERLINGHOFF, W. P. ; GOUVÊA, F. Q. **A matemática através dos tempos:** um guia fácil e prático para professores e entusiastas. São Paulo: Edgard Blücher, 2008.

BOYER, Carl B.. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1996.

BRANDÃO, C. R. Participar-pesquisar. In: BRANDÃO, C.R. (org.). **Repensando a pesquisa participante**. São Paulo: Brasiliense, 1999. p. 7-14.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais:** ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ ensino médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio**. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. Conselho Nacional da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. 542 p.

CAJORI, Florian. **Uma história da matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

CARAÇA, Bento de Jesus; ALMEIDA, Paulo; FLORENTINO, Afonso Miguel. **Conceitos fundamentais da matemática.** 2. ed. Lisboa : Gradiva, 1998.

CARNEIRO, José Paulo. A geometria e o ensino dos números complexos. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, n. 55, p. 15-25, jul. 2004a.

CARNEIRO, José Paulo. A geometria e o ensino dos números complexos. In: ENCONTRO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2004. Recife, **Anais do VIII Enem.** SBEM. 2004b. Disponível em <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/15/PA07.pdf>. Acesso em 17 ago. 2013.

CARVALHO, J.B.P.F. A história dos números complexos. In: CARMO, M. P., MORGADO, A. C., WAGNER, E. **Trigonometria :** números complexos. Rio de Janeiro: Lamgraf, 1992. p.109-114.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática**: da teoria à prática. 2 ed. Campinas: Papirus, 1997.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Euler, um matemático multifacetado. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Rio Claro, v. 9, n. 17, p. 13-31, abr./set., 2009.

DAMÁSIO, Antônio R. **O erro de Descartes**: emoção, razão e o cérebro humano. São Paulo: Companhia das Letras, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

DESCARTES, René. **Discurso do método**: Descartes**.** Brasília: Ed. UnB, 1989.

DEVANEY, Robert L.; CHOATE, Jonathan. **The Mandelbrot and Julia sets** : a tool kit of dynamics activities**.** Emeryville: Key Curriculum Press, 1999.

EULER, Leonard. **Elements of algebra.** 3rd. ed. Londres: Printed for Longman, 1822. Disponível em < http://math.dartmouth.edu/~euler/pages/E387.html >. Acesso em 18 mar. 2012.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. São Paulo: Editora da Unicamp, 1995.

FREITAS, José Roberto. **Equações algébricas nos quatérnios de Hamilton**. 2013. 37 f. Dissertação (Mestrado) - UTFPR, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Curitiba, 2013.

GAMOW, George. **Um, dois, três...infinito.** Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1962.

GARBI, Gilberto Geraldo. **O romance das equações algébricas.** São Paulo: Makron Books, 1997.

GIANOTTEN, Vera; WIT, Ton de. Pesquisa participante em um contexto de economia camponesa. In: BRANDÃO, C.R. (org.). **Repensando a pesquisa participante**. São Paulo: Brasiliense, 1999. p. 158-188.

GIOVANNI, J. R. ; BONJORNO, J. R. **Matemática completa.** 2 ed. São Paulo: FTD, 2005.

GOTTARDI, Jeferson André. Reflexões sobre o uso didático da História da Matemática. In: **História da matemática como recurso pedagógico no ensino fundamental.** 2012. 110 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Centro de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, p. 15-25, 2012.

HAWKING, Stephen William. **Uma breve história do tempo:** do big bang aos buracos negros. 13. ed. Rio de Janeiro: Rocco, 1989.

HELLMICH, Eugene W. Números complexos (a história de$\sqrt{-1}$). In: BAUMGART , J.K **Álgebra**: tópicos de história da matemática para uso em sala de aula. São Paulo: Atual, 1992. p. 61-65.

IEZZI, G. & et al. **Matemática:** ciências e aplicações. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

IRWIN, J. David. **Análise de circuitos em engenharia**. 4. ed. São Paulo : Makron Books, 2000. 848p, il.

KARLSON, Paul. **A magia dos números.** Porto Alegre: Globo, 1961.

LARANGEIRA, Eduardo Cartier. A Produção do Conhecimento como propriedade intelectual: Gênese e apropriação. In: **A produção científica em desenvolvimento regional da Universidade Regional de Blumenau-FURB**: uma construção dialética. 2010. 139 f, Dissertação (mestrado) - Universidade Regional de Blumenau, Centro de Ciências Humanas e da Comunicação, Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento Regional 2010. p. 64-69.

MELLO, S. Q.; SANTOS, R. P. O ensino de matemática e a educação profissional: a aplicabilidade dos números complexos na análise de circuitos elétricos. **Acta Scientiae**: Revista de Ensino de Ciências e Matemática, Canoas, v. 7, n.2, p.51-64, jul.-dez. de 2005.

MILIES, César Polcino. A emergência dos números complexos. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo: n. 24, p.5-15, jul. 1993.

MILIES, César Polcino. A solução de Tartaglia para a equação do terceiro grau. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo: n. 25, p.15-22, jan. 1994.

MONZON, Larissa Weyh. **Números Complexos e funções de variável complexa no ensino médio** – uma proposta didática com uso de objeto de aprendizagem. 2012. 134 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

MORETTI, Méricles T. A Regra dos Sinais para a Multiplicação: ponto de encontro com a noção de congruência semântica e o princípio de extensão em matemática. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 26, n. 42 B, p. 691-714, abr. 2012.

NAHIN, Paul J. **An imaginary tale:** the story of $\sqrt{-1}$. Princeton: Princeton University, 2007.

OLIVEIRA, Carlos Nely Clementino de. **Números Complexos - um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos.** 2010. 191f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2010.

PAZ, Marcos de Araujo. **Modelo reduzido de linhas de transmissão para transitórios eletromagnéticos** - aplicação de propriedades complexas. 2005. 145 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. São Paulo, 2005.

PAZOS, Rubén Panta. Visualizando funções complexas. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 3., 2005, Canoas. **Anais do III Ciem.** Canoas: ULBRA, 2005. p. 1-12.

PAIVA, Manoel. **Matemática.** São Paulo: Moderna, 2009.

PÉREZ ECHEVERRÍA, María del Puy. A solução de problemas em Matemática. In: POZO, Juan Ignacio. (org.). **A solução de problemas**. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 43-65.

PERLIS, Sam. Quatérnions. In: BAUMGART , J.K **Álgebra**: tópicos de história da matemática para uso em sala de aula. São Paulo: Atual Editora Ldta, 1992. p. 65-68.

PINTO, Neuza Bertoni. **O erro como estratégia didática:** estudo do erro no ensino da matemática elementar. Campinas: Papirus, 2000.

ROSA, Mario Servelli. **Números complexos:** uma abordagem histórica para aquisição do conceito. 1998. 172 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 1998.

SAD, Lígia Arantes; SILVA, Circe Mary Silva da. Reflexões teórico-metodológicas para investigações em História da Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 21, n. 30, p. 27-46, 2008.

SANTA CATARINA. Secretaria de Estado da Educação e do Desporto. **Proposta curricular de Santa Catarina:** educação infantil, ensino fundamental e médio: disciplinas curriculares. Florianópolis: COGEN, 1998.

SCHMIDT, Maria Luisa Sandoval. Pesquisa participante: alteridade e comunidades interpretativas. **Psicologia USP**, São Paulo, v. 17, n. 2, p. 11-41, 2006.

SILVA, C.M.S. O livro Didático mais popular de Leonhard Euler e sua repercussão no Brasil. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Rio Claro, v. 9, n. 17, p. 33-52, abr./set., 2009.

SINGH, Simon. **O último teorema de Fermat:** a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. 7. ed. Rio de Janeiro: Record, 2000.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. **Matemática**: ensino médio: vol. 3. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

SOUZA, Gustavo M.; BUCKERIDGE, Marcos S. Sistemas complexos: novas formas de ver a Botânica. **Revista Brasileira de Botânica**, São Paulo, v. 27, n. 3, p. 407-419, jul/set. 2004.

STEWART, Ian. **Será que Deus joga dados?** A nova matemática do caos. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1989.

SOUZA, J. R. **Novo olhar matemática.** São Paulo: FTD, 2010.

APÊNDICE A – Produto educacional

UNIVERSIDADE REGIONAL DE BLUMENAU
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS (CCEN)
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA (PPGECIM)

PRODUTO EDUCACIONAL

NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS APLICAÇÕES: UMA PROPOSTA DE ENSINO CONTEXTUALIZADO COM ABORDAGEM HISTÓRICA

PRODUÇÃO: JULIANO ELI

ORIENTADORA: Profa. Dra. TÂNIA BAIER
CO-ORIENTADORA: Profa. Dra. MÁRCIA REGINA BARCELLOS VIANNA VANTI

BLUMENAU
2014

Prefácio

Caro professor,

O presente produto educacional originou-se da dissertação de mestrado do autor. Ele pode ser acessado na internet através do endereço abaixo:

https://sites.google.com/site/julianoeli/

O objetivo é contribuir para o estudo inicial dos números complexos, fundamentando o ensino na sua construção histórica e explorando algumas de suas aplicações.

Na Parte 1 encontra-se a *Avaliação Diagnóstica*, que pode ser aplicada antes de estudar os números complexos, a fim de conhecer as concepções dos estudantes sobre raízes quadradas de números negativos. Essa avaliação, também pode ser utilizada como instrumento comparativo de aprendizagem, aplicando-a na forma de pré-teste e pós-teste.

Na Parte 2 está o arquivo de *Apresentação inicial dos números complexos* salvo nos formatos .pptx e .odp, dos softwares PowerPoint e BrOffice Impress, respectivamente. O mesmo pode ser usado em turmas do ensino médio, de 1º ao 3º ano, pois se trata de um estudo propedêutico aos conteúdos relacionados com raízes quadradas de números negativos.

Na Parte 3 encontra-se a *Sequência de atividades*. Dezesseis atividades estão apresentadas em sequência, possibilitando ao professor trabalhar com seus estudantes de forma gradativa sobre os conhecimentos que envolvem os números complexos. As atividades focam problemas históricos, representação geométrica e o uso da forma trigonométrica. Considerações didáticas e as respostas esperadas são apresentadas no final de cada atividade.

A Parte 4 apresenta o arquivo de *Aplicação dos Números Complexos na Geometria Fractal,* salvo nos formatos dos softwares PowerPoint e BrOffice Impress. O arquivo instrui o professor a realizar atividades com seus estudantes na sala informatizada, com o uso de planilhas eletrônicas e o software *Fractint*. Esse software permite uma dinâmica exploração visual dos fractais. A apresentação mostra como determinar pontos do plano complexo que pertencem aos conjuntos de Julia e ao conjunto de Mandelbrot com o uso de planilhas eletrônicas. Exemplos dessas planilhas se encontram nos formatos Excel e BrOffice Planilha.

A Parte 5 apresenta uma síntese dos capítulos 5 e 6 do filme *Dimensions*. Cada capítulo, de aproximadamente 14 minutos, é um excelente complemento ao aprendizado das operações e transformações dos números complexos representadas no plano de Argand-Gauss.

Destinado para cursos técnicos de eletricidade e para cursos superiores de física, matemática e engenharias, encontra-se, na Parte 6, a aplicação dos números complexos nos estudos de circuitos elétricos. O uso de fasores na análise de corrente alternada é focado para facilitar a resolução de problemas nos circuitos *RLC*.

Outras aplicações e informações históricas que complementam o estudo dos números complexos podem ser encontradas na dissertação do autor. Sugestões e críticas podem ser enviadas para o e-mail julianoeli@gmail.com. As citações presentes neste produto educacional estão registradas nas referências bibliográficas da dissertação do autor.

Espero que aproveitem e façam bom uso deste material!

Juliano Eli

SUMÁRIO

1. AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

Tempo estimado: 1 aula (40 a 45 minutos)

Se você não conseguir resolver alguma questão, escreva qual é a sua dúvida.

1) Calcule as seguintes potências:

a) $4^2 =$ ____

b) $5^2 =$____

c) $(-6)^2 =$____

d) $(-3)^2 =$____

2) Analisando os sinais dos resultados obtidos acima, o que apareceu mais: números positivos ou números negativos? Justifique sua resposta.

____

____

3) Calcule as raízes quadradas abaixo e justifique o resultado obtido:

a) $\sqrt{36} =$ ____

b) $\sqrt{16} =$ ____

c) $\sqrt{-25} =$ ____

4) É possível calcular a raiz quadrada de um número negativo? Justifique sua resposta.

____

____

5) Resolva as equações abaixo e escreva uma explicação sobre a resposta.

a) $x^2 + 9 = 0$

b) $x^2 - 4x + 5 = 0$

Considerações didáticas da Avaliação Diagnóstica ao professor:

Esta avaliação pode ser aplicada antes da sequência de atividades, para verificar as concepções que os estudantes trazem consigo sobre raízes quadradas de números negativos. Nesse caso, sugere-se que não seja informado aos estudantes que se trata do tema números complexos, a fim de não interferir nas respostas. Na conclusão da aplicação do produto educacional, essa mesma avaliação, pode ser utilizada como instrumento comparativo da aprendizagem. Na tabulação das respostas, sugere-se a criação de uma tabela comparativa dos testes: pré-teste e o pós-teste. A seguir são apresentadas algumas sugestões de classes das respostas dos estudantes para cada questão, porém outras poderão surgir na análise do professor. As classes sugeridas são objetivas e de fácil compreensão. Caso necessitem da descrição, podem ser encontradas no Capítulo 2 da dissertação do autor.

Questão	Categorias
1	a) Correto b) Erro no Sinal c) Incorreto d) Branco
2	a) Positivos: de acordo com regras dos reais b) Positivos: sem justificativa ou justificou por contagem c) Erraram d) Branco
3a e 3b	a) Correto b) Incorreto
3c	a) ±5: sem justificativa b) ±5: com justificativa c) 0: sem justificativa d) 0: com justificativa e) Não existe, sem mencionar os reais f) Não existe nos reais g) Dúvidas h) Nº Complexo/Usou *i* i)Branco.
4	a) Não existe, sem mencionar os reais b) Não existe nos reais c) Não, sem justificativa d) Sim, com justificativa nos reais e) Sim, sem justificativa f) Dúvidas h) Nº Complexo/Usou *i* i)Branco
5	a) Prosseguiu com $\sqrt{-}$ b) $\sqrt{-}$, não existe c) $\sqrt{-}$, parou d) Incorreto e) Incompleto f) Nº Complexo/Usou *i* g) Branco.

2. APRESENTAÇÃO INICIAL

Tempo estimado: 2 aulas (80 a 90 minutos)

Para esta aula faz-se necessário o uso do projetor multimídia. O arquivo está nos formatos PowerPoint 2010 (.ppsx) e BrOffice Impress (.odp), e pode ser acessado na Parte 2 do site https://sites.google.com/site/julianoeli/

Considerações didáticas da Apresentação Inicial ao professor:

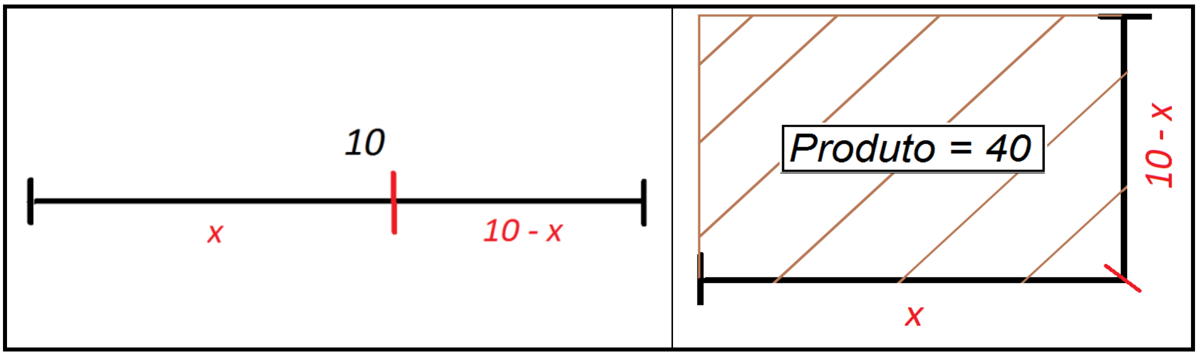
Esta apresentação introdutória sobre números complexos, contém questões elementares na formação conceitual, bem como informações históricas e de aplicabilidades dos números complexos que ajudam a dar respostas e motivos para estudá-lo. Quanto aos denominados *Desafios* (Desafio 1 e Desafio 2), que estão no início da apresentação, é recomendado que os estudantes exponham suas ideias e conjecturas, mantendo uma relação dialética em busca das respostas. O professor pode utilizar a apresentação como revisão aos conceitos e operações de potências quadradas, raízes quadradas e equações do 2º grau, até propiciar ao estudante o domínio e a tranquilidade de utilizar raízes quadradas de números negativos. Dependendo das dificuldades da turma, o professor poderá necessitar de mais tempo para intervenções.

3. ATIVIDADES SOBRE NÚMEROS COMPLEXOS

***Atividade 1:** Tempo estimado de aplicação: 25 a 30 minutos.*

Um problema clássico é apresentado na história da matemática: *Divida10 em duas partes, tal que o produto dessas partes seja 40.*

Figura 1 - Representação Geométrica do problema



a) Para entender o referido problema, complete a tabela abaixo: escolha valores reais para x e obtenha o seu complementar $10 - x$ cuja soma dessas duas partes é igual a dez. Depois determine a multiplicação dessas partes e verifique se o produto é igual a 40.

Soma = 10		*Função y = f(x) = x.(10 - x) Produto é igual a 40?*	*Pontos para o gráfico*
x	*10 - x*	*y = x.(10 - x)*	*(x, y)*
3	*7*	*3× 7 = 21, não!*	*(3,21)*
4,5	*5,5*	*4,5 × 5,5 = 24,75, não!*	*(4,5 , 24,75)*
12	*-2*	*12 × (-2) = -24, não!*	*(12, -24)*

b) Com os pontos da tabela acima, faça o gráfico da função $y = x.(10 - x)$ que fornece os valores do produto em relação a variável x.

Analisando a tabela anterior e o gráfico da função *y*, responda:

c) Esse problema possui solução no conjunto dos números reais? Justifique sua resposta.

A solução desse problema foi publicada pela primeira vez no livro *Ars Magna* (1545), por Girolamo Cardano (1501-1576). Ele apresenta a resposta que envolve raízes quadradas de números negativos, conhecidos hoje como *Números Complexos*: $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ e considera esses resultados como *números sofísticos*, tratando-os de *tão sutil quanto inútil*. (BOYER, 1996; MILIES, 1994).

d) Faça a verificação da solução de Cardano e confira se a soma de $5 + \sqrt{-15}$ com $5 - \sqrt{-15}$ é igual a 10 e se o produto entre eles é igual a 40.

Soma horizontal: $(5 + \sqrt{-15}) + (5 - \sqrt{-15}) =$

Produto horizontal: Resolva pela propriedade distributiva: $(5 + \sqrt{-15}) \times (5 - \sqrt{-15})$

Soma vertical: Você também pode utilizar o quadro abaixo que separa a parte real da parte imaginária para efetuar a soma.

	Parte Real	Parte imaginária
	5	$+\sqrt{-15}$
+	5	$-\sqrt{-15}$

Produto vertical: Utilize também o quadro abaixo para resolver a multiplicação:

	Parte Real	Parte Imaginária
	5	$+\sqrt{-15}$
×	5	$-\sqrt{-15}$

Analisando a resolução acima, responda:

e) Você conseguiu verificar se a resposta apresentada por Cardano estava correta? Justifique se a utilização de números complexos é viável para a solução do problema.

***Atividade 2:** Tempo estimado de aplicação: 15 a 20 minutos.*

A aceitação de raízes quadradas de números negativos é um fato marcante na história da matemática. Para o matemático Leonardo Euler (1707-1783), as respostas envolvendo números complexos, como na atividade anterior (dividir 10 em duas partes de tal forma que o produto seja 40), não eram aceitas para questões que remetessem às situações-problema. Ele operava com muita precisão com os números complexos e mostrava que às vezes, preferia contornar as dificuldades que os envolvessem "[...] alterando os valores numéricos dos problemas." (SILVA, 2009, p.47). Euler tratava os números complexos como "[...] uma espécie de números totalmente particular [...]." (EULER apud SILVA, 2009, p. 46). Ele contribuiu em reflexões sobre os mesmos, proporcionando avanços nos estudos desse conjunto numérico. Em seu livro *Introdução Completa à Álgebra,* publicado em alemão no ano de 1770, Euler propôs um problema semelhante aquele resolvido por Cardano: Dividir o número 12 em duas partes, tal que o produto dessas partes fosse 40. Ele chega à solução envolvendo números complexos conjugados: $6 + \sqrt{-4}$ e $6 - \sqrt{-4}$, e mesmo assim conclui que o problema é impossível de ser resolvido. Porém, observa que se a questão fosse dividir 12 em duas partes tal que a multiplicação delas fosse igual a 35, teria como resposta os números reais 7 e 5. (EULER, 1822).

Figura 2 – Representação geométrica do 1º caso do problema de Euler

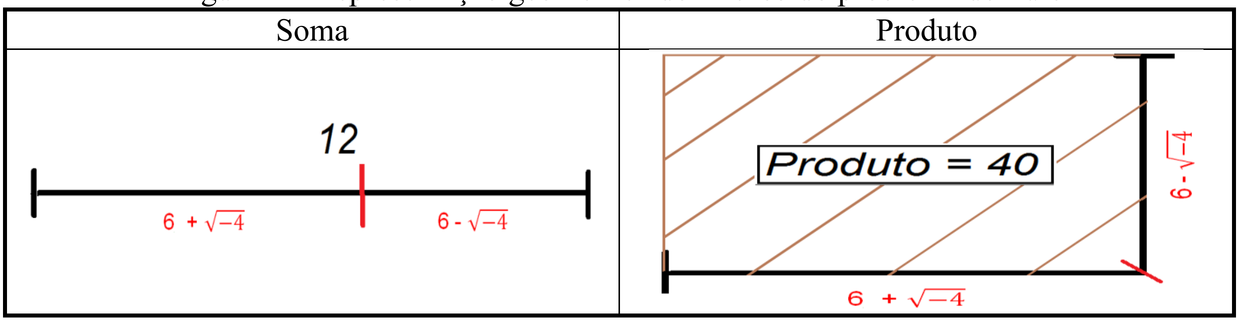
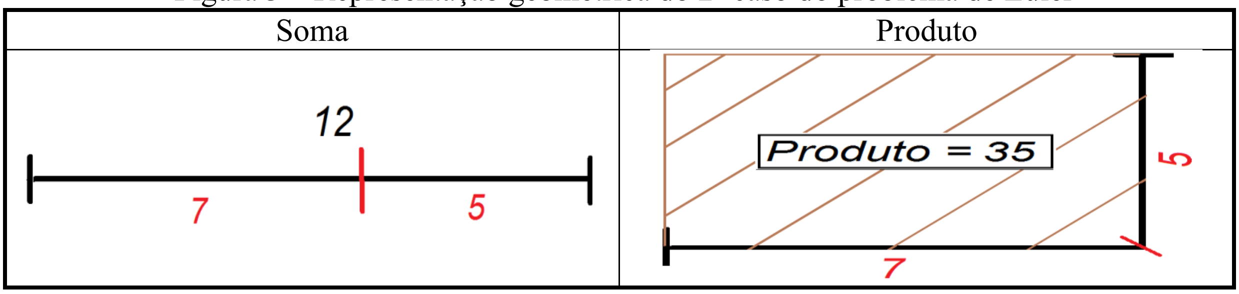


Figura 3 – Representação geométrica do 2º caso do problema de Euler



a) Faça a verificação do primeiro caso, ou seja; 12 separado em duas partes, tal que o produto seja igual a 40. Solução $6 + \sqrt{-4}$ e $6 - \sqrt{-4}$.

Soma horizontal: $(6 + \sqrt{-4}\,) + (6 - \sqrt{-4}) =$ ____

____

Soma vertical: Você também pode utilizar a tabela abaixo que separa a parte real da parte imaginária, para efetuar a mesma soma.

	Parte Real	Parte imaginária
	6	$+\sqrt{-4}$
+	6	$-\sqrt{-4}$

Produto horizontal: A ser resolvido pela propriedade distributiva: $(6 + \sqrt{-4}\,) \times (6 - \sqrt{-4}) =$

____

____

Produto vertical: Utilize também a tabela abaixo para resolver a mesma multiplicação:

	Parte Real	Parte Imaginária
	6	$+\sqrt{-4}$
×	6	$-\sqrt{-4}$

b) Apesar de envolver números complexos nas respostas, Euler considerava apenas o 2º caso como possível de solução. Escreva uma justificativa pessoal que possa descrever o pensamento de Euler sobre os números complexos, chamados de *quantidades imaginárias* na sua época.

____

____

____

____

____

____

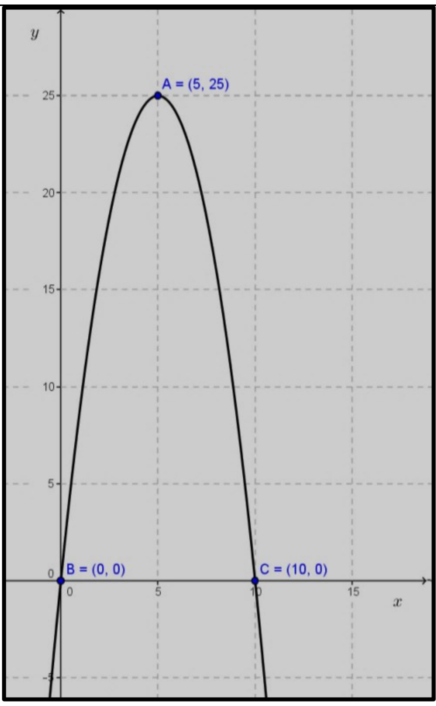
Considerações didáticas das Atividades 1 e 2 ao professor:

Por se tratar de duas atividades semelhantes, é interessante que os estudantes as façam na mesma aula. O objetivo dessas atividades consiste na causa reflexiva e adaptativa ao uso de raízes quadradas de números negativos. Deve ser evidenciada a verificação da soma, onde a parte real deve ser somada com a parte real e do mesmo modo as partes imaginárias. Também se faz necessário a intervenção do professor, para que os estudantes percebam, na verificação do produto, que o quadrado de um número imaginário puro, torna-se um número real nos seguintes casos: $\left(\sqrt{-15}\right)^2$ e $\left(\sqrt{-4}\right)^2$. A primeira atividade pode demandar mais tempo, por se tratar do primeiro contato dos estudantes com os números complexos e por estar relacionada ao seu contexto histórico.

Respostas da atividade 1:

a) São apresentados alguns pontos que facilitam o entendimento no gráfico. Os estudantes poderão escolher números decimais e inclusive números negativos, até perceberem que o maior produto de números reais é igual a 25.

Soma = 10		*Função y = f(x) = x.(10 - x)* *Produto é igual a 40?*	*Pontos para o gráfico*
x	*10 - x*	*y = x.(10 - x)*	*(x, y)*
0	*10*	*0 × 10 = 0, não!*	*(0,0)*
5	*5*	*5 × 5 = 25, não!*	*(5, 25)*
10	*0*	*10 × 0 = 0, não!*	*(10, 0)*

b) 

c) Espera-se que os estudantes percebam que não há uma solução real para o problema, vindo a notar a necessidade de outro conjunto numérico que satisfaça a solução.

d) Soma horizontal: $(5 + \sqrt{-15}) + (5 - \sqrt{-15}) = 5 + 5 + \sqrt{-15} + (-\sqrt{-15}) = 10 + 0 = 10$

Produto horizontal: $(5 + \sqrt{-15}) \times (5 - \sqrt{-15}) = 25 - 5\sqrt{-15} + 5\sqrt{-15} - \left(\sqrt{-15}\right)^2 = 25 - (-15) = 25 + 15 = 40$.

Soma vertical:

	Parte Real	Parte imaginária
	5	$+\sqrt{-15}$
+	5	$-\sqrt{-15}$
	10	0

Produto vertical:

	Parte Real	Parte Imaginária
	5	$+\sqrt{-15}$
×	5	$-\sqrt{-15}$
	$-\left(\sqrt{-15}\right)^2 = -(-15) = 15$	$-5\sqrt{-15}$
	25	$5\sqrt{-15}$
	40	0

e) Nesta questão espera-se que os estudantes consigam operar com as raízes quadradas de números negativos, e que respondam subjetivamente sobre a utilização das mesmas. Caso haja alguma dúvida, o professor poderá intervir e criar uma discussão.

<u>Respostas da atividade 2</u>:

a) Soma horizontal: $(6 + \sqrt{-4}\,) + (6 - \sqrt{-4}) = 6 + 6 + \sqrt{-4} + \left(-\sqrt{-4}\right) = 12 + 0 = 12$

Produto horizontal: $(6 \; + \sqrt{-4}\,) \times (6 - \sqrt{-4}) = 36 - 6\sqrt{-4} + 6\sqrt{-4} - \left(\sqrt{-4}\right)^2 = 36 - (-4) =$ $36 + 4 = 40$.

Soma vertical:

	Parte Real	Parte imaginária
	6	$+\sqrt{-4}$
+	6	$-\sqrt{-4}$
	12	0

Produto vertical:

	Parte Real	Parte Imaginária
	6	$+\sqrt{-4}$
×	6	$-\sqrt{-4}$
	$-\left(\sqrt{-4}\right)^2 = -(-4) = 4$	$-6\sqrt{-4}$
	36	$6\sqrt{-4}$
	40	0

b) Euler trabalhou intensamente com os números complexos, mas para ele, os resultados de situações-problema, deveriam ser respondidos apenas com números reais.

<u>Observação:</u> As três atividades a seguir (3, 4 e 5) podem ser representadas geometricamente no plano Cartesiano ($\mathbb{R}^2$), porém enfatiza-se a utilização do plano complexo a fim de que os estudantes verifiquem diferenças e semelhanças com o plano cartesiano.

<u>***Atividade 3:*** *Tempo estimado de aplicação: 7 a 10 minutos.*</u>

Os números complexos $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 5 + 2i$ e $z_3 = 2 + 6i$, em que i é a unidade imaginária, representados geometricamente no plano de Argand-Gauss, definem, respectivamente, o triângulo retângulo ABC. Desenhe o triângulo no referido plano e calcule a sua área.

(Questão adaptada de Smole e Diniz, 2010, p. 245, Cefet- MG)

Considerações didáticas da Atividade 3 ao professor:

Esta é uma atividade elementar de representação geométrica e pode ser adaptada para ampliar a exploração no plano complexo. A presença dos erros cometidos pelos estudantes é fundamental para diagnosticar as dificuldades e auxiliar o professor nas estratégias de ensino.

Resposta da atividade 3:

$Área = \frac{base \times altura}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = \frac{12}{2} = 6$ unidades de área.

Atividade 4: *Tempo estimado de aplicação: 15 minutos.*

É comum, em física, estudar o centro de massa de um corpo, aproximadamente plano, considerando-o contido no plano de Argand-Gauss. Dessa forma, define-se o centro de massa de um conjunto de pontos materiais de massas m_1, m_2, m_3 localizadas, respectivamente, nas imagens dos números complexos z_1, z_2 e z_3 como a imagem do número complexo z dado por:

$$z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

De acordo com essa ideia, considerando três pontos materiais de massas 2kg, 3kg e 5kg localizados no plano de Argand-Gauss nos afixos dos complexos $z_1 = 6 + 3i$, $z_2 = -2 + 4i$ e $z_3 = 6i$, determine o centro de massa desse conjunto de pontos e faça a representação geométrica desses afixos juntamente com o centro de massa no plano de Argand-Gauss.

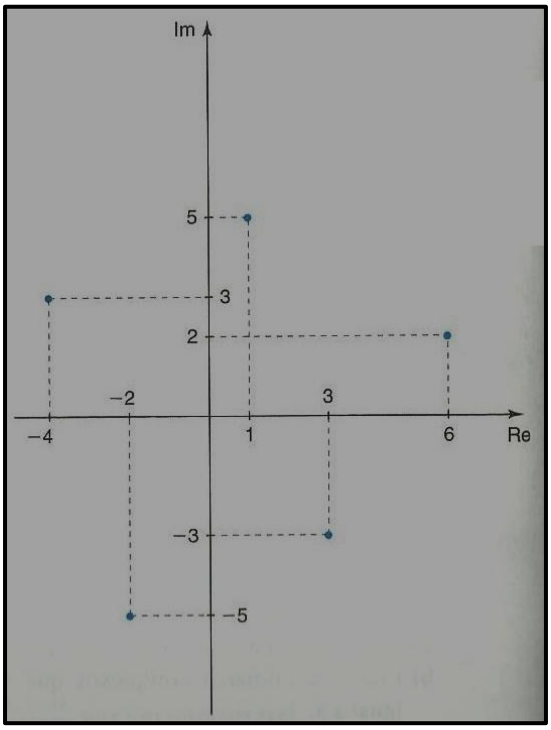
(*Nota:* O **centro de massa** de um corpo é o ponto onde se considera concentrada toda a massa do corpo, para simplificação de cálculos.)

(Questão nº 26 adaptada de PAIVA, M., 2009, p. 146)

Atividade 5: *Tempo estimado de aplicação: 15 minutos.*

A definição de centro de massa z, apresentada no exercício anterior, é estendida para qualquer número n de pontos materiais, com $n \in$ IN*, de massas m_1, m_2, m_3, ..., m_n localizados, respectivamente, em n pontos do plano complexo, imagens z_1, z_2, z_3, ..., z_n, isto é:

$$z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \cdots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}$$

De acordo com essa ideia, considere cinco pontos materiais, de mesma massa m, localizados nas posições indicadas no plano complexo abaixo. Determine o número complexo que representa o centro de massa do sistema constituído por esses cinco pontos materiais e em seguida, localize-o no próprio plano complexo.	Figura 4 – Determinação do centro de massa  Fonte: PAIVA (2009, p. 146)

(Questão nº 27 adaptada de PAIVA, M., 2009, p. 146)

Considerações didáticas das Atividades 4 e 5 ao professor:

Por tratarem do mesmo assunto, elas complementam o entendimento de centro de massa como aplicação dos números complexos na física. Por isso, compensa resolvê-las na mesma aula. É necessário que o professor faça uma breve explicação do que é centro de massa, no início das atividades. Ele pode associar o problema, ao exemplo prático, como o equilíbrio de uma bandeja carregada de copos, e comentar sobre o centro de equilíbrio da bandeja. Os estudantes poderão necessitar de esclarecimentos na atividade 5, na mudança dos números complexos da representação geométrica para a representação algébrica, e da utilização de uma massa comum para todos os pontos, podendo fazer o uso de uma letra qualquer, ou de um valor numericamente hipotético. Nesse último caso, o número *um* facilita os cálculos, mas espera-se que os próprios estudantes apresentem esta conclusão.

Resposta da atividade 4:

Centro de massa $z = \frac{3}{5} + \frac{24}{5}i$ ou $z = 0{,}6 + 4{,}8i$

Resposta da atividade 5:

Centro de massa $z = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$ ou $z = 0{,}8 + 0{,}4i$

Atividade 6: *Tempo estimado de aplicação: 10 a 15 minutos.*

João desenhou um mapa no quintal de sua casa, onde enterrou um cofre. Para isso, usou o plano complexo de Argand-Gauss. Nesse sistema, cada ponto (x, y) representa um número complexo $z = x + yi$, em que x e y $\in$ IR e $i^2 = -1$. Para indicar a posição do cofre (x_1, y_1), João escreveu a seguinte observação no canto do mapa: $x_1 + iy_1 = (1 + i)^3$. Calcule:

a) as coordenadas de (x_1, y_1);

b) A distância do cofre em relação à origem do plano de Argand-Gauss, o ângulo de localização do cofre em relação ao eixo x e a representação geométrica nesse plano.

(Questão nº16 adaptada de IEZZI et al; 2010, p. 158 – UE-RJ)

Considerações didáticas da Atividade 6 ao professor:

É necessário mostrar como se resolvem as potências quadradas e cúbicas de números complexos do tipo $(a + bi)^n$. Essa abordagem pode acontecer previamente à atividade, ou depois que os estudantes conjecturarem sobre o problema em questão e apresentarem suas resoluções. Após a resolução da questão *b*, é importante destacar que a referida distância é chamada de *módulo* e que o ângulo é chamado de *argumento principal* de um número complexo.

Respostas da atividade 6:

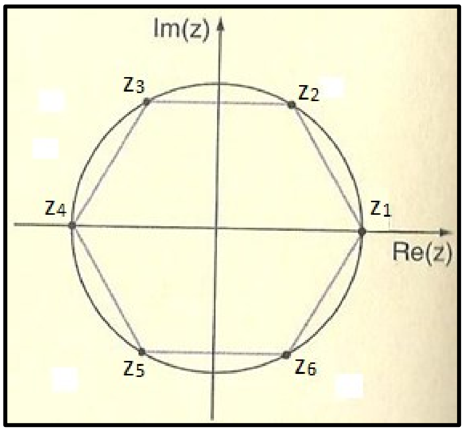
a) $-2 + 2i$ ou $(-2, 2)$

b) Distância $2\sqrt{2}$ ou aproximadamente 2,82 unidades de medida. O ângulo será de 135º.

Atividade 7: *Tempo estimado de aplicação: 6 a 10 minutos.*

A figura apresenta no plano complexo, um hexágono regular inscrito em uma circunferência. Os vértices desse hexágono são afixos dos números complexos z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 e z_6.

Figura 5 – Hexágono Regular



Fonte: Elaborado pelo autor (2013)

Determine o argumento principal desses afixos e indique o valor dos argumentos no próprio hexágono.

(Questão nº 59 adaptada de IEZZI et al; 2010, p. 142)

Considerações didáticas da Atividade 7 ao professor:

Por se tratar apenas da determinação de ângulos, os estudantes poderão resolver a questão de maneiras diferentes. No caso de dúvidas, o professor poderá pedir para que os estudantes verifiquem qual é o ângulo do primeiro afixo no sentido anti-horário. Ou seja, ele está sobre o eixo real e mede zero grau. Em seguida, para descobrir os demais, eles precisam perceber que os seis pontos estão fixados em distâncias de arcos uniformes, sobre a circunferência de 360º, correspondendo a um arco de 60º de distância entre um afixo e outro.

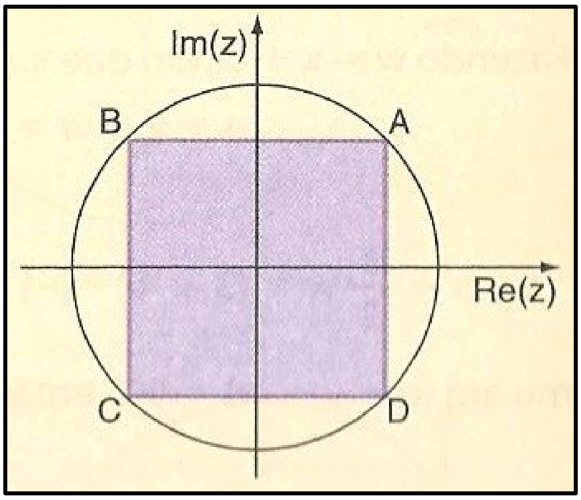
Respostas da atividade 7:

$\theta_1 = 0^\circ$; $\theta_2 = 60^\circ$; $\theta_3 = 120^\circ$; $\theta_4 = 180^\circ$; $\theta_5 = 240^\circ$; $\theta_6 = 300^\circ$.

Atividade 8: *Tempo estimado de aplicação:10 minutos.*

Sabe-se que a medida do lado do quadrado ABCD é 10. Expresse as medidas dos ângulos dos afixos A, B, C e D (argumentos) e as distâncias entre os afixos até a origem (módulos). Indique o valor dos argumentos na própria figura do quadrado.

Figura 6 – Quadrado com centro na origem do plano complexo



Fonte: IEZZI et al (2010, p. 146)

(Questão nº 67 adaptada de IEZZI et al; 2010, p. 146)

Considerações didáticas da Atividade 8 ao professor:

Esta é outra atividade que proporciona continuidade ao entendimento sobre argumento principal. Por isso, é relevante resolvê-las na mesma aula, as atividades 7 e 8. Por hábito, alguns estudantes poderão pensar que 360º dividido pelos quatro vértices do quadrado, é igual a 90º, e logo os argumentos serão 90º, 180º, 270º e 360º. Mesmo cometendo esse tipo de erro, é interessante que os estudantes apresentem primeiro as suas respostas, e com a ajuda do professor, percebam o seu próprio erro.

Resposta da atividade 8:

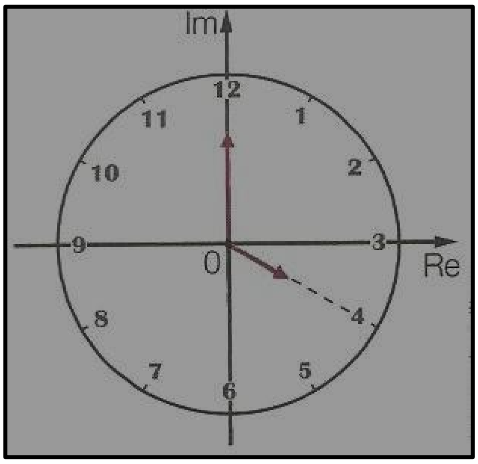
$\theta_A = 45º$; $\theta_B = 135º$; $\theta_C = 225º$; $\theta_D = 315º$

$|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 5\sqrt{2} = 7{,}05$ unidades de medida.

Atividade 9: *Tempo estimado de aplicação: 15 minutos.*

Observe a representação de um relógio em um plano complexo. Considerando que o comprimento do ponteiro dos minutos seja de 10 cm e o das horas 6 cm, resolva:

Figura 7 – Relógio marcando 16 horas



Fonte: SOUZA (2010, p. 245)

a) Em relação à hora marcada no relógio, determine o número complexo z_1, na forma trigonométrica, cuja representação geométrica corresponde ao ponto extremo do ponteiro das horas. Do mesmo modo, determine z_2 que corresponde ao ponto extremo do ponteiro dos minutos.

b) Após 60 minutos do horário registrado acima, quais as representações de z_1 e z_2 na forma trigonométrica?

(Questão nº 68 adaptada de SOUZA, J. R., 2010, p. 245)

Considerações didáticas da atividade 9 ao professor:

Esta questão envolve a conversão geométrica de um afixo à forma trigonométrica do número complexo $z = \rho.(cos\theta + i.sen\theta)$. É importante explicar, conforme o tempo que for necessário, para que os estudantes entendam esta representação. Para complementar esta questão, pode-se perguntar: como encontrar os valores de a (real) e b (imaginário) neste relógio, conhecidos apenas os ângulos e os comprimentos dos ponteiros? Essa questão colabora no entendimento do uso da forma trigonométrica, bem como na autonomia nas resoluções das questões procedentes. Caso necessitem, poderão utilizar a tabela trigonométrica que está anexa ao final das atividades – Parte 3.

Respostas da atividade 9:

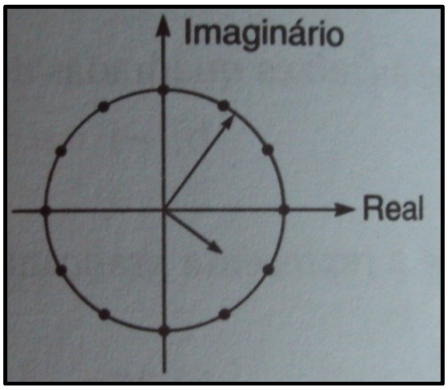
a) $z_1 = 6. (cos\ 330^o + i\ .\ sen\ 330^o)$ $z_2 = 10. (cos\ 90^o + i\ .\ sen\ 90^o)$

b) $z_1 = 6. (cos\ 300^o + i\ .\ sen\ 300^o)$ $z_2 = 10. (cos\ 90^o + i\ .\ sen\ 90^o)$

Atividade 10: *Tempo estimado de aplicação: 15 minutos.*

Admita que o centro do plano complexo Argand-Gauss coincida com o centro de um relógio de ponteiros, como indica a figura:

Figura 8 – Relógio centrado no plano complexo



Fonte: GIOVANNI; BONJORNO (2005, p. 162)

Se o ponteiro dos minutos tem 2 unidades de comprimento, às 11 h 55, o ponto extremo desse ponteiro pode ser representado por um número complexo na forma a + bi, ou na forma de par ordenado (a, b). Determine esse número.

(Questão nº 22 adaptada de GIOVANNI e BONJORNO, 2005, p. 162-FGV-SP)

Considerações didáticas da Atividade 10 ao professor:

Os valores de seno e cosseno dos ângulos serão necessários. Esta é outra atividade complementar ao entendimento da forma trigonométrica ou polar de um número complexo e colabora nas atividades posteriores. Ela pode revelar as dificuldades dos estudantes, quanto ao uso das razões seno e cosseno. Os estudantes conjecturaram de várias formas a multiplicação pela propriedade distributiva. A intervenção do professor, não deve evitar o erro de forma corretiva, pois o processo de errar e de perceber o erro é importante para que o próprio estudante, assim, desenvolva a sua autonomia nas resoluções.

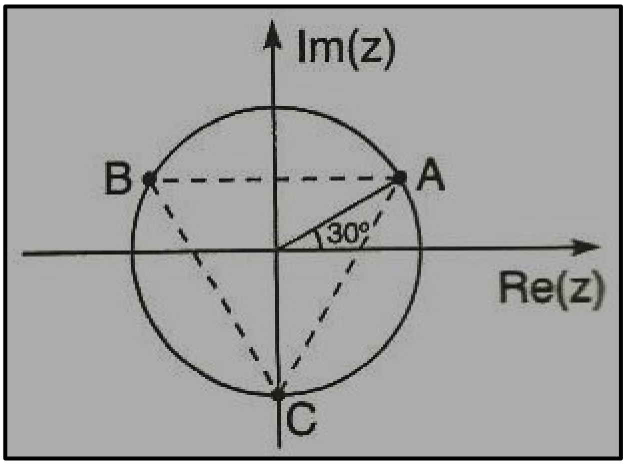
Resposta da atividade 10:

$z = -1 + \sqrt{3}i$

Atividade 11: *Tempo estimado de aplicação: 15 minutos.*

Na figura abaixo tem-se o triângulo equilátero ABC, inscrito em uma circunferência de raio 1 e centro na origem do plano de Argand-Gauss. Os pontos *A*, *B* e *C* são as respectivas imagens dos números complexos z_1, z_2 e z_3.

Figura 9 – Triângulo regular inscrito



Fonte: GIOVANNI e BONJORNO (2005, p. 163)

Determine a forma algébrica dos vértices do triângulo.

(Questão nº 36 adaptada de GIOVANNI; BONJORNO, 2005, p. 163-UFS)

Considerações didáticas da Atividade 11 ao professor:

Análoga à atividade anterior, esta questão proporciona a compreensão e a necessidade das formas de representação de um número complexo. O professor pode trabalhar de forma construtiva com os erros que surgirem. Alguns são provenientes de operações básicas envolvendo frações.

Respostas da atividade 11:

$$A = 1.(cos\ 30° + i.sin\ 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$B = 1.(cos\ 150° + i.sin\ 150°) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

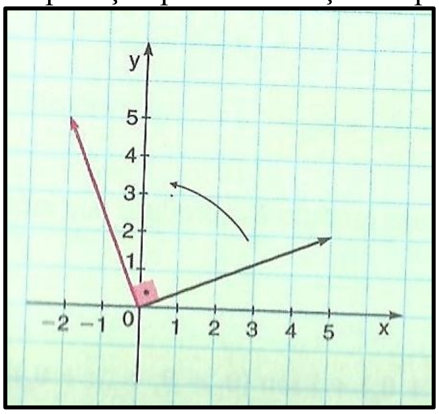
$$C = 1.(cos\ 270° + i.sin\ 270°) = -i$$

Atividade 12: *Tempo estimado de aplicação: 32 minutos.*

Os números complexos são utilizados na realização de operações geométricas como na forma de vetores. Veja: • Multiplicar por *i*, corresponde a girar 90º, no sentido positivo ao redor da origem, a imagem do complexo pelo qual se multiplica *i*.

$$(5 + 2i).\mathbf{i} = 5i + 2i^2 = -2 + 5i$$

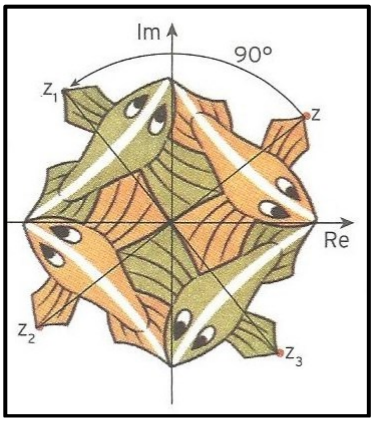
Figura 10 – Multiplicação por i e a rotação no plano complexo



Fonte: GIOVANNI; BONJORNO (2005, p. 153)

A rotação de imagens foi um dos recursos utilizado pelo artista Maurits C. Escher, em suas obras, como no quadro a seguir, denominado *Limite circular III*. Observe que em cada quadrante há uma repetição do mesmo peixe com a rotação de 90º em torno da origem.

Figura 11 – Obra do artista Escher



Fonte: SMOLE; DINIZ (2010, p. 252)

O ponto z é um número complexo de argumento igual a 45º. O ponto z_1 pode ser encontrado com a rotação de 90º, basta multiplicar z por i. Ao rotacionar z_1 em 90º, obtém-se z_2, e rotacionando z_2 em 90º obtém-se z_3. Portanto:

$$z_1 = i.z$$

$$z_2 = i.z_1$$

$$z_3 = i.z_2$$

Considerando que a distância da origem do plano de Argand-Gauss até o afixo z é igual a 2 cm, onde o ângulo correspondente mede 45º em relação à origem e o eixo real, responda:

a) Qual o argumento de z_2 e o seu módulo?

b) Represente z_2 na forma algébrica.

c) Qual é a parte imaginária de z_2 e o que a faz ser diferente de um número real?

d) Seja o triângulo ABC de vértices A(2, 1), B(1, 2) e C(3, 4), determine as coordenadas dos vértices do triângulo A'B'C', obtidos pela rotação do triângulo ABC em 270º, em torno da origem, no sentido anti-horário. Em seguida construa os dois triângulos no plano complexo.

(Questão adaptada de: SMOLE; DINIZ, 2010, p. 252; GIOVANNI; BONJORNO, 2005, p. 153; Questão R24 de SOUZA, J. R., 2010, p. 249)

Considerações didáticas da Atividade 12 ao professor:

Esta questão requer um tempo maior para leitura, interpretação e assimilação de conhecimentos quanto à aplicação geométrica de números complexos, como na rotação em 90º no sentido anti-horário de pontos, quando multiplicado por i. Por isso, manifestações de dúvidas poderão surgir, pois é o primeiro contato com a aplicação de rotação geométrica. Caso o professor tenha mais tempo para abordar esse assunto, ele poderá explorar outras atividades de rotação no plano complexo, ou se preferir, apresentar o vídeo *Dimensions*, Capítulo 5 e 6, para complementar o entendimento sobre rotações (ver Parte 5 do presente produto educacional). Na questão *b*, o estudante necessitará dos valores de seno e cosseno de 225º (tabela trigonométrica anexa). A questão *c* mostrará até o momento das atividades, o reflexo da construção conceitual dos estudantes sobre os números complexos. A última questão solicita a construção dos triângulos no plano que poderá demandar mais tempo.

Respostas da atividade 12:

a) $\theta_2 = 225º$ $\rho_2 = 2$

b) $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

c) Parte imaginária de z_2 é $-\sqrt{2}$.

Se $z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ equivale a dizer que $z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}.\sqrt{-1} = -\sqrt{2} - \sqrt{-2}$. Espera-se que os estudantes destaquem o aparecimento de $i = \sqrt{-1}$, ou da raiz quadrada de um número negativo, observando que z_2 pertence a um conjunto mais amplo que os reais.

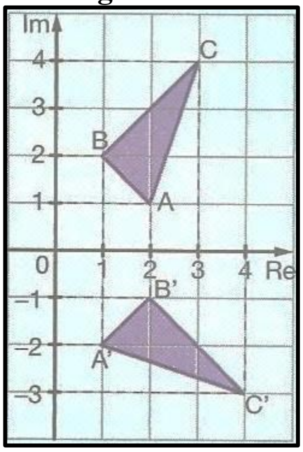
d) rotação de 270º equivale à multiplicação por $i.i.i = i^3 = -i$.

$A' = (2 + i).(-i) = 1 - 2i \Rightarrow (1, -2)$

$B' = (1 + 2i).(-i) = 2 - i \Rightarrow (2, -1)$

$C' = (3 + 4i).(-i) = 4 - 3i \Rightarrow (4, -3)$

Figura 12 - Triângulo rotacionado em 270º

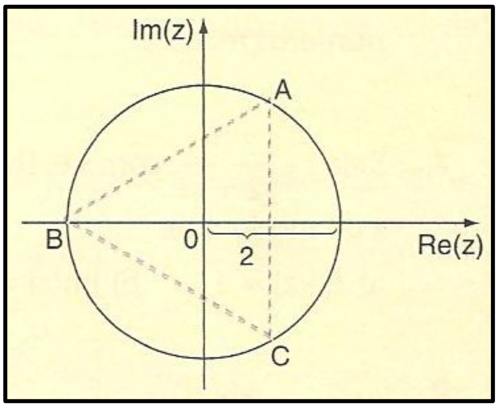


Fonte: SOUZA (2010, p. 249)

Atividade 13: *Tempo estimado de aplicação: 15 minutos.*

Na radiciação de números complexos, $\sqrt[n]{z}$, as raízes n-ésimas de z representam um polígono regular de n lados, com o raio igual $\sqrt[n]{|z|}$, no plano complexo. Se na figura os pontos A, B e C são os afixos da raiz cúbica de – 8, obtenha a forma algébrica dessas raízes.

Figura 13 – Representação geométrica no plano complexo da raiz cúbica de – 8.



Fonte: IEZZI et al, 2010, p. 157

(Questão nº 79 adaptada de IEZZI et al; 2010, p. 157)

Considerações didáticas da Atividade 13 ao professor:

É necessário referir que na radiciação dos complexos representada por $\sqrt[n]{z}$, as raízes de z representam um polígono regular de *n* lados com o raio igual a $\sqrt[n]{|z|}$. Os estudantes necessitarão consultar os valores de seno e cosseno de 60º, 180º e 300º (tabela trigonométrica anexa).

Respostas da atividade 13:

A $(1, \sqrt{3})$ B(–2, 0) C$(1, -\sqrt{3})$

Atividade 14: *Tempo estimado de aplicação: 20 minutos.*

A prefeita Maria decidiu escolher três das comunidades carentes do município, nas quais seriam construídos postos de saúde. O número de comunidades carentes e a disposição geográfica dessas comunidades são representadas no plano de Argand-Gauss pelos resultados da $\sqrt[6]{1}$, ou seja, representam os seis vértices de um hexágono regular com raio 1.

a) Faça a representação geométrica dessas comunidades carentes no plano de Argand-Gauss.

b) Calcule o número de possibilidades de escolha das três comunidades.

c) Calcule o número de possibilidades de escolha das três comunidades, sabendo que essas comunidades devem ser equidistantes entre si.

(Questão nº 35 adaptada de GIOVANNI e BONJORNO, 2005, p. 163-UFPB)

Considerações didáticas da Atividade 14 ao professor:

A atividade anterior ajuda no esclarecimento da presente atividade, devido à representação geométrica da radiciação de números complexos. Por isso, é importante solicitar que resolvam as duas atividades na mesma aula. Os estudantes poderão solicitar a fórmula da combinação de n elementos tomados p a p: $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!.(n-p)!}$

Respostas da atividade 14:

a) Os vértices de um hexágono representam as raízes sextas do número *um*: $\sqrt[6]{1}$. Portanto, o módulo será igual a um e o espaçamento angular entre os vértices será de 60º. Na forma polar ($z = \rho \angle \theta$) os vértices serão: $z_1 = 1 \angle 0°$; $z_2 = 1 \angle 60°$; $z_3 = 1 \angle 120°$; $z_4 = 1 \angle 180°$; $z_5 = 1 \angle 240°$; $z_6 = 1 \angle 300°$.

b) $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!.(6-3)!} = 20\, possibilidades$

c) Duas possibilidades.

Atividade 15: *Tempo estimado de aplicação: 10 minutos.*

Por que a necessidade das três formas de expressão para os complexos?

$$z = (x, y) = x + yi = \rho(\cos \theta + i \text{ sen } \theta)$$

(Questão de IEZZI et al; 2010, p. 155)

Considerações didáticas da Atividade 15 ao professor:

A presente atividade objetiva saber do estudante, sua análise pessoal quanto a necessidade de se trabalhar as três formas representativas de um número complexo. Pode ser considerada como uma questão que visa mostrar ao professor se a sequência de atividades está indo de acordo com os objetivos de aprendizagem, e/ou se há a necessidade de mudar algo na prática de ensino. Essa questão oportuniza notar nas respostas, se os estudantes percebem que, dependendo do problema, há uma constante mudança de representação, inclusive algumas que necessitam das três formas.

Respostas da atividade 15:

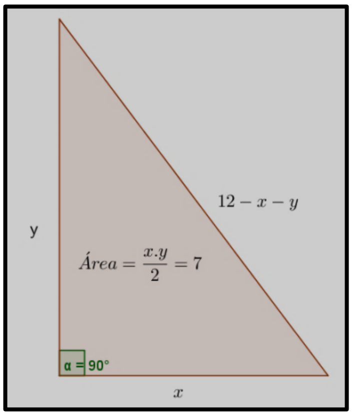
Espera-se que os estudantes discutam entre eles e o professor, sobre a finalidade de cada representação. A forma de pares ordenados $z = (x , y)$ facilita a representação geométrica dos complexos e a operar na forma de vetores. A forma retangular ou algébrica $z = x + yi$

aparece nas operações com números reais e equações. A forma trigonométrica $z = \rho(\cos \theta + i \text{ sen } \theta)$ facilita operações de potenciação, radiciação, multiplicação e divisão.

Atividade 16: *Tempo estimado de aplicação: 25 a 30 minutos.*

Aproximadamente em 275 d.C, tem-se o registro do trabalho de Diophanto de Alexandria em sua *Arithmetica* (MILIES, 1993; NAHIN, 2007), considerando o seguinte problema: “Um triângulo retângulo tem área igual a 7 e seu perímetro é de 12 unidades. Encontre o comprimento dos seu lados.”

Figura 14 – O problema do triângulo proposto por Diophanto de Alexandria



Fonte: Elaborado pelo autor

Se *x* e *y* são os comprimentos dos catetos do triângulo, a área pode ser calculada por:

$$A = \frac{x.y}{2} = 7$$

Pela fórmula de Pitágoras, tem-se:

$$x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2$$

Isolando y na primeira equação e substituindo na segunda, a equação encontrada é:

$$24x^2 - 172x + 336 = 0.$$

Cujas raízes são números complexos: $x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}$

Caso Diophanto considerasse a área desse triângulo igual a **seis** unidades de área, o resultado seria uma terna pitagórica. Nesse caso, determine os valores dessa terna pitagórica, por tentativas, ou se preferir, resolva através de uma equação. Compare os resultados com o problema original proposto por Diophanto.

Considerações didáticas da Atividade 16 ao professor:

O caminho para a resolução deste problema por tentativa é mais fácil do que resolver a própria equação. Pois, a área tem um valor absolutamente baixo, e a terna pitagórica de números inteiros com os menores valores é composta por 3, 4 e 5, ou seja, a solução do problema. Porém, a questão de contexto histórico da época de Diophanto pode levar o estudante a conjecturar que a variação em uma unidade de área no triângulo, torna impossível a solução no conjunto dos reais. Observa-se que o enunciado e a representação geométrica da atividade número três, revela a resposta para esta atividade. Dessa forma, pode-se propor a mesma como desafio complementar à atividade três.

Resposta da atividade 16:

Se $A = \frac{x.y}{2} = 6$ e $x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2$

Isolando y na primeira equação e substituindo na segunda tem-se:

$$y = \frac{12}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 + \left(\frac{12}{x}\right)^2 = \left(12 - x - \frac{12}{x}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{144}{x^2} = \left(\frac{12x - x^2 - 12}{x}\right)^2$$

$$\frac{x^4 + 144}{x^2} = \frac{x^4 - 24x^3 + 168x^2 - 288x + 144}{x^2}$$

$$-24y^3 + 168y^2 - 288y = 0 \quad \text{dividindo os termos por } (-24\,y)$$

$$y^2 - 7y + 12y = 0$$

$$y' = 3 \Rightarrow x' = 4$$

$$y'' = 4 \Rightarrow x'' = 3$$

Logo os valores dos catetos serão 3 e 4, e a hipotenusa será 5.

Referências:

EULER, Leonard. **Elements of álgebra.** 3rd. ed. Londres: Printed for Longman, 1822. Disponível em < http://math.dartmouth.edu/~euler/pages/E387.html >. Acesso em 18 mar. 2012.

GIOVANNI, J. R. & BONJORNO, J. R. **Matemática completa.** 2 ed. São Paulo: FTD, 2005.

IEZZI, G. & et al. **Matemática:** ciências e aplicações. 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

MILIES, César Polcino. A emergência dos números complexos. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo: n.24, p.5-15, jul. 1993.

NAHIN, Paul J. **An imaginary tale:** the story of $\sqrt{-1}$. Princeton: Princeton University, 2007.

PAIVA, Manoel. **Matemática.** São Paulo: Moderna, 2009.

SILVA, C.M.S. O livro Didático mais popular de Leonhard Euler e sua repercussão no Brasil. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Rio Claro, v. 9, n. 17, p. 33-52, abr./set. 2009.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. **Matemática**: ensino médio. 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010. v. 3

SOUZA, J. R. **Novo olhar matemática.** 1 ed. São Paulo: FTD, 2010. v. 3

Tabela Trigonométrica

	θ em graus	**θ em radianos**	**sen θ**	**cos θ**	**tg θ**
	0º	0	0	1	0
1º QUADR.	30º	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
	45º	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
	60º	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
	90º	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∄
2º QUADR.	120º	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
	135º	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
	150º	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
	180º	π	0	-1	0
3º QUADR.	210º	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
	225º	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
	240º	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
	270º	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	∄
4º QUADR.	300º	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
	315º	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
	330º	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
	360º	2π	0	1	0

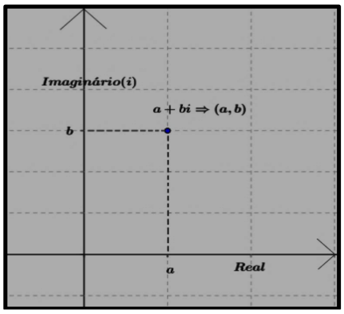
NÚMEROS COMPLEXOS – Tabela Resumo

$$z = a + b\sqrt{-1}$$

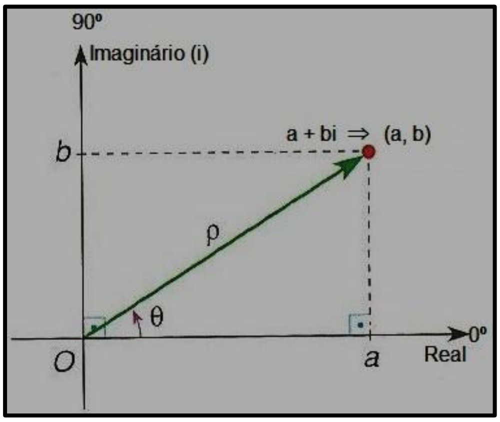
ou $z = a + bi$ onde $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária $\Rightarrow i^2 = -1$

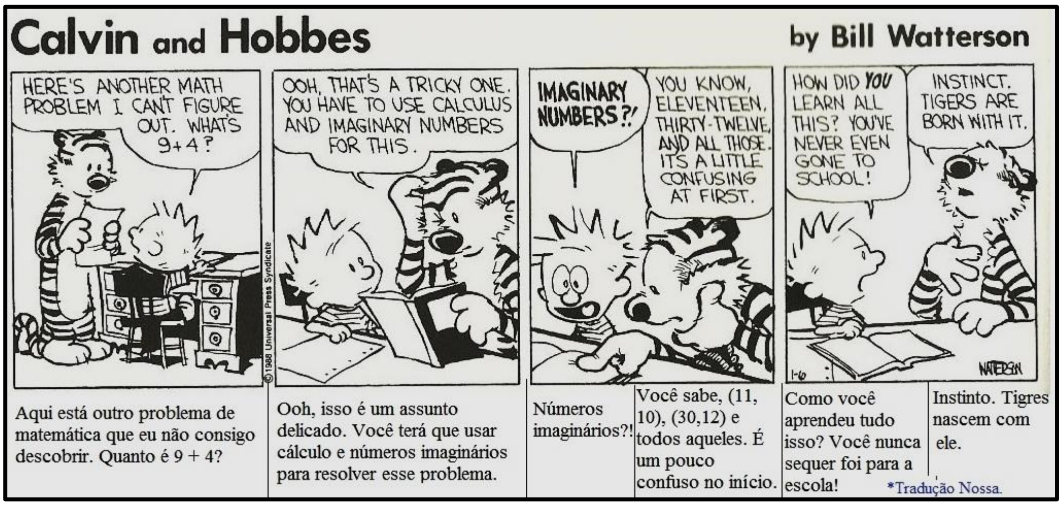
$a \rightarrow$ Parte Real $\quad$ $b \rightarrow$ Parte Imaginária

Representação Geométrica de um Número Complexo no Plano de Argand-Gauss:



$z = a + bi$	(a, b)	$z = \rho.(cos\theta + i.sen\theta)$
Forma algébrica	Par ordenado	Forma trigonométrica ou polar

ρ (rô) é o **módulo** de um número complexo e representa a distância entre o ponto (a, b) e a origem (0,0) no plano complexo.	$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$	
θ (theta) é o **argumento principal** de um número complexo e representa o ângulo entre o eixo real e o segmento que define o módulo, no sentido anti-horário.	$0^\circ \leq \theta < 360^\circ$	

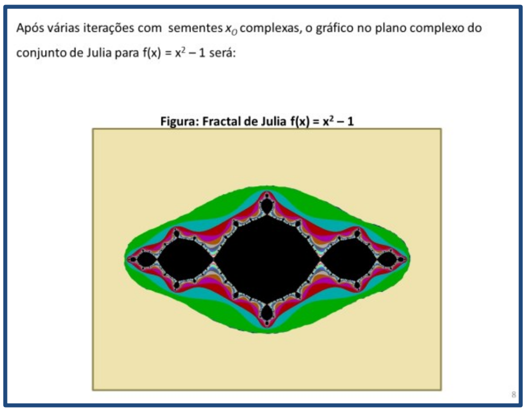


Fonte: NAHIN (2007)

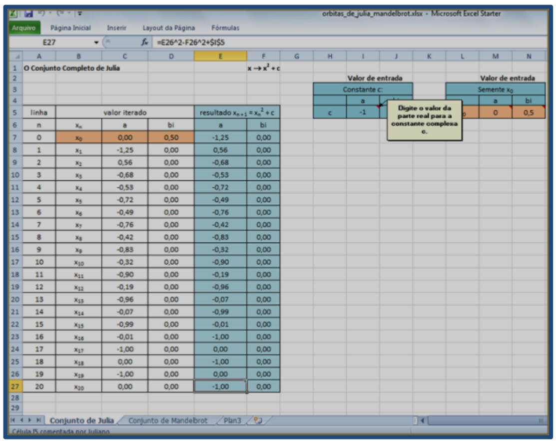
4. APLICAÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS NA CONSTRUÇÃO DOS CONJUNTOS DE JULIA E DO CONJUNTO DE MANDELBROT

O tempo estimado para esta atividade pode variar entre duas a três aulas de 48 minutos cada.

A apresentação em arquivo foi elaborada para mostrar e instruir os professores e estudantes quanto à aplicação dos números complexos na construção de fractais – conjuntos de Julia e o conjunto de Mandelbrot. O arquivo se encontra nos formatos de apresentação PowerPoint e BrOffice Impress. Ele pode ser acessado na Parte 4 do site https://sites.google.com/site/julianoeli/



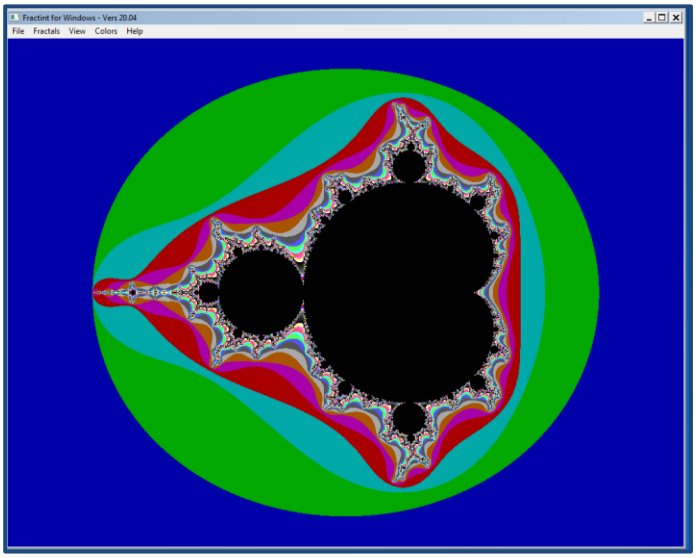
Para determinar os pontos do plano complexo que pertencem aos conjuntos de Julia e ao conjunto de Mandelbrot, é necessário observar o comportamento das órbitas das sementes x_0 na iteração da função $x \rightarrow x^2 + c$, facilitado com o uso de planilhas eletrônicas. Contendo funções matemáticas para esse fim, um arquivo foi elaborado e se encontra na Parte 4 do site https://sites.google.com/site/julianoeli nos formatos Excel e BrOffice Calc.



Fractint é o software que permite uma dinâmica exploração visual dos conjuntos de Julia e do conjunto de Mandelbrot. Por isso, é necessário que o software esteja previamente instalado nos computadores. Para fazer o *download*, acesse:

http://www.fractint.org/ftp/current/

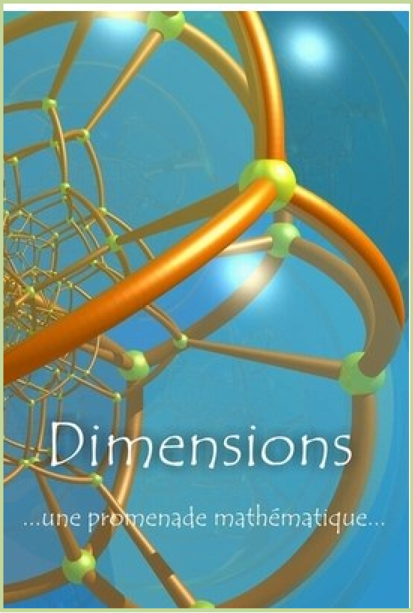
Figura 15 – Interface inicial do software Fractint



Dessa forma, considera-se para essa atividade a necessidade do uso de uma sala informatizada, onde estejam previamente instalados os seguintes softwares:

- PowerPoint ou BrOffice Impress – Para abrir o arquivo de apresentação e instrução.
- Excel ou BrOffice Calc – Para abrir o arquivo com comandos nas planilhas eletrônicas onde serão verificadas as órbitas das sementes na iteração da função $x \to x^2 + c$.
- Fractint – Para gerar as imagens dos fractais.

5. VÍDEO DIMENSIONS: CAPÍTULOS 5 E 6



Dimensions foi produzido por Jos Leys, Étienne Ghys e Aurélien Alvarez. Este filme é distribuído sob a licença da organização *Creative Commons*, sem fins lucrativos. Os capítulos 5 e 6 do referido filme, apresentam de forma criativa e dinâmica a potencialidade geométrica dos números complexos na narração do matemático frânces Adrien Douady (1935-2006). Os estudos de Douady sobre geometria algébrica e a teoria dos sistemas dinâmicos está centrado nos números complexos. Entre elas, os conjuntos fractais de Julia e o conjunto de Mandelbrot.

Para fazer *dowload* do filme, acesse:

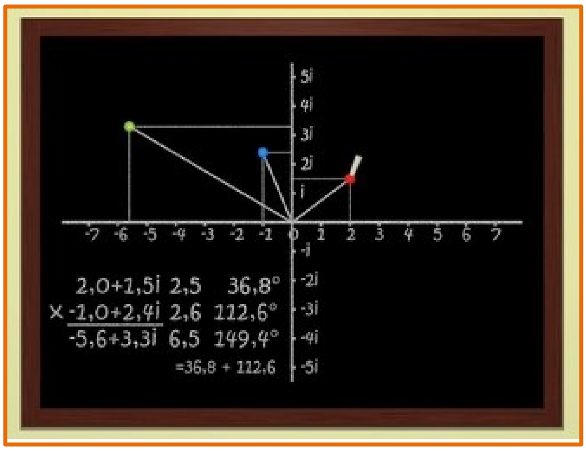
http://www.dimensions-math.org/Dim_download2_PT.htm

Para assisti-lo *on line*, acesse:

http://www.dimensions-math.org/Dim_regarder_PT.htm

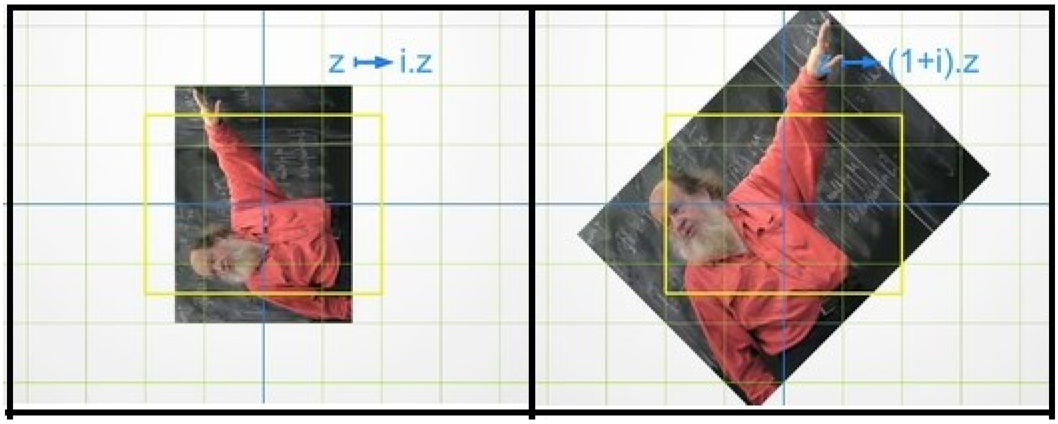
O filme pode ser reproduzido em vários idiomas, porém não há a versão em português até a data de publicação deste material (ano: 2014). Nesse caso, recomenda-se, para melhor compreensão, a seleção do áudio em espanhol e a legenda em português. Caso desejar-se reproduzi-lo em um aparelho DVD, o disco pode ser comprado através do próprio site.

Capítulo 5 – Números Complexos: Tempo:13 minutos e 52 segundos



Aborda brevemente as origens históricas dos números complexos. Em seguida explica geometricamente a multiplicação de um número real por – 1, sendo uma rotação em 180º, estendendo a ideia para a multiplicação com o fator *i* e sua representação no plano complexo, em uma rotação em 90º no sentido anti-horário. Douady também apresenta, de forma dinâmica, o comportamento similar dos números complexos como vetores no plano, representando a soma e a multiplicação no plano complexo. É interessante perceber que na multiplicação de números complexos, os módulos dos fatores se multiplicam e os argumentos são somados. Finaliza explicando a projeção estereográfica da superfície de uma esfera no plano complexo.

Capítulo 6 – Números Complexos: Tempo:13 minutos e 44 segundos



Neste capítulo, Adrien Douady mostra transformações no plano complexo, utilizando sua própria imagem. Ele apresenta o resultado geométrico de transformações simples, como $z \rightarrow z/2$, $z \rightarrow i.z$ e $z \rightarrow (1 + i)z$. E estende a explicação às transformações mais complexas como $z \rightarrow z^2$, $z \rightarrow -1/z$, $z \rightarrow z/(1 - k.z)$, $z \rightarrow z + k/z$ e $z \rightarrow \exp(z)$. Finaliza a apresentação mostrando alguns conjuntos de Julia, provenientes da iteração da função $z \rightarrow z^2 + c$ e apresenta o conjunto de Mandelbrot, formado pelas constantes *c* dos conjuntos de Julia.

6. ELETRICIDADE E NÚMEROS COMPLEXOS: O USO DE FASORES

Os números complexos são utilizados na análise de circuitos alternados. Esse conteúdo é estudado em cursos técnicos de eletricidade e em cursos superiores de física, matemática e engenharias. Uma combinação da matemática do ensino médio une-se à matemática do ensino superior, nesta aplicação. Os conteúdos envolvidos são funções senos e cossenos - denominadas de senoides, números complexos e um pouco de cálculo diferencial e integral.

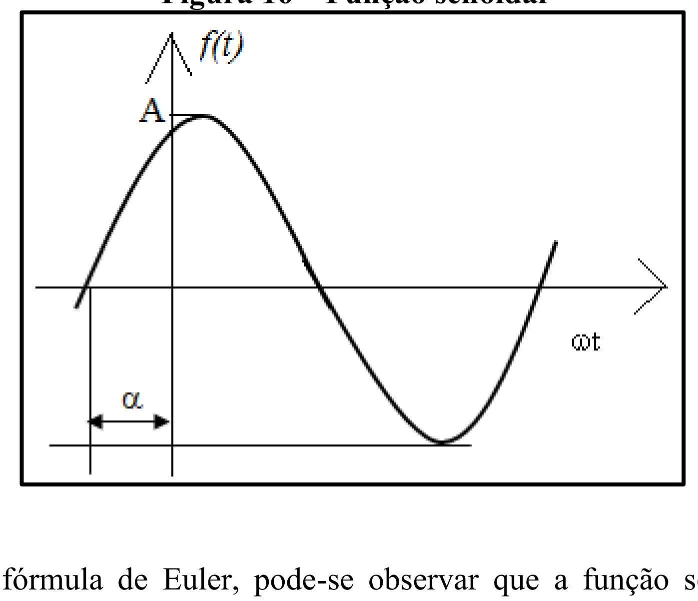
Em diversas aplicações de física e engenharia, utilizam-se funções senoidais. Uma técnica que visa facilitar a análise dessas aplicações é a representação fasorial, baseada na teoria dos números complexos. Essa técnica de análise, que proporciona simplicidade nas operações, é amplamente utilizada em engenharia elétrica e, em particular, na análise de circuitos elétricos. A seguir, será apresentado o conceito de fasor e ilustrada a sua aplicação a circuitos elétricos.

Considere a função senoidal:

$$f(t) = A\cos(\omega t + \alpha),$$

onde A é a magnitude, ou pico da senoide, ω é a frequência angular (rad/s) e α é chamado ângulo de fase (rad). O gráfico da função acima é representado na Figura 16.

Figura 16 – Função senoidal



Através da fórmula de Euler, pode-se observar que a função senoidal *f(t)* descrita acima, é considerada a parte real de uma função complexa do tipo

$$f(t) = \overbrace{A\cos(\omega t + \alpha)} + i\,A\,sin(\omega t + \alpha)$$

A equação $e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta)$

pode ser reescrita na notação descrita, onde a unidade imaginária *i* será representada pela letra *j*.

$$e^{j(\omega t+\alpha)} = cos(\omega t + \alpha) + jsen(\omega t + \alpha),$$

E acompanhado de sua amplitude ou módulo *A* resulta:

$$Ae^{j(\omega t+\alpha)} = \underbrace{Acos(\omega t + \alpha)}_{\text{Parte real}} + j.\underbrace{Asen(\omega t + \alpha)}_{\text{Parte imaginária}}$$

Assim, $f(t) = Acos(\omega t + \alpha) = \Re e\left(Ae^{j(\omega t+\alpha)}\right)$,

e, utilizando a propriedade das potências, obtém-se:

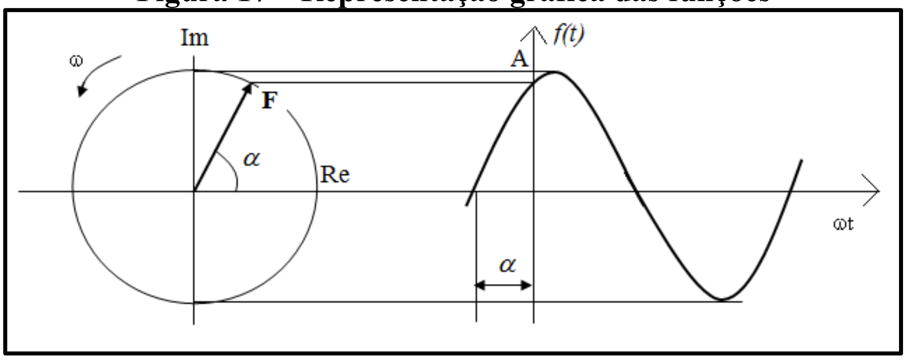
$$f(t) = \Re e(A.e^{j\omega t}.e^{j\alpha})$$

A partir dessa expressão, define-se o fasor **F,** associado à função senoidal *f(t)*[15]:

$$F = Ae^{j\alpha}.$$

O fasor é um número complexo constante, que representa uma função senoidal, que varia no tempo *t*. Observa-se pela definição, que o fasor **F** mantém a informação da amplitude *A* e do ângulo de fase α da função senoidal, porém não informa o valor da frequência angular ω. De fato, sua utilização baseia-se na hipótese que a frequência angular do sistema é a mesma para todas as senoides representadas e não se altera. A Figura 17, a seguir, ilustra a relação entre a função senoidal e o fasor **F**.

Figura 17 – Representação gráfica das funções



Uma grande vantagem oferecida pelos fasores é a facilidade da operação de diferenciação, o que simplifica significativamente a análise de sistemas representados matematicamente por equações diferenciais. É apresentada a seguir, a derivada de *f(t)* em relação ao tempo e sua representação fasorial. Sendo *f* a parte real de uma função complexa, tem-se:

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\Re e\left(Ae^{j(\omega t+\alpha)}\right)\right\}$$

15 Embora menos usual, é possível encontrar o fasor definido como $F = A.e^{j\omega t}.e^{j\alpha}$

$$\frac{df}{dt} = \Re e\left\{\frac{d}{dt}\left(Ae^{j(\omega t+\alpha)}\right)\right\}$$

$$\frac{df}{dt} = \Re e\left\{i\omega Ae^{j(\omega t+\alpha)}\right\}$$

$$\frac{df}{dt} = \Re e\left\{i\omega Ae^{j\alpha}e^{j\omega t}\right\}$$

Portanto, na representação fasorial, a derivada da função senoidal será o fasor:

$$D_f = j\omega Ae^{j\alpha} = j\omega F,$$

ou seja, a derivação no domínio do tempo equivale à multiplicação pela constante $j\omega$, no domínio complexo. Pode-se ainda considerar a fórmula de Euler com o ângulo $\frac{\pi}{2}rad$, o que resulta:

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j\ sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + j.1 = j, \text{ ou seja,}$$

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

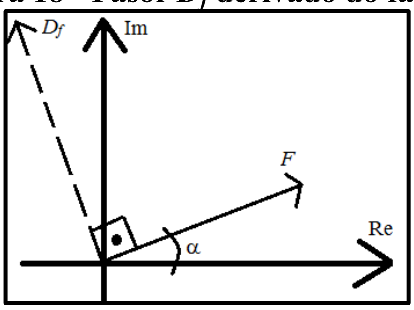
Substituindo esse resultado na expressão da derivada D_f, obtém-se:

$$D_f = e^{j\frac{\pi}{2}}.\omega Ae^{j\alpha}$$

$$D_f = \omega Ae^{j\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$$

Conclui-se que o fasor D_f, associado à derivada da função f, é um número complexo deslocado no plano complexo de um ângulo de $\frac{\pi}{2}rad$ do fasor F e sua amplitude é multiplicada pela constante ω, como pode ser observado no diagrama fasorial da Figura 18.

Figura 18 - Fasor D_f derivado do fasor F



Circuitos elementares com excitação senoidal

A aplicação da análise fasorial aos circuitos elétricos é facilitada pelo desenvolvimento prévio de expressões de fasores para circuitos com um único elemento. A seguir, é apresentado esse desenvolvimento, para posteriormente aplicá-lo a circuitos gerais. Para representar a tensão no circuito serão utilizadas as representações do Quadro 6:

Quadro 6 – Função de tensão elétrica representada no domínio do tempo e no domínio complexo

$V_f(t) = V_m cos(\omega t + \alpha)$	Função V_f no domínio do tempo
$V_f = V_m e^{j\alpha}$	Função V_f no domínio complexo (Fasor)

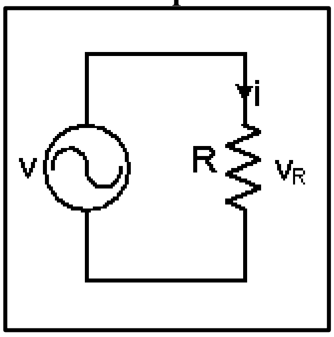
a) Circuito puramente resistivo

Se uma resistência de valor R for conectada à uma fonte de tensão senoidal:

$$V_f(t) = V_m cos(\omega t + \alpha),$$

como ilustrado na Figura 19, então circulará pelo circuito uma corrente também senoidal *i(t)*.

Figura 19 - Circuito puramente resistivo



Aplicando a Lei de Kirchoff, sobre as tensões, que estabelece que a somatória das tensões sobre os elementos de uma malha fechada é igual à zero, obtém-se:

$$V_f(t) – V_R(t) = 0,$$

onde V_R é a queda de tensão sobre o resistor. Pela Lei de Ohm, em cada instante tem-se:

$$V_R(t) = R\, i(t).$$

Assim,

$$i(t) = \frac{V_R(t)}{R} = \frac{V_f(t)}{R}$$

$$i(t) = \frac{V_m}{R}.\cos(\omega t + \alpha)$$

$$I = \frac{V_m e^{j\alpha}}{R} \rightarrow \text{ Representação fasorial}$$

Essa expressão mostra que a corrente em um circuito puramente resistivo possui o mesmo ângulo de fase que a tensão de alimentação. Para esse circuito têm-se, então, os fasores de tensão e de corrente:

$$V_f = V_m e^{j\alpha}$$

$$I = \frac{V_m}{R} e^{j\alpha}$$

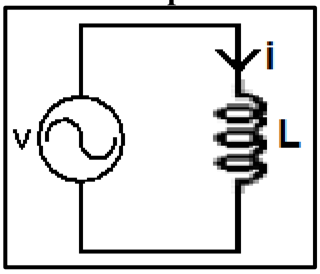
A razão entre os fasores de tensão e corrente, para o circuito puramente resistivo, representa a resistência desse circuito:

$$\frac{V_f}{I} = \frac{V_m e^{j\alpha}}{\frac{V_m}{R} e^{j\alpha}} = R.e^{j(\alpha-\alpha)} = R \qquad \text{(Fasor 1)}$$

b) Circuito puramente indutivo:

Conectando uma fonte de tensão senoidal à uma bobina de indutância L e resistência nula, como mostra a Figura 20, obtém-se a circulação de uma corrente também senoidal, cujo valor instantâneo é dado por *i(t)*.

Figura 20 – Circuito puramente indutivo



Pela Lei de Kirchoff, $V_f(t) - V_L(t) = 0$ e a tensão nos terminais do indutor é:

$$V_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{V_L(t)}{L} = \frac{V_f(t)}{L}$$

Com a tensão da fonte dada por $V_f(t) = V_m cos(\omega t + \alpha)$, tem-se:

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{V_m cos(\omega t + \alpha)}{L}$$

e integrando a expressão, obtém-se:

$$i(t) = \frac{V_m}{\omega L} sen(\omega t + \alpha)$$

O objetivo desta análise é a obtenção de fasores para a tensão e a corrente, então se reescreve a expressão acima, na forma mais conveniente (com a função cosseno):

$$i(t) = \frac{V_m}{\omega L} cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I = \frac{V_m}{\omega L} e^{j\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Essa expressão mostra que a corrente que circula no indutor está $\frac{\pi}{2} rad$ (ou 90º) atrasada em relação à tensão aplicada. De acordo com essa expressão, definem-se os fasores de tensão $V_f = V_m e^{j\alpha}$ e de corrente I:

$$I = \frac{V_m}{\omega L} e^{j\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$I = \frac{V_m}{\omega L} e^{j\alpha} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$I = \frac{V_m}{\omega L} . \frac{e^{j\alpha}}{e^{j\frac{\pi}{2}}}$$

e, finalmente, utilizando a igualdade obtida anteriormente $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$, obtém-se:

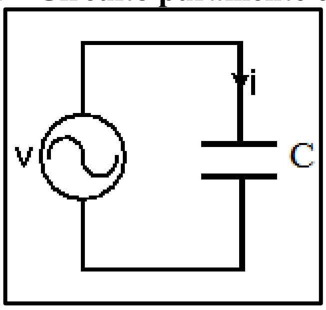
$I = \frac{V_m}{j\omega L} e^{j\alpha}$ → Representação fasorial

De modo análogo ao realizado para o circuito resistivo, define-se a reatância desse circuito como a razão entre os fasores tensão e corrente:

$$\frac{V_f}{I} = \frac{V_m e^{j\alpha}}{\frac{V_m}{j\omega L} e^{j\alpha}} = j\omega L \qquad \text{(Fasor 2)}$$

c) Circuito puramente capacitivo:

Figura 21 – Circuito puramente capacitivo



Na Figura 21, um capacitor de capacitância C, conectado à uma fonte de tensão senoidal *V_f (t),* será percorrido (por indução eletrostática) por uma corrente dada por:

$$i(t) = C.d\frac{V_f(t)}{dt} = C.d\frac{V_m cos(\omega t + \alpha)}{dt}$$

$$i(t) = -\omega C. V_m sen(\omega t + \alpha)$$

$$i(t) = \omega C. V_m cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

Por esta expressão é possível observar que a corrente em um capacitor está $\frac{\pi}{2} rad$ adiantada em relação à tensão aplicada. Em termos fasoriais, tem-se:

$V_f = V_m e^{j\alpha}$ e

$$I = \omega C V_m e^{j\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$I = \omega C V_m e^{j\alpha} e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

Utilizando a igualdade $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$,

$$I = j\omega C V_m e^{j\alpha}$$

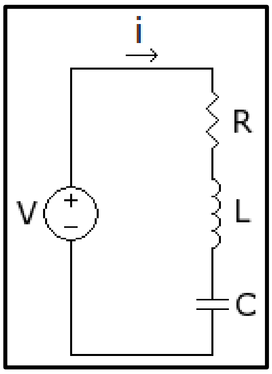
Define-se a reatância desse circuito capacitivo como a razão entre os fasores tensão e corrente:

$$\frac{V_f}{I} = \frac{V_m e^{j\alpha}}{j\omega C V_m e^{j\alpha}} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{j}{j} = \frac{-j}{\omega C} \qquad \text{(Fasor 3)}$$

Exemplo:

Como exemplo de aplicação de fasores, considera-se um circuito composto por uma fonte de tensão senoidal, um resistor, um capacitor e um indutor, conectados em série, como ilustra a Figura 22.

Figura 22 - Circuito RLC em série



A lei de Kirchoff das tensões, estabelece que:

$$V_f - V_R - V_L - V_C = 0$$

Ou seja,

$$V_f = V_R + V_L + V_C$$

Substituindo as expressões correspondentes à cada tensão, tem-se:

$$V_f = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

Derivando a expressão em relação à variável t, obtém-se:

$$\frac{dV_f}{dt} = R\frac{di(t)}{dt} + L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}i(t)$$

Esta é uma equação diferencial de segunda ordem. Percebe-se, por esse exemplo, que a análise de circuitos elétricos maiores, pode ser uma tarefa bastante difícil. Nesse caso, será utilizado a análise fasorial para um problema com as seguintes informações: fonte de tensão senoidal com valor de pico 220 V, frequência angular ω = 377 rad/s e ângulo de fase α = 0º, resistência R = 12 Ω, indutância L = 13,26 mH e capacitância C = 294,7μF.

Define-se então os fasores de tensão $V_f = 220e^{i0°} = 220$ onde a corrente I será determinada. Aplicando a Lei de Kirchoff das tensões, que estabelece que a somatória das tensões sobre os elementos de uma malha fechada é zero, obtém-se:

$$V_f = V_R + V_L + V_C$$

As tensões em cada elemento do circuito, de acordo com a Lei de Ohm (*V = R.I*), empregando as razões já obtidas anteriormente (Fasores 1, 2 e 3), serão:

$$V_R = RI$$

$$V_L = j\omega LI$$

$$V_C = -\frac{j}{\omega C}I$$

o que resulta,

$$V_f = RI + j\omega LI - j\frac{1}{\omega C}I \text{ ou}$$

$$V_f = \left(R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right).I$$

Substituindo os valores numéricos, obtém-se:

$$220 = \left(12 + j\left(377\,.\,13{,}26.\,10^{-3} - \frac{1}{377\,.294{,}7.10^{-6}}\right)\right).I\ ,$$

que é uma expressão algébrica e que pode ser solucionada para a variável *I*:

$$220 = \left(12 + j(5 - 9)\right).I$$

$$I = \frac{220}{12 - 4j} = \frac{220e^{j0°}}{12{,}65e^{j(-18{,}43°)}}$$

$$I = 17{,}39e^{j18{,}43°}A$$

A solução do problema é a função senoidal correspondente ao fasor I:

i(t) = 17,39.cos(377t + 18,43º) A

Por esse exemplo, vê-se que a análise fasorial pode ser compreendida como uma transformação que permite que equações diferenciais sejam tratadas como equações algébricas para a análise de circuitos elétricos em regime permanente.

A seguir, são apresentadas algumas atividades simples, que envolvem a equação U = Z.I.

1) A relação U = Ri, estudada na física do ensino médio e que se utiliza dos números reais, torna-se U = ZI, em que **U** é a tensão, Z é a impedância e I é a corrente elétrica, sendo que essas grandezas passam a ser representadas através de números complexos. Para que não haja confusão entre **i**, símbolo da corrente elétrica, e **i**, unidade imaginária, os engenheiros usam **j** como unidade. Além disso, usam a notação $|w| \angle \theta$ para a forma trigonométrica $|w|(\cos\theta + i\, sen\theta)$ do número complexo **w**. Se uma fonte de tensão, de valor eficaz $220\angle 0°$, alimenta uma carga de impedância Z = (10+10j) ohm. Obter a corrente fornecida pela fonte.

Transformando Z na forma $|Z| \angle \theta$:

$$|Z| = \sqrt{(10)^2 + (10)^2} = \sqrt{2\,.\,100} = 10\sqrt{2}$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = tg^{-1}\left(\frac{10}{10}\right) = tg^{-1}(1) = 45° \qquad \text{Logo } Z = 10\sqrt{2} \angle 45°$$

$$i = \frac{U}{Z} = \frac{220 \angle 0°}{10\sqrt{2} \angle 45°} = \frac{22}{\sqrt{2}} \angle\, 0° - 45° = 11\sqrt{2} \angle -45° \text{ A}$$

(Adaptado de: DANTE, 2010, p. 168)

2) Considerando as informações dadas acima, resolva o seguinte problema: Uma fonte de tensão, de valor eficaz $110\angle 0°$, fornece uma corrente i = $11\angle 60°$ para alimentar uma carga. Qual é a impedância **Z** dessa carga? (Questão nº 54 de: DANTE, 2010, p. 168)

Resposta: Z = 10 ∠- 60° ohms

3) Uma fonte de tensão, de valor eficaz **U**, fornece uma corrente *i* = $11\angle 30°$ para alimentar uma carga de impedância Z = $20 \angle 15°$. Qual o valor eficaz dessa fonte de tensão, na forma algébrica? (Questão nº 55 de: DANTE, 2010, p. 168)

Resposta: U = 220 ∠ 45° volts

Referências

ALEXANDER, Charles K; SADIKU, Matthew N. O. **Fundamentos de circuítos elétricos**. Porto Alegre : Bookman, 2003. ix, 857 p, il. +.

IRWIN, J. David. **Análise de circuitos em engenharia**. 4. ed. São Paulo : Makron Books, 2000. 848p, il.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010.