



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS, MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**CONCEITO DE LIMITE SOB A PERSPECTIVA
DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MEDIADA
PELO SOFTWARE GEOGEBRA**

JÉSSICA MEYER SABATKE

JOINVILLE, 2018

JÉSSICA MEYER SABATKE

**CONCEITO DE LIMITE SOB A PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS MEDIADA PELO SOFTWARE GEOGEBRA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemáticas e Tecnologias, do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Dra. Ivanete Zuchi Siple

Coorientadora: Dra. Elisandra Bar de Figueiredo

JOINVILLE, SC

2018

Sabatke, Jéssica Meyer

Conceito de limite sob a perspectiva da Resolução de Problemas mediada pelo software GeoGebra / Jéssica Meyer Sabatke. - Joinville , 2018. 217 p.

Orientadora: Ivanete Zuchi Siple

Co-orientadora: Elisandra Bar de Figueiredo
Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias, Joinville, 2018.

1. Limite. 2. Resolução de Problemas. 3. GeoGebra. I. Zuchi Siple, Ivanete. II. Bar de Figueiredo, Elisandra . , .III. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias. IV. Título.

**CONCEITO DE LIMITE SOB A PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS MEDIADA PELO SOFTWARE GEOGEBRA**

por

Jéssica Meyer Sabatke

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

MESTRE EM ENSINO DE CIÊNCIAS, MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS


Área de concentração em “Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias”
e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM ENSINO DE CIÊNCIAS, MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS
DO CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS
DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.

Banca Examinadora:



Profa. Dra. Ivanete Zuchi Siple
CCT/UDESC (Orientadora/Presidente)



Prof. Dr. Mérciles Thadeu Moretti
UFSC



Prof. Dr. Marco Aurélio Kalinke
UTFPR

Joinville, 04 de julho de 2018.

Dedico este trabalho à duas pessoas que me guiaram em toda minha vida, serei eternamente grata a elas, as quais tenho orgulho de chamar de PAI e MÃE.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por toda proteção, cuidado e força que me proporcionou durante esta jornada.

Aos meus pais, Eloir e Ivonete, pelo apoio incondicional, desde sempre, para que eu pudesse estudar. Pelo amor dedicado, paciência e orações feitas.

Agradeço imensamente às minhas orientadoras, Ivanete e Elisandra, que nunca mediram esforços para me atender. Obrigada por todo tempo disponibilizado para orientação, pelas correções, sugestões e críticas que sempre ajudaram a aprimorar o trabalho desenvolvido. Obrigada por todo o conhecimento, dedicação e amizade durante esses anos que estive na Udesc.

Ao meu noivo, André, pelo incentivo constante e por toda paciência que teve durante a elaboração deste trabalho.

A Banca Examinadora: Marco Aurélio Kalinke e Méricles Thadeu Moretti pelas valiosas críticas e sugestões. E ao suplente Rogério de Aguiar pelas contribuições.

À professora Eliane Bihuna de Azevedo pela aprendizagem concedida a respeito da Resolução de Problemas, e por todas as indicações e fornecimento de trabalhos.

À EEB Professor Gustavo Augusto Gonzaga e a professora Ana, que prontamente aceitaram a realização da aplicação das atividades da pesquisa.

À professora Raiane, por disponibilizar sua turma de Cálculo 1 e também por aplicar as atividades do produto educacional e ministrar as aulas utilizando a Metodologia através da Resolução de Problemas.

Aos alunos da turma da segunda série da EEB Professor Gustavo Augusto Gonzaga e da turma de Cálculo 1 da Udesc pela participação na aplicação.

Aos professores do PPGECMT pelas discussões, reflexões e aprendizado nas disciplinas cursadas durante o Mestrado.

A todos os colegas de curso, principalmente Dienifer e Joana, pelos momentos de convivência, trabalho e conhecimentos compartilhados.

Agradeço ainda à secretária Luciana, que sempre se dispôs a tirar dúvidas e orientar com cordialidade e carinho.

Ao programa UNIEDU/ FUMDES Pós-Graduação, do Governo do Estado de Santa Catarina, pela concessão da bolsa.

“Bem-aventurado aquele que teme ao SENHOR e busca andar em seus caminhos! Comerás do fruto do teu trabalho, serás feliz e próspero.” (Salmos 128:1-2)

RESUMO

Nesta dissertação foi proposta uma abordagem para o ensino de limites, com o viés da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, mediada por recursos dinâmicos do software GeoGebra. Foram desenvolvidos problemas e aplicativos no GeoGebra, para serem trabalhados em sala de aula, com intuito de apresentar as noções e conceitos relativos ao limite no Ensino Médio e no Ensino Superior. A pesquisa é de natureza qualitativa, classificada como descritiva e que utilizou o trabalho de campo como procedimento para coleta de dados. No Ensino Médio foram aplicadas situações-problema na segunda série de uma escola estadual, apresentando o conceito de limite integrado ao conteúdo de Progressões Geométricas Infinitas. E no Ensino Superior, a aplicação das situações-problema ocorreu em aulas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina. Nesse contexto, foi desenvolvido um produto educacional, um caderno didático denominado “Resolução de Problemas e GeoGebraBook: atividades para o ensino do conceito de limite” que também está disponibilizado na Ferramenta GeoGebraBook, disponível na plataforma online do GeoGebra. Buscando oferecer um caminho metodológico para o desenvolvimento das atividades através da Resolução de Problemas, o caderno didático também foi estruturado de forma a permitir ao professor ter acesso a fundamentação teórica e as etapas que regem esse processo. E, além da sugestão das atividades elaboradas, também estão disponíveis para manipulação online e/ou download, os aplicativos desenvolvidos. A partir das aplicações realizadas foi possível observar as concepções dos alunos, suas dificuldades e principais dúvidas com relação aos problemas, bem como, analisar as estratégias e procedimentos utilizados nas resoluções. Assim, sendo possível refletir sobre as potencialidades e desafios em se trabalhar com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas mediada pelo GeoGebra.

Palavras-chave: Limite. Resolução de Problemas. GeoGebra.

ABSTRACT

In this dissertation, an approach was proposed for the teaching of limits, through the Teaching-Learning-Assessment of Mathematics through Problem Solving Methodology, using the dynamic resources of GeoGebra software. Problems and applications were developed in GeoGebra, to be worked in the classroom, in order to present the notions and concepts related to limits in high school and higher education. The research is of a qualitative nature, classified as descriptive. It used fieldwork as a procedure for data collection. In high school, problem situations were applied in a second year class at a state school, presenting the concept of limits integrated to the content of infinite geometric progressions. And in higher education, the application of the problem situations occurred in classes of Differential and Integral Calculus I, of the Mathematics Program of the University of the State of Santa Catarina. In this context, an educational product was created, a didactic book called "Problem Solving and GeoGebraBook: activities for teaching the concept of limits" which is also available in the GeoGebraBook tool, available on the GeoGebra online platform. Seeking to provide a methodological path for the development of activities through problem solving, the didactic material was also structured in such a way as to allow the teacher to have access to the theoretical foundation and the stages that govern this process. And, in addition to the suggested activities, the applications developed are also available for online manipulation and / or download. Based on the applications, it was possible to observe the students' conceptions, their difficulties and main questions regarding the problems, as well as analyze the strategies and procedures used in the resolutions. Thus, it is possible to reflect on the possibilities and challenges in working with the Teaching-Learning-Assessment of Mathematics Methodology through Problem Solving using GeoGebra.

Key words: Limit. Problem Solving. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Limite da soma dos termos de uma Progressão Geométrica Infinita	38
Figura 2 - Limite da função $f(x)$ em três casos.....	44
Figura 3 - Relação entre δ e ε no limite de uma função de uma variável real	45
Figura 4 - Exemplo de sequência convergente.....	46
Figura 5 - Exemplo de sequência divergente.....	46
Figura 6 - Representação esquemática dos obstáculos relacionados ao limite.....	50
Figura 7 - Print da tela da <i>Calculadora Gráfica GeoGebra</i> em um smartphone com cálculo do limite de uma função	62
Figura 8 - Interface da <i>Calculadora Gráfica GeoGebra</i> exibida em um computador	63
Figura 9 - Print da tela em um smartphone com uma construção no <i>GeoGebra Geometria</i> ...	64
Figura 10 - Interface do <i>GeoGebra Geometria</i> exibida em um computador	64
Figura 11 - Print da tela em um smartphone com uma construção no <i>GeoGebra 3D Graaphing Calculator</i>	65
Figura 12 - Interface do <i>GeoGebra 3D Graaphing Calculator</i> exibida em um computador...	66
Figura 13 - Print de uma tela com construção de superfícies no <i>GeoGebra Augmented Reality</i>	66
Figura 14 - Interface online do <i>GeoGebra Classic</i> exibida em um computador.....	67
Figura 15 - Tela inicial do <i>GeoGebra Classic 5</i>	68
Figura 16 - Tela inicial do <i>GeoGebra Classic 6</i>	68
Figura 17 - Exemplo da tela da ferramenta <i>Modo Exame</i> no <i>GeoGebra Classic 6</i>	69
Figura 18 - Exemplo de alerta da tela da ferramenta <i>Modo Exame</i> no <i>GeoGebra Classic 6</i> ...	69
Figura 19 - Exemplo de registros da ferramenta <i>Modo Exame</i> com e sem alerta	70
Figura 20 - Exemplo de GeoGebra Book	71
Figura 21 - Exemplo de Grupo no GeoGebra.....	72
Figura 22 - Slide apresentado em sala sobre o Paradoxo da Dicotomia.....	97
Figura 23 - Equipes trabalhando no problema Paradoxo dos Passos	98
Figura 24 - Equipes trabalhando no problema Paradoxo do Corredor	104
Figura 25 - Respostas da E3 e E4 para a questão 5 do problema Paradoxo do Corredor	107
Figura 26 - Resposta da E5 e E6 para construção da sequência do problema Paradoxo do Corredor.....	108
Figura 27 - Tela do GeoGebra utilizada para explicar limite no infinito	109
Figura 28 - Alunos manipulando aplicativo no GeoGebra.....	110

Figura 29 - Tela do GeoGebra utilizada para explicar soma dos infinitos termos de uma PG	110
Figura 30 - Resposta da E2 para o item i da questão b do problema 3 da tarefa	115
Figura 31 - Algumas respostas da pergunta 4 do Questionário aplicado no Ensino Médio ..	118
Figura 32 - Tela do GeoGebra ilustrando o Problema 1 no Ensino Superior	123
Figura 33 - Grupos trabalhando no Problema 1	125
Figura 34 - Exemplos de respostas da questão b do Problema 1	126
Figura 35 - Exemplos de resposta da questão d do Problema 1	126
Figura 36 - Exemplo de resposta da demonstração da área do Problema 1	129
Figura 37 - Início da formalização do Problema Área do Círculo.....	130
Figura 38 - Tela do GeoGebra da primeira parte do problema 2 no Ensino Superior	132
Figura 39 - Alunos no laboratório resolvendo Problema 2	132
Figura 40 - Resposta de um grupo na questão a, da parte 1 do problema 2.....	137
Figura 41 - Resposta dada pelo G2 na questão c, da parte 2 do Problema 2	138
Figura 42 - Grupos na plenária do Problema 2	141
Figura 43 - Aplicativo desenvolvido para formalização da parte 1 do problema 2	141
Figura 44 - Aplicativo desenvolvido para formalização da parte 2 do problema 2	142
Figura 45 - Grupos trabalhando na resolução do problema 3	145
Figura 46 - Resposta de um grupo para questões b e c do problema 3	146
Figura 47 - Respostas do G1, G3 e G4 para questão e do problema 3	149
Figura 48 - Respostas do G5 para questão e do problema 3	149
Figura 49 - Formalização questão c do problema 3	151
Figura 50 - Aplicativo desenvolvido para formalização do problema 3.....	152
Figura 51 - Exemplos em sala sobre limite pela definição	152
Figura 52 - Aplicativo desenvolvido para formalizar o limite pela definição da função da parte 1 do problema 2.....	153
Figura 53 - Grupos trabalhando na resolução do problema 4	154
Figura 54 - Aplicativo desenvolvido para auxiliar visualização do problema 4.....	158
Figura 55 - Resposta do G11 na letra c do problema 4	161
Figura 56 - Ferramenta Grupo na plataforma do GeoGebra, com os problemas propostos .	162
Figura 57 - Ensino Superior – Tarefa: Aplicativo Problema 1	164
Figura 58 - Ensino Superior – Tarefa: Aplicativo Problema 2	165
Figura 59 - Ensino Superior – Tarefa: Aplicativo Problema 3	166
Figura 60 - Ensino Superior – Tarefa: Aplicativo Problema 4	167

Figura 61 - Feedback de professora e aluno A14 no problema 1 da tarefa	168
Figura 62 - Feedback de professora e aluno A22 no problema 1 da tarefa	169
Figura 63 - Resposta do A20 na questão b no problema 2 da tarefa	170
Figura 64 - Resposta do A19 no problema 2 da tarefa	171
Figura 65 - Resposta do A2 no problema 3 da tarefa	171
Figura 66 - Resposta do A10 no problema 4 da tarefa	172
Figura 67 - Feedback de professora e aluno A26 na questão a do problema 4 da tarefa	173
Figura 68 - Feedback dado pelo GeoGebra com relação a entrega de problemas.....	174
Figura 69 - Sugestões dadas por alunos no Questionário aplicado no Ensino Superior	179
Figura 70 - Exemplos de respostas da questão 6 no Questionário aplicado no Ensino Superior	179

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Tópicos e conteúdos abordados na unidade “Taxa de variação de funções” do livro “Matemática Ensino Médio”	39
Quadro 2 - Aspectos que caracterizam as quatro fases do desenvolvimento tecnológico em Educação Matemática.....	53
Quadro 3 - Resultados em bancos de dados online de teses e dissertações envolvendo Resolução de Problemas e GeoGebra	89
Quadro 4 - Ensino Médio - Problema 1: O paradoxo dos passos.....	97
Quadro 5 - Respostas pergunta 1 - Problema Paradoxo dos Passos.....	99
Quadro 6 - Respostas pergunta 2 - Problema Paradoxo dos Passos.....	99
Quadro 7 - Ensino Médio - Problema 2: Tirinha.....	102
Quadro 8 - Ensino Médio - Problema 2: O paradoxo do corredor	103
Quadro 9 - Respostas construção da sequência - Problema Paradoxo do Corredor.....	105
Quadro 10 - Respostas para dn no Problema Paradoxo do Corredor	106
Quadro 11 - Respostas da questão 5 do Problema Paradoxo do Corredor	106
Quadro 12 - Ensino Médio – Tarefa: Problema 1	111
Quadro 13 - Ensino Médio – Tarefa: Problema 2	111
Quadro 14 - Ensino Médio – Tarefa: Problema 3	112
Quadro 15 - Respostas interpretação geométrica do problema 2 da tarefa	113
Quadro 16 - Respostas interpretação da soma infinita do problema 2 da tarefa	113
Quadro 17 - Respostas interpretação questão a do problema 3 da tarefa	114
Quadro 18 - Respostas interpretação do item i da questão b do problema 3 da tarefa.....	114
Quadro 19 - Respostas interpretação do item iv da questão b do problema 3 da tarefa.....	115
Quadro 20 - Respostas interpretação do item v da questão b do problema 3 da tarefa.....	116
Quadro 21 - Classificação das respostas da questão 1 do Questionário aplicado no Ensino Médio	116
Quadro 22 - Classificação das respostas da questão 3 do Questionário aplicado no Ensino Médio	117
Quadro 23 - Classificação das respostas da questão 5 do Questionário aplicado no Ensino Médio	119
Quadro 24 - Classificação das respostas da questão 6 do Questionário aplicado no Ensino Médio	119
Quadro 25 - Ensino Superior - Problema 1	123

Quadro 26 - Ensino Superior – Problema 1: Perguntas para serem respondidas através do GeoGebra	124
Quadro 27 - Respostas dos grupos no desenvolvimento do cálculo da área de um círculo no Problema 1	128
Quadro 28 - Ensino Superior – Problema 2	131
Quadro 29 - Respostas dos grupos na letra <i>a</i> , da parte 1 do problema 2	133
Quadro 30 - Respostas dos grupos na letra <i>b</i> , da parte 1 do problema 2	134
Quadro 31 - Respostas dos grupos na letra <i>d</i> , da parte 1 do problema 2	135
Quadro 32 - Ensino Superior – Parte 2 do Problema 2	136
Quadro 33 - Respostas dos grupos na letra <i>a</i> , da parte 2 do problema 2	136
Quadro 34 - Respostas dos grupos na letra <i>b</i> , da parte 2 do problema 2	137
Quadro 35 - Respostas dos grupos na letra <i>d</i> , da parte 2 do problema 2	140
Quadro 36 - Ensino Superior – Problema 3	144
Quadro 37 - Respostas dos grupos na letra <i>b</i> , do problema 3	145
Quadro 38 - Respostas dos grupos na letra <i>c</i> , do problema 3	145
Quadro 39 - Respostas dos grupos da representação gráfica da letra <i>d</i> , do problema 3	147
Quadro 40 - Respostas dos grupos na letra <i>d</i> , do problema 3	148
Quadro 41 - Respostas dos grupos na letra <i>e</i> , do problema 3	148
Quadro 42 - Ensino Superior – Problema 4	154
Quadro 43 - Respostas dos grupos na letra <i>a</i> do problema 4	155
Quadro 44 - Respostas dos grupos na letra <i>b</i> do problema 4	157
Quadro 45 - Respostas dos grupos do primeiro questionamento da letra <i>c</i> do problema 4 ...	159
Quadro 46 - Respostas dos grupos do segundo questionamento da letra <i>c</i> do problema 4 ...	159
Quadro 47 - Ensino Superior – Tarefa: Enunciado Problema 1	163
Quadro 48 - Ensino Superior – Tarefa: Enunciado Problema 2	164
Quadro 49 - Ensino Superior – Tarefa: Enunciado Problema 3	165
Quadro 50 - Ensino Superior – Tarefa: Enunciado Problema 4	166
Quadro 51 - Respostas do problema 1 da tarefa	167
Quadro 52 - Respostas da questão <i>a</i> do problema 2 da tarefa	169
Quadro 53 - Respostas da questão <i>b</i> do problema 2 da tarefa	169
Quadro 54 - Classificação das respostas da questão 1 do Questionário aplicado no Ensino Superior	175
Quadro 55 - Classificação das respostas da questão 2 do Questionário aplicado no Ensino Superior	176

Quadro 56 - Classificação das respostas da questão 3 do Questionário aplicado no Ensino Superior	176
Quadro 57 - Classificação das respostas da questão 4 do Questionário aplicado no Ensino Superior	177
Quadro 58 - Classificação das respostas da questão 5 do Questionário aplicado no Ensino Superior	178

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AC	Análise de Conteúdo
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BIOE	Banco Internacional de Objetos Educacionais
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CAS	Sistema de Álgebra Computacional
CCT	Centro de Ciências Tecnológicas
CDI	Cálculo Diferencial e Integral
GNU	Licença Pública Geral
GTERP	Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas
MEC	Ministério da Educação e Cultura
OECD	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PG	Progressão Geométrica
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Alunos
PPGECMT	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias
PUC-SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
RP	Resolução de Problemas
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SE	Softwares Educacionais
SGD	Softwares de Geometria Dinâmica
TD	Tecnologias Digitais
TDIC	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação
TI	Tecnologias da Informação
TIC	Tecnologias da Informação e Comunicação
UDESC	Universidade do Estado de Santa Catarina
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
UNESP	Universidade Estadual Paulista
USP	Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	29
2 ENSINO DE CÁLCULO E O CONCEITO DE LIMITE	35
2.1 PANORAMA DO ENSINO DE CÁLCULO NO ENSINO SUPERIOR NO BRASIL	35
2.2 PANORAMA DO ENSINO DE CÁLCULO NO ENSINO BÁSICO NO BRASIL	37
2.2.1 Progressão Geométrica Infinita	41
2.3 CONCEITO DE LIMITE	42
2.3.1 Limite de função e limite de sequência	43
2.3.2 Obstáculos do conceito de limite.....	48
3 TECNOLOGIAS DIGITAIS, VISUALIZAÇÃO NO ENSINO E O SOFTWARE GEOGEBRA	52
3.1 TECNOLOGIAS DIGITAIS	52
3.2 CONCEITO DE VISUALIZAÇÃO	55
3.3 SOFTWARES NO ENSINO	57
3.4 O SOFTWARE GEOGEBRA	60
3.4.1 Plataforma online do GeoGebra	71
4 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	74
4.1 CONCEPÇÕES SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.....	74
4.2 METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.....	77
4.2.1 Etapas de trabalho com a Metodologia	80
4.3 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O SOFTWARE GEOGEBRA	81
5 METODOLOGIA	85
5.1 A METODOLOGIA DE PESQUISA QUALITATIVA	85
5.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	87
5.2.1 Fase Preliminar	87
5.2.1.1 Análise documental	87
5.2.2 Fase inicial.....	89
5.2.2.1 O produto educacional.....	89
5.2.3 Fase experimental - Trabalho de campo.....	91
5.2.3.1 Observação participante	91
5.2.3.2 Contexto da investigação no Ensino Médio	92
5.2.3.3 Contexto da investigação no Ensino Superior.....	93
5.2.3.4 Coleta de dados.....	94
5.2.4 Fase de análise	95
6 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DAS SITUAÇÕES-PROBLEMA APLICADAS NO ENSINO MÉDIO	96
6.1 SITUAÇÃO-PROBLEMA 1: PARADOXO DOS PASSOS.....	96
6.1.1 Apresentação da situação problema	96

6.1.2 Desenvolvimento da situação-problema	97
6.1.3 A Metodologia de ensino através da RP em prática e análise dos dados coletados	99
6.2 SITUAÇÃO-PROBLEMA 2: PARADOXO DO CORREDOR	101
6.2.1 Apresentação da situação problema	101
6.2.2 Desenvolvimento da situação-problema	103
6.2.3 A Metodologia de ensino através da RP em prática e análise dos dados coletados	104
6.3 PROPOSIÇÃO E RESOLUÇÃO DE NOVOS PROBLEMAS	111
6.3.1 Apresentação dos problemas	111
6.3.2 Análise dos dados coletados	112
6.4 QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO	116
6.5 CONSIDERAÇÕES PARCIAIS	120
7 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DAS SITUAÇÕES-PROBLEMA APLICADAS NO ENSINO SUPERIOR	122
7.1 SITUAÇÃO-PROBLEMA 1: ÁREA DO CÍRCULO	122
7.1.1 Apresentação da situação-problema	123
7.1.2 Desenvolvimento da situação-problema	124
7.1.3 A Metodologia de ensino através da RP em prática e análise dos dados coletados	125
7.2 SITUAÇÃO-PROBLEMA 2: IDEIA INTUITIVA DE LIMITE	131
7.2.1 Apresentação da situação-problema	131
7.2.2 Desenvolvimento da situação-problema	131
7.2.3 A Metodologia de ensino através da RP em prática e análise dos dados coletados	133
7.3 SITUAÇÃO-PROBLEMA 3: FATURA DE ENERGIA	143
7.3.1 Apresentação da situação-problema	143
7.3.2 Desenvolvimento da situação-problema	144
7.3.3 A Metodologia de ensino através da RP em prática e análise dos dados coletados	145
7.4 SITUAÇÃO-PROBLEMA 4: VIAGEM À LUA	153
7.4.1 Apresentação da situação-problema	153
7.4.2 Desenvolvimento da situação-problema	154
7.4.3 A Metodologia de ensino através da RP em prática e análise dos dados coletados	155
7.5 PROPOSIÇÃO E RESOLUÇÃO DE NOVOS PROBLEMAS	161
7.5.1 Apresentação dos problemas	162
7.5.2 Análise dos dados coletados	167
7.6 QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO	174
7.7 CONSIDERAÇÕES PARCIAIS	180
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS	183
REFERÊNCIAS	187
APÊNDICES	197
APÊNDICE A – Termo de consentimento Ensino Médio	198
APÊNDICE B – Ensino Médio, Problema 1: Paradoxo dos passos	199

APÊNDICE C – Ensino Médio, Problema 2: Paradoxo do Corredor	200
APÊNDICE D – Ensino Médio, Lista de problemas como tarefa	202
APÊNDICE E – Questionário Final de avaliação de atividades do Ensino Médio.....	204
APÊNDICE F – Questionário Inicial Ensino Superior	206
APÊNDICE G – Termo de consentimento Ensino Superior	207
APÊNDICE H – Ensino Superior, Problema 1: Área do Círculo	208
APÊNDICE I – Ensino Superior, Problema 2: Ideia intuitiva de limite	210
APÊNDICE J – Ensino Superior, Problema 3: Fatura de Energia	211
APÊNDICE K – Ensino Superior, Problema 4: Viagem à Lua.....	212
APÊNDICE L – Ensino Superior, Lista de problemas como tarefa.....	213
APÊNDICE M – Questionário Final de avaliação de atividades do Ensino Superior	217

1 INTRODUÇÃO

No contexto da Educação Matemática fala-se muito sobre o ensino e a aprendizagem, várias pesquisas são realizadas buscando uma forma de aperfeiçoar o ensino do conteúdo e a aprendizagem, ao mesmo tempo, diversas metodologias são desenvolvidas e aplicadas em sala com o intuito de obter bons resultados e avanços na Educação.

Os processos de ensino e aprendizagem também são alvos de pesquisas de conteúdos referentes a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI). No Brasil, tomando por base o mapeamento de dissertações e teses feito por Pagani e Allevato (2014), encontramos vários trabalhos já desenvolvidos, como por exemplo, sobre as dificuldades no ensino e na aprendizagem de Cálculo (BARUFI, 1999; REZENDE, 2003; VIEIRA, 2013); pesquisas com principal objetivo de investigar o ensino e aprendizagem de Cálculo em ambientes informatizados (ALVES, 2010; AMORIM, 2011; BARBOSA, 2009; GONÇALVES, 2012; MACHADO, 2008; VILLARREAL, 1999); e também estudos investigando o uso de diferentes metodologias de ensino: Modelagem Matemática (BELTRÃO, 2009; RILHO, 2005; SPINA, 2002); História do Cálculo (RIBEIRO, 2010; OLIVEIRA, 2011); Engenharia Didática (PEREIRA, 2009; PINTO, 2010a); Resolução de Problemas (ABDELMALACK, 2011; LUZ, 2011; PINTO, 2010b; ROSSI, 2012; SANGOI, 2010); entre outros.

Muitas são as variáveis que afetam o ensino e a aprendizagem do CDI, como por exemplo, no que tange o ensino, pode-se citar a forma de como os professores desenvolvem os conceitos e as estratégias, como avaliam os resultados obtidos e trabalham com erros e dificuldades dos alunos. Na aprendizagem, pode-se falar das habilidades em se trabalhar com a natureza dessa disciplina, que engloba, algoritmos, axiomas, conceitos, definições, teoremas que trazem um simbolismo especial e exigem a manipulação de ideias abstratas. Outros fatores que afetam a aprendizagem, se referem a variáveis cognitivas, como a capacidade de atenção, retenção e desenvolvimento do pensamento do aluno, como também, suas atitudes, motivação, ansiedade e tempo de dedicação aos estudos.

Dentro do CDI, a compreensão do conceito de limite é de fundamental importância para todos os alunos, pois, segundo Stewart (2012a), a ideia de limite está subentendida em vários ramos do Cálculo.

Como já foi citado, muitas pesquisas vêm sendo realizadas com relação ao ensino e aprendizagem do Cálculo, e, a respeito das dificuldades dos alunos na compreensão de limite, pode-se citar os trabalhos nacionais de Alves (2010), Celestino (2008), Zuchi (2005), Moraes

(2013), e internacionais de Tall e Vinner (1981), Sierpinska (1985), Cornu (2002), Sarvestani (2011), Swinyard e Larsen (2012). Essas pesquisas mostram que o limite é um conceito complexo para ensinar e aprender.

Brousseau (1976) na tentativa para melhor compreender a natureza dos obstáculos que podem surgir nos processos de ensino e aprendizagem de um conceito, distingue três tipos que se apresentam no sistema didático: os obstáculos de origem ontogênica são aqueles que surgem devido às limitações do sujeito no momento de seu desenvolvimento, como por exemplo, os oriundos de limitações neurofisiológicas; os de origem didática são aqueles que parecem depender apenas de uma escolha ou projeto de um sistema educacional; os de origem epistemológica são aqueles aos quais não se pode e não deve escapar, pois são inerentes à constituição do respectivo saber e que podem ser encontrados na história dos próprios conceitos. A respeito do conceito de limite, tem-se que,

O conceito matemático de limite é uma noção particularmente difícil, característica do tipo de pensamento exigido na matemática avançada. Ele detém uma posição central que permeia toda análise matemática – como um fundamento da teoria das aproximações, da continuidade, e do cálculo diferencial e integral. (CORNU, 2002, p. 153, tradução nossa).

Desse modo, alguns pesquisadores (SIERPINSKA, 1985; CORNU, 2002; KUMSA, PETTERSSON e ANDREWS, 2017) também elencam obstáculos intrínsecos ao conceito de limite, os quais serão especificados na seção 2.4.2 deste trabalho.

Segundo Cornu (2002, p. 153, tradução nossa), “uma das maiores dificuldades em ensinar e aprender o conceito de limite reside não apenas em sua riqueza e complexidade, mas também na extensão em que os aspectos cognitivos não podem ser gerados puramente a partir da definição matemática.” Além disso, de acordo com Santos (2013), um problema adicional é o estabelecimento de um lugar onde o aprendizado ocorre, pois,

A noção de limite tem que ser usada para resolver problemas específicos. É preciso que sejam apresentadas situações pelas quais os estudantes certifiquem-se de que o limite é uma ferramenta útil. O limite deve ser visto como parte da resposta para questões indagadas pelos estudantes. Isso é deixado frequentemente de fora do ensino atual. A definição da noção de limite é dada seguida por uma sequência de problemas e exercícios normalmente baseados somente na capacidade de lidar com a álgebra do conceito de limite: da soma, do produto, da composição de duas funções ou de duas séries. (SANTOS, 2013, p. 37).

No Brasil, o Cálculo já esteve presente no currículo do Ensino Básico por diversas vezes, no entanto, atualmente não existe nenhum documento oficial que explicita sua inserção no Ensino Básico. Para Ávila (2010) é possível e importante que noções e conceitos de Cálculo sejam integrados desde a primeira série do Ensino Médio. Apesar de não existir no Brasil um currículo mínimo comum para o Ensino Médio, nas orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) na área de conhecimento de Matemática, diz que,

(...) os temas selecionados devem ter relevância científica e cultural. Isso significa que, além das justificativas relativas às aplicações e à linguagem, sua importância está em seu potencial explicativo, que permite ao aluno conhecer o mundo e desenvolver sentidos estéticos e éticos em relação a fatos e questões desse mundo. (...) Os temas devem, ainda, permitir uma articulação lógica entre diferentes ideias e conceitos para garantir maior significação para a aprendizagem, possibilitar ao aluno o estabelecimento de relações de forma consciente no sentido de caminhar em direção às competências da área e, até mesmo, tornar mais eficaz a utilização do tempo disponível. (BRASIL, 2002, p. 119).

Dessa forma, acreditamos ser possível apresentar o conceito de limite também para alunos no Ensino Médio, integrado ao conteúdo de Progressões Geométricas Infinitas.

Além da seleção de temas, o PCN+, afirma que é preciso cuidar de outros aspectos didático-pedagógicos, assim, para alcançar os objetivos estabelecidos de promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática, essa proposta privilegia o tratamento de situações-problema. Destarte, é descrito que, “A **resolução de problemas** é a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado.” (BRASIL, 2002, p. 129, grifo do autor). Complementarmente,

A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticas, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. (BRASIL, 2002. p. 112).

Dessa maneira, nesta dissertação, queremos investigar como a Resolução de Problemas (RP) implementada em sala de aula com o viés da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, proposta inicialmente por Onuchic (1999), pode auxiliar a compreensão do conceito de limite.

A metodologia de ensino através da RP surge como um caminho pelo qual há boas razões já registradas que destacam sua utilidade no ensino. Por exemplo, de acordo com Onuchic e Allevato (2011), os professores que ensinam utilizando a RP se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita tradicional, eles “sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios.” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82). Com os alunos, a RP, desenvolve,

(...) capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos. (...) desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82).

Analisando o fato de que a compreensão de ideias abstratas do conceito de limite não é uma simples habilidade, acreditamos que além do ambiente de lápis e papel, um ambiente

tecnológico também pode contribuir na compreensão do conceito. Tall (1991) apresenta algumas ideias de que o computador é uma fonte rica de imagens visuais, e que possibilita a exploração de conceitos matemáticos, enfatizando a importância da visualização no Cálculo:

(...) negar a visualização é negar as raízes de muitas das nossas mais profundas ideias matemáticas. Nos estágios iniciais de desenvolvimento da teoria das funções, limites, continuidade e similares, a visualização provou ser uma fundamental fonte de ideias. Negar essas ideias aos alunos é cortá-las das raízes históricas do assunto. (TALL, 1991, p. 105, tradução nossa).

Com essa acepção, a função de um software é primordial, Richit (2010) entende a necessidade do resgate geométrico do Cálculo, por meio de recursos tecnológicos, afirmando que, “Incorporar os recursos tecnológicos (como o software GeoGebra, entre outros) na abordagem de conceitos de Cálculo permite que a natureza geométrica e dinâmica do Cálculo seja resgatada, (...)” (RICHIT, 2010, p. 42).

Os softwares de geometria dinâmica são instrumentos que podem contribuir para a visualização e possibilitam a formulação, testes, validação ou refutação de conjecturas de um problema. Aqui, optamos por trabalhar com o software GeoGebra como componente do desenvolvimento de problemas aplicados. A escolha desse software deve-se ao fato dele ser gratuito, possuir interface simples e intuitiva, e possibilitar a elaboração e modificação de applets, tanto para uso em sala de aula quanto para disponibilizá-los na sua plataforma online. Além disso, o software GeoGebra, nos últimos anos, está denotando uma importante revolução, especialmente para professores de matemática, interessados na incorporação das tecnologias digitais (TD) em sala de aula. Segundo Richit et al. (2012, p. 94), “as atividades, desenvolvidas por meio do software GeoGebra, poderão colaborar para os desafios enfrentados na compreensão e apropriação dos conceitos de Cálculo.”

Apesar de todas essas ideias expostas, existe um adendo a respeito do uso das TD, pois,

Embora exista um reconhecimento sobre as potencialidades e possibilidades advindas da utilização de recursos das tecnologias digitais na abordagem de conceitos de Cálculo, sabemos que essa característica por si só não é suficiente para que sejam integradas a estas aulas as tecnologias. (RICHIT, FARIAS, 2013, p. 8).

Nessa perspectiva, de acordo com Pescador (2016) para utilizar as TD com objetivo a contribuir para o aprendizado dos estudantes, há que se considerar alguns aspectos como a cooperação, a colaboração, a interação e o respeito mútuo com vistas a serem recursos que possibilitem experiências de aprendizado. Essas são características presentes na Metodologia de ensino através da RP, conforme Pironel e Vallilo (2017, p. 291) expõem: “O trabalho colaborativo é muito importante na resolução de problemas, pois permite aos estudantes com maiores dificuldades discutir suas dúvidas e concepções com os colegas que apreenderam um determinado conceito com maior rapidez ou com mais precisão.”

Entretanto, o trabalho através da RP, exige do professor novas posturas e atitudes com relação ao trabalho em sala de aula, pois ele precisa preparar, ou escolher, problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Como é um desafio o planejamento e a realização de aulas inovadoras para professores cujos recursos didático-metodológicos e de tempo são escassos, propomos a construção de um caderno didático, contemplando atividades referentes ao conteúdo de limites, utilizando a Metodologia de ensino através da RP mediada pelo software GeoGebra. As atividades contemplarão alguns problemas para serem aplicados no Ensino Médio, e outros para serem desenvolvidos no Ensino Superior. Essas atividades com aplicativos do GeoGebra ficarão disponibilizadas online, na ferramenta chamada GeoGebraBook, disponível na plataforma do GeoGebra. Assim, o docente poderá ter acesso ao material produzido, e utilizá-lo em suas aulas.

Diante do exposto, uma pergunta central foi sintetizada explicitando a situação que se busca abordar com a presente pesquisa e também com o desenvolvimento do produto educacional: Como a Metodologia de ensino através da Resolução de Problemas mediada pelo GeoGebra pode contribuir no ensino e aprendizado do conceito de limite?

Para responder tal pergunta, essa pesquisa tem como objetivo principal propor uma abordagem para o ensino de limites através da Resolução de Problemas mediada por recursos dinâmicos do software GeoGebra. E os objetivos específicos são:

- Desenvolver um material com problemas envolvendo conceitos de limite que possam ser trabalhados através da Resolução de Problemas;
- Explorar os recursos do software GeoGebra na abordagem dos problemas propostos;
- Implementar o Produto Educacional - um caderno didático - utilizando a ferramenta GeoGebraBook a partir dos problemas propostos;
- Disponibilizar o produto educacional aos professores.

Esta dissertação está dividida em oito capítulos, acrescida de referências e apêndices, sendo essa introdução o primeiro deles.

No segundo capítulo, é apresentado sobre o ensino do CDI no Brasil, expondo um panorama do seu desenvolvimento tanto no Ensino Superior como no Ensino Básico. Nele, também é descrito sobre os conceitos de Progressão Geométrica Infinita, limite de função e limite de sequência, e em seguida são relatados obstáculos do conceito de limite que foram fundamentados em pesquisas que abordam esse tema.

O terceiro capítulo contempla aspectos e terminologias que caracterizaram as fases do desenvolvimento tecnológico, definições associadas a visualização, características de softwares no ensino, e a motivação para escolha do software GeoGebra. Além disso, neste capítulo é apresentada as versões disponíveis para acesso aos recursos do GeoGebra, bem como, a plataforma online do software.

No quarto capítulo, encontram-se as concepções sobre a Resolução de Problemas e apresenta-se a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problema, que é um dos focos deste trabalho. Aqui também são citadas pesquisas que envolvem a RP associadas ao GeoGebra.

O quinto capítulo discorre sobre a metodologia de pesquisa que orienta esta dissertação, mencionando os procedimentos metodológicos adotados nas etapas do desenvolvimento do trabalho. Também é descrito a respeito do produto educacional e elencados os recursos utilizados para coleta de informações, o contexto de investigação no Ensino Médio e no Ensino Superior, e em seguida é exposto o processo utilizado na análise dos dados.

Os capítulos seis e sete, constituem-se com a apresentação das atividades e sua aplicação em sala de aula no Ensino Médio e Ensino Superior, respectivamente. Assim como, são apresentadas as análises do seu desenvolvimento e considerações parciais.

Finalizando, o oitavo capítulo, contém considerações finais e perspectivas desta pesquisa, sendo apontadas algumas contribuições para o ensino e aprendizado do conceito de limite, além de possibilidades para trabalhos futuros.

2 ENSINO DE CÁLCULO E O CONCEITO DE LIMITE

Neste capítulo, apresentamos alguns aspectos relacionados ao ensino do Cálculo Diferencial e Integral no Brasil, apresentando um panorama do seu desenvolvimento tanto no Ensino Superior como também no Ensino Básico. Tecemos algumas considerações a respeito das conexões possíveis do Cálculo no Ensino Médio, como na introdução do conceito de limite através do conteúdo de Progressões Geométricas Infinitas.

Em seguida, é mencionada a definição de limite de função de uma variável real e de limite de sequência. Posteriormente são elencados obstáculos do conceito de limite, fundamentados em pesquisas que abordam essa temática.

2.1 PANORAMA DO ENSINO DE CÁLCULO NO ENSINO SUPERIOR NO BRASIL

De acordo com Lima (2013b), no Brasil, a disciplina de CDI começou a ser ensinada em 1810, no *Curso Matemático* da então recém-criada Academia Real Militar do Rio de Janeiro, e posteriormente, o conteúdo de Cálculo passou a ser trabalhado também nas escolas politécnicas que foram sendo fundadas no país ao longo do século XIX. Nesses cursos, a abordagem dada resumia-se basicamente a derivação e integração, sempre com ênfase nas regras destes processos (LIMA, 2013b).

Lima (2012) afirma que durante todo o século XIX e início do século XX, uma das características principais do ensino do Cálculo no Brasil foi exatamente ter um caráter prático, supervalorizando as regras.

(...) nas escolas militares e politécnicas, o curso tinha um caráter prático, cujas características principais eram a ênfase nos procedimentos algorítmicos, a apresentação apenas das definições e deduções que fossem realmente essenciais para o desenvolvimento da disciplina e a capacitação dos egressos de tais cursos para que estes pudessem utilizar os elementos do Cálculo como ferramentas em suas carreiras profissionais (...) (LIMA, 2013a, p. 4).

Lima (2013b) destaca que esse panorama mudou a partir de 1934, ano que passou a funcionar, na USP (Universidade de São Paulo), o primeiro curso de Graduação em Matemática do país. Um dos professores contratados, o italiano Luigi Fantappiè, passou a orientar a disciplina de Cálculo, seguindo o modelo presente em universidades de diversos países europeus. Nesse modelo não havia no currículo uma disciplina chamada Cálculo Diferencial e Integral, os conceitos fundamentais eram trabalhados diretamente em uma disciplina chamada Análise Matemática, ministrada desde o primeiro ano do Ensino Superior.

Assim, tanto a USP como outras universidades brasileiras deixaram de oferecer cursos com a denominação de Cálculo e introduziram em seus currículos disciplinas de Análise, e mesmo naquelas em que a nomenclatura foi mantida, a abordagem dada aos conteúdos, bem como os objetivos ao se ensiná-los, sofreram mudanças significativas (LIMA, 2013a):

(...) a ênfase passou a ser a formalização do conteúdo trabalhado, apresentado sempre com um elevado nível de rigor, e acompanhado das demonstrações de todos os resultados enunciados. As técnicas de cálculo perderam quase que completamente seu espaço e o objetivo da disciplina passou a ser fornecer aos estudantes uma sólida conceitualização dos elementos matemáticos estudados. (LIMA, 2013a, p. 5).

No entanto, em 1964, após alguns questionamentos de pesquisadores, principalmente da professora Elza Furtado Gomide da USP, o currículo do curso de Matemática, voltou a ter a disciplina de CDI, porém, agora a teoria da disciplina poderia ser trabalhada de forma mais acessível aos alunos ingressantes na universidade, deixando para um momento posterior do curso alguns refinamentos. Mas, as técnicas de cálculos de limites, derivadas e integrais que, até então não tinham qualquer espaço no curso inicial de Análise, deveriam ser incorporadas à disciplina, como ferramentas que possibilitassem ao estudante manipular aqueles conteúdos que haviam estudado (LIMA, 2013b). “Estabeleceu-se então, primeiramente na USP e posteriormente, com esta instituição servindo de modelo para outras, na maioria das universidades brasileiras, a ideia do Cálculo como sendo um pré-requisito para a Análise.” (LIMA, 2013a, p. 13).

Lima (2013a) comenta que entre o final da década de 1970 e o início da década de 1980, alguns docentes questionavam que o curso de Cálculo havia se tornado muito menos rigoroso do que deveria ser, então, a partir desse período é observada uma grande variedade de orientações dadas à disciplina, sendo que estas dependiam exclusivamente das concepções do docente responsável por ministrar o conteúdo. Nesse período foi percebido,

(...) a convivência de disciplinas conduzidas com níveis de rigor mais altos do que aqueles encontrados em cursos atuais de Análise com outras conduzidas de maneira bastante semelhante à maioria dos cursos de Cálculo ministrados atualmente. Em alguns momentos os procedimentos algorítmicos foram privilegiados em demasia, enquanto que em outros as técnicas de cálculo de limites, derivadas e integrais voltaram a ser quase banidas do programa, fazendo com que os alunos concluíssem a disciplina sem ser capazes de manipular estes conceitos ou utilizá-los na resolução de problemas, tarefas que também são importantes no ensino superior. (LIMA, 2013a, p. 9).

Em síntese, percebe-se que o ensino do Cálculo no Brasil passou por várias transformações no decorrer dos anos, porém, não houve uma preocupação em discutir quais deveriam ser os objetivos específicos dessa disciplina e, principalmente, o seu papel nos mais diversos cursos de Graduação. Temos que, somente em 1994, se deu a diferenciação entre o

curso inicial de Cálculo na Licenciatura e o do Bacharelado em Matemática, nesse momento então,

Houve a preocupação em remodelar o curso destinado aos licenciandos de modo a se discutir, com maior profundidade, aspectos do Cálculo que fossem fundamentais aos futuros professores dos ensinos fundamental e médio e também de forma a permitir que os estudantes pudessem sanar as dificuldades matemáticas trazidas da educação básica. Enquanto isso, o curso destinado aos bacharelados permaneceu praticamente inalterado. (LIMA, 2013b, p. 1748).

O Boletim da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, coloca que

Um curso de Cálculo Diferencial e Integral para a licenciatura se torna importante promover a oportunidade de compreender a importância dos conceitos de funções e suas aplicações vistas desde o 8º ano do Ensino Fundamental, assim como ampliar a visão do futuro professor sobre o desenvolvimento histórico da própria matemática, que teve consequências contundentes para a humanidade nos últimos séculos. (SBEM, 2013, p.19).

Segundo Lima (2013b), um dos grandes desafios atuais para os pesquisadores da Educação Matemática no Ensino Superior, é construir uma identidade para a disciplina de Cálculo, tanto na Matemática como em qualquer outro curso de Graduação da qual ela faça parte. Porquanto, muitas vezes, o que acontece é que nos cursos nos quais os estudantes não vão passar posteriormente pela disciplina de Análise, o Cálculo continua sendo ministrado como uma preparação para ela: “é, em geral, um curso no qual o foco é ganhar habilidade em cálculos de limites, derivadas e integrais. Desta forma, valoriza-se a técnica em detrimento dos significados dos conceitos abordados.” (LIMA, 2013a, p. 14).

Semelhante ao que ocorreu no Ensino Superior na ministração do Cálculo, o ensino de seus conceitos no Ensino Básico também passou por várias modificações, como será relatado no próximo tópico deste capítulo.

2.2 PANORAMA DO ENSINO DE CÁLCULO NO ENSINO BÁSICO NO BRASIL

A partir de 1890 com o decreto nº 891 baixado por Benjamin Constant foi introduzido o estudo do CDI no terceiro ano (TORRES; GIRAFFA, 2009). Porém, de acordo com Pereira (2009) pelo fato de assumir uma postura excessivamente formalística, tornou-se inútil e contraproducente, então, em 1900 culminou com sua retirada dos programas oficiais. E, nos anos que se seguiram, até 1930, nenhuma das reformas propostas chegou a produzir mudanças significativas no ensino secundário brasileiro (PEREIRA, 2009).

De acordo com Pereira (2009), em 1931 houve uma tentativa de estruturar todo o curso secundário nacional, e de introduzir nele os princípios modernizadores da educação, sendo enfatizada, por exemplo, a introdução do conceito de função e noções do Cálculo Infinitesimal,

no entanto, sua implementação não teve o efeito desejado, um dos motivos foi pela inexistência, quase que total, de livros didáticos que contemplassem tais ideias modernizadoras. E posteriormente,

Com a Lei de Diretrizes e Bases em 1961, a estrutura da escola brasileira foi dividida em quatro graus escolares: primário, ginásial, colegial e superior. Com a flexibilização do currículo escolar, desaparece o ensino do Cálculo na escola secundária, salvo em algumas escolas isoladas, situação que perdura até hoje. (PEREIRA, 2009, p. 48).

Uma das formas que podemos verificar que não há uma unanimidade se os conceitos do Cálculo estão ou não presentes no Ensino Básico, é através dos livros didáticos, já que eles permeiam como pode/deve se trabalhar os conteúdos em determinada época. Para isso, em seguida é descrita uma análise resumida de três livros do Ensino Médio.

O primeiro deles, “Matemática 3 em 1”, possivelmente da década de 70, traz um capítulo de limites e derivadas, no qual o autor Luiz Carlos Domenico, não apresenta nenhuma aplicação prática, apenas exercícios técnicos. Semelhante ao que a história do Cálculo no país fala sobre essa situação.

Dante (2005) no seu livro de volume único contempla os conteúdos das três séries do Ensino Médio, ele exhibe em um momento do texto, uma ideia relativa ao Cálculo. No capítulo de Progressões, coloca uma seção intitulada “Limite da soma dos termos de uma PG infinita”, que discute com alguns exemplos o que acontece com a soma de algumas sequências, como na Figura 1:

Figura 1 - Limite da soma dos termos de uma Progressão Geométrica Infinita

Introdução

Consideremos a sequência $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ com $n \in \mathbb{N}^*$, explicitada por:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \dots, \frac{1}{100}, \dots, \frac{1}{1000}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

PARA REFLETIR Essa sequência é uma PG?

ou, ainda, em representação decimal:

$$1; 0,5; 0,333\dots; 0,25; 0,2; 0,16\dots; 0,142\dots; 0,125; 0,11\dots; 0,1; \dots; 0,01; \dots; 0,001; \dots$$

Observemos que, à medida que n cresce indefinidamente (tendendo a infinito), o termo $a_n = \frac{1}{n}$ tende a 0 (zero). Indicamos assim:

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

ou, então, assim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

que lemos: limite de $\frac{1}{n}$ quando n tende a infinito é igual a 0.

Nas progressões geométricas em que $0 < |q| < 1$, a soma dos n primeiros termos tem um limite finito quando n tende a infinito. Nesse caso, q^n aproxima-se de zero para n suficientemente grande, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Sabemos que $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$, $q \neq 1$.

Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a_1 \cdot \frac{1 - 0}{1 - q}$, isto é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}, \quad 0 < |q| < 1$$

Observa-se também, que Dante (2005) usa operações de limite para chegar a fórmula da Progressão Geométrica (PG) infinita. E, a partir disso, coloca mais exemplos e depois alguns exercícios para serem resolvidos. Porém, depois dessa situação não há mais menção de conceitos relacionados ao Cálculo. Aqui, pode-se destacar que o autor apenas apresentou como se lê a notação inserida, não explicando em nenhum momento a respeito dos termos que colocou e também sobre o que é o limite.

Em contrapartida, um livro mais recente “Matemática Ensino Médio” de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz do ano de 2013, no terceiro volume, apresenta várias situações e aplicações do Cálculo. As autoras trazem uma unidade do livro, intitulada “Taxa de variação de funções”, que é composta de cinco tópicos, apresentados no Quadro 1, com os respectivos conteúdos que abordam.

Quadro 1 - Tópicos e conteúdos abordados na unidade “Taxa de variação de funções” do livro “Matemática Ensino Médio”

Título do Tópico	Conteúdo abordado
1. Taxa de variação média	Contextualizam taxa de variação média com exemplos físicos.
2. Variação instantânea de uma função: noção de derivada	Trazem a noção intuitiva de limite de uma função; falam que a taxa de variação instantânea também pode ser chamada de derivada, conceituam reta tangente e mostram a interpretação cinemática da derivada.
3. Função derivada	Definem a derivada usando a definição de limite, e colocam exemplos de derivadas de algumas funções ($f(x) = c$, $f(x) = x^n$, $f(x) = \sqrt{x}$).
4. Sinal da derivada	Com auxílio de gráficos, mostram como seria o comportamento da função (crescente ou decrescente).
5. Pontos de máximo e de mínimo de uma função	Definem com mais cuidado o que significam pontos de máximo e de mínimo e de que forma a derivada auxilia a interpretá-los.

Fonte: Produção da autora, 2017.

Nesses três livros, observamos que o modo e os conteúdos em cada um são abordados de formas diferente, Domenico (19_ _) foca nas técnicas de resolução de limites e derivadas, Dante (2005) não aborda especificamente conceitos do Cálculo, apenas deixa implícito algumas notações, e Smole e Diniz (2013) apresentam diferentes representações (gráficos, figuras, tabelas, situações problemas) para abordar os conceitos e dizem na parte extra do livro (dedicada apenas ao professor) que embora haja controvérsia sobre a introdução do CDI no Ensino Médio, elas apresentam nesse volume uma unidade dedicada a taxa de variação. As autoras salientam que optaram por uma abordagem na qual os conceitos de limite e derivada aparecem quando são necessários para a resolução de problemas, e que o objetivo é que “os alunos utilizem a noção de derivada para aprimorar a análise das funções polinomiais, especialmente na resolução de problemas de crescimento e de determinação de pontos de máximo e de mínimo. ” (SMOLE; DINIZ, 2013, p. 370).

Ávila (2010) também fala da importância de se ensinar derivada já no Ensino Médio, mas, desde que seja feito de maneira adequada a esse nível, diferente de como se faz nas disciplinas dos cursos universitários de Cálculo. O autor afirma que como consequência disso (tentar fazer no Ensino Médio exatamente o que se faz no CDI), é que limites e derivadas não são levados a sério no Ensino Médio, pois alega-se que são coisas muito difíceis, desse modo, o autor afirma que: “o que se deve fazer no ensino médio é uma apresentação bem simples e modesta, o suficiente para que o aluno possa perceber a importância desses conceitos, o suficiente para mostrar seu largo alcance nas aplicações.” (ÁVILA, 2010, p. 167). Com relação ao ensino da derivada, “deve ser feito logo na primeira série, quando pode integrar harmoniosamente com a Física no estudo do movimento (...) além de servir para o estudo dos polinômios e em outras aplicações científicas.” (ÁVILA, 2010, p. 175).

Machado (2015) também afirma ser possível ensinar CDI tanto no Ensino Médio como já no Ensino Fundamental, para ele, o conjunto das ideias mais importantes do Cálculo são fundamentais desde o Ensino Fundamental. Porém, ressalta que não se trata de introduzir novos conteúdos no Ensino Básico, mas, de reconhecer e explorar as ideias fundamentais do CDI que já se encontram presentes nos conteúdos usualmente ensinados, por exemplo, diz que trabalhando apenas com funções polinomiais de grau 1, o professor já consegue passar as ideias mais importantes do Cálculo (MACHADO, 2015).

Com todas essas ideias apresentadas, percebe-se que é possível trabalhar com as noções do CDI em sala de aula no Ensino Básico com conteúdos que já estão no currículo, por exemplo, ao trabalhar com progressões, taxas de variações e áreas. Além disso, pode-se vincular desde a primeira série do Ensino Médio o estudo de funções com limites e derivadas, ao invés de deixá-los apenas para a terceira série – como aparece nos livros didáticos.

Neste viés, Molon (2013) em sua dissertação de Mestrado avalia a possibilidade e a necessidade da inserção das noções intuitivas do CDI no Ensino Médio, ainda no primeiro ano, aliado ao estudo de funções. A autora propõe e analisa a aplicação de atividades dentro do desenvolvimento dos programas de ensino já existentes, trabalhando, por exemplo, com velocidade instantânea, reta tangente, cálculo da área de regiões limitadas por curvas, progressões geométricas e aritméticas. Segundo ela,

Atividades elaboradas com o objetivo de introduzir esses conceitos intuitivos no Ensino Médio podem ampliar o olhar do estudante, durante o estudo de funções, de modo que, com a introdução dessas ideias intuitivas, seus estudos posteriores sejam facilitados. (MOLON, 2013, p. 110).

Assim, com relação a inserção das ideias fundamentais do CDI no Ensino Básico, exploradas no contexto de tópicos já existentes do currículo, pode-se afirmar que além de

viáveis para serem trabalhadas, possibilitam uma ampla gama de unidades cognitivas relacionadas aos conceitos do Cálculo, que ajudarão o estudante no enriquecimento de outros conceitos dentro e fora da Matemática. Reforçando esse pensamento, o pesquisador Rezende diz que:

De fato, a ausência das ideias e problemas essenciais do Cálculo no ensino básico de matemática, além de ser um contrassenso do ponto de vista da evolução histórica do conhecimento matemático, é, sem dúvida, a principal fonte dos obstáculos epistemológicos que surgem no ensino superior de Cálculo. (REZENDE, 2003, p. 402).

Assim, concordando com o que Ávila (2010, p. 167) diz a respeito dos conceitos do Cálculo “é importante que todos esses conceitos sejam ensinados de maneira integrada e não separados em blocos estanques”, que nos propomos elaborar problemas para ser possível a introdução do conceito de limite no Ensino Médio a partir do estudo das Progressões Geométricas Infinitas.

2.2.1 Progressão Geométrica Infinita

Uma Progressão Geométrica (PG) corresponde a uma sequência de números reais não nulos, quando cada um de seus termos, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante q , denominada razão da PG. As PGs são denominadas finitas ou infinitas conforme o número de termos seja finito ou infinito, exemplificando:

- PG Finita: $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$;
- PG Infinita: $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots)$.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) fazem algumas considerações a respeito dos conteúdos que deverão ser trabalhados no Ensino Médio. No PCN+ Ensino Médio – Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – na área de conhecimento de Matemática, a respeito do conceito de PG, é descrito que:

O estudo da progressão geométrica infinita com razão positiva e menor que 1 oferece talvez a única oportunidade de o aluno estender o conceito de soma para um número infinito de parcelas, ampliando sua compreensão sobre a adição e tendo a oportunidade de se defrontar com as ideias de convergência e de infinito. Essas ideias foram e são essenciais para o desenvolvimento da ciência, especialmente porque permitem explorar regularidades. (BRASIL, 2002, p. 121).

Com relação a compreensão da ideia de infinito, Juter e Grevholm (2007) dizem que os conceitos envolvendo infinito são complexos, porém, necessários para os estudos de

matemática, e afirmam que esses conceitos devem ser introduzidos e tratados com mais cuidado por professores, tanto em nível escolar, como universitário.

Ainda no PCN+, a respeito do conteúdo de sequências, é dito que:

O ensino desta unidade deve se ater à lei de formação dessas sequências e a mostrar aos alunos quais propriedades decorrem delas. Associar às sequências seus gráficos e relacionar os conceitos de sequência crescente ou decrescente aos correspondentes gráficos permite ao aluno compreender melhor as ideias envolvidas, ao mesmo tempo que dá a ele a possibilidade de acompanhar o comportamento de uma sequência sem precisar decorar informações. (BRASIL, 2002, p. 121).

Desta forma, nos problemas que desenvolvemos para serem aplicados no Ensino Médio, conforme será apresentado ao longo desta dissertação, teve-se a intenção trabalhar com os alunos os conceitos que envolvem a PG Infinita. E para relacionar os conceitos de sequência crescente ou decrescente aos seus correspondentes gráficos, conforme orienta o PCN+, foram utilizados em sala os recursos do software GeoGebra.

Como este trabalho está focado no ensino e aprendizado do conceito de limite, o objetivo principal com os problemas propostos foi chegar a fórmula da soma dos infinitos termos de uma PG, pois para formalizá-la é necessário utilizar o conceito de limite de sequência – tópico que será abordado ainda neste capítulo. Desta maneira, o intuito em sala de aula foi de utilizar a expressão da soma dos n primeiros termos de uma PG dada por:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

E através dela, com a ideia intuitiva de limite e suas operações, mostrar que podemos encontrar a soma dos infinitos termos de uma PG quando a razão q é um número cujo valor absoluto é menor do que 1 (isto é, se $-1 < q < 1$) então, quando o número de termos n tende a infinito, o valor de q^n tende a 0 e, portanto a soma S se torna:

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

2.3 CONCEITO DE LIMITE

O conceito de limite é resultado de uma longa evolução teórica de conceitos matemáticos, seu surgimento foi impulsionador de toda ciência moderna, trazendo uma abordagem adequada e desencadeando o desenvolvimento do CDI.

A formalização do conceito estendeu-se, portanto, por um longo processo até o século XIX, decorrente dos esforços de vários estudiosos, podendo-se destacar as contribuições de Arquimedes (c. 225a.C.), D'Alembert (1717-1783), Bolzano (1781-1848), Cauchy (1789-

1857) e Weierstrass (1815-1897), devendo-se a este último a definição precisa de limite como conhecemos hoje, em termos de ε e δ ¹.

O limite é usado tanto em CDI como em ramos da Análise Matemática, para definir derivadas, continuidade de funções e integrais. O conceito de limite é utilizado para descrever o comportamento de uma função, visando determinar o que acontece (estudo do comportamento) com os valores da imagem de uma função quando, no domínio dessa função, tomam-se valores suficientemente próximos de um determinado ponto (número), assim como, o limite é usado para descrever o comportamento de uma sequência de números reais, à medida que o índice (da sequência) vai crescendo (tendendo para infinito) – tais conceitos são definidos no item 2.3.1.

(...) o conceito de limite surge de problemas tais como encontrar a área de uma região, a tangente de uma curva, a velocidade de um carro ou a soma de uma série infinita. Em cada um dos casos, o tema comum é o cálculo de uma quantidade como o limite de outras quantidades mais facilmente calculáveis. É essa ideia básica que coloca o cálculo à parte de outras áreas da matemática. Na realidade, poderíamos definir o cálculo como aquele ramo da matemática que trata de limites. (STEWART, 2012a, p. xxviii).

2.3.1 Limite de função e limite de sequência

Ao abordar limites, temos o viés de limite de funções e o viés de limite de sequência, neste tópico vamos apresentar ambos.

Usa-se limites para descrever como uma função f varia. Algumas funções variam continuamente – pequenas mudanças em x produzem pequenas mudanças em $f(x)$ - já outras, podem ter valores que saltam ou variam erratically, e a noção de limite fornece um caminho preciso para distinguir esses comportamentos (THOMAS, 2009).

Thomas (2009), coloca que uma definição informal de limite de uma função de uma variável pode ser escrita como:

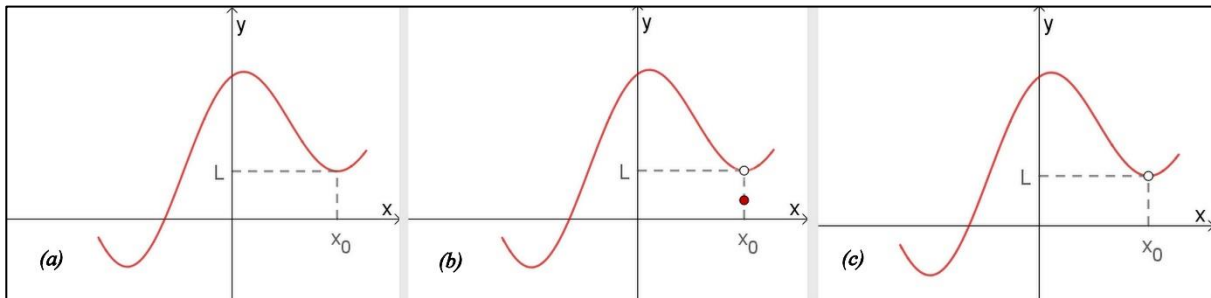
Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de x_0 , *exceto talvez em x_0* . Se $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de L (tão próximo quanto quisermos), para todos os valores de x suficientemente próximos de x_0 , dizemos que f tem **limite** L quando x tende a x_0 e escrevemos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ que se lê ‘o limite de $f(x)$, quando x tende a x_0 , é L ’. (THOMAS, 2009, p. 70, grifos do autor).

Essa definição é tida como informal, pois segundo o autor as expressões “arbitrariamente próximo” e “suficientemente próximo” são imprecisas, seu significado depende do contexto. E a expressão “exceto talvez em x_0 ” significa que ao procurar o limite de

¹ Letras do alfabeto grego δ (delta) e ε (epsilon).

$f(x)$ quando x tende a x_0 nunca considera-se $x = x_0$, pois $f(x)$ não precisa sequer estar definida quando $x = x_0$, o que importa é como está definida próxima de x_0 . A Figura 2 mostra exemplos disto.

Figura 2 - Limite da função $f(x)$ em três casos.



Fonte: Produção própria, 2018.

Nota-se que na parte (b), $f(x_0) \neq L$, e na parte (c) $f(x_0)$ não está definida, mas, em cada caso, não importando o que acontece em x_0 , $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

Porém, para provar que o limite de $f(x)$ com x tendendo a x_0 é realmente igual a L , é preciso mostrar que a distância entre $f(x)$ e L pode ficar menor do que qualquer erro prescrito, não importando quão pequeno ele seja, desde que x seja mantido suficientemente próximo a x_0 . E isso é possível pela definição de limite de uma função, no livro de Guidorizzi (2013, p. 72) temos a seguinte definição:

Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f . Dizemos que f tem limite L , em p , se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$,

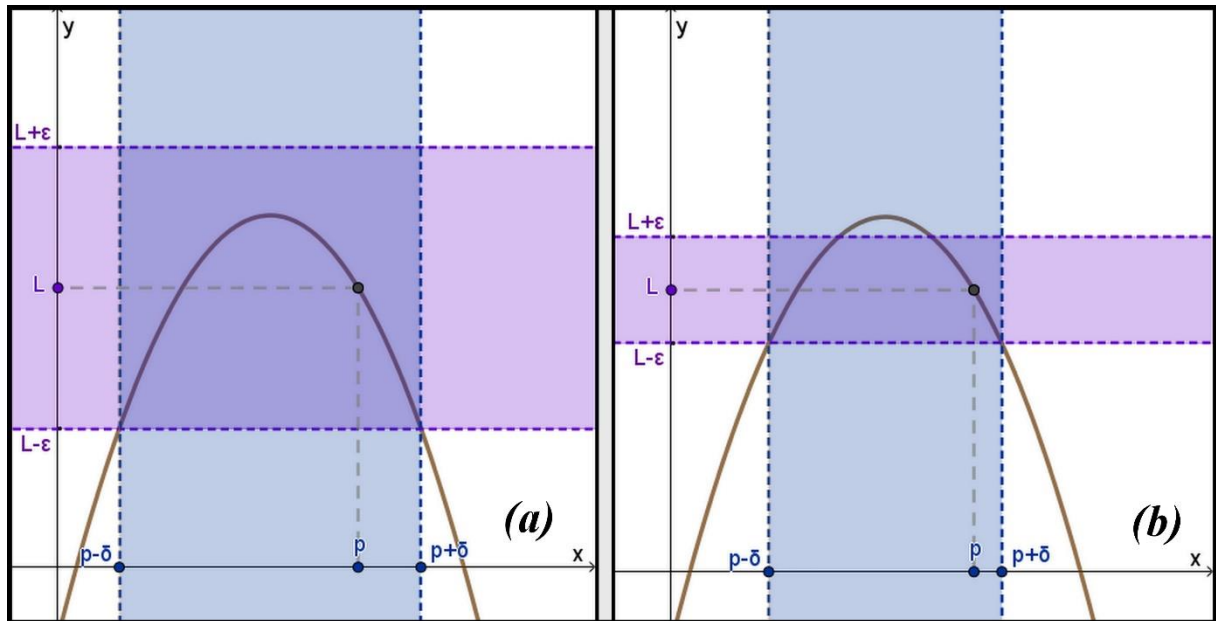
$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Tal número L , que quando existe é único, será indicado por $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$.

A compreensão de tal definição do limite de uma função não é uma tarefa fácil, em especial para um aluno que acaba de entrar na universidade, essa complexidade é oriunda da linguagem formal e simbólica da definição. Outro problema relativo ao entendimento do limite, é a exploração de seus conceitos pelo ponto de vista geométrico (limite pela definição, limites laterais, limites envolvendo o infinito etc.), por exemplo, Weigand (2014) afirma, baseado nos resultados de suas pesquisas, que a compreensão conceitual de limite é um desafio para os estudantes e exige explicações e visualizações usando diferentes representações (além da representação simbólica). Assim, os recursos das tecnologias digitais podem contribuir com a transposição para o registro gráfico dos conceitos, exemplificando, utilizando o GeoGebra, com relação a definição formal do limite temos que o valor de δ depende de ε , na Figura 3, tem-se

uma representação geométrica dessa variação, em que é ilustrada a simulação da relação entre δ e ε . Dessa forma, dada uma tolerância para ε (parte a), e conforme essa tolerância diminui, a variação de δ também diminui (parte b).

Figura 3 - Relação entre δ e ε no limite de uma função de uma variável real



Fonte: Produção própria, 2018.

Em Matemática o termo sequência “(...) pode ser definida como uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos. ” (STEWART, 2012b, p. 641). Ela pode ser pensada como uma lista de números escritos em uma ordem definida:

$$a_1, a_2, a_3, a_{14}, \dots, a_n, \dots$$

O número a_1 é chamado primeiro termo, a_2 é o segundo termo e, em geral, a_n é o n ésimo termo. E a definição de limite de sequência, segundo Stewart (2012b, p. 642) é dada por:

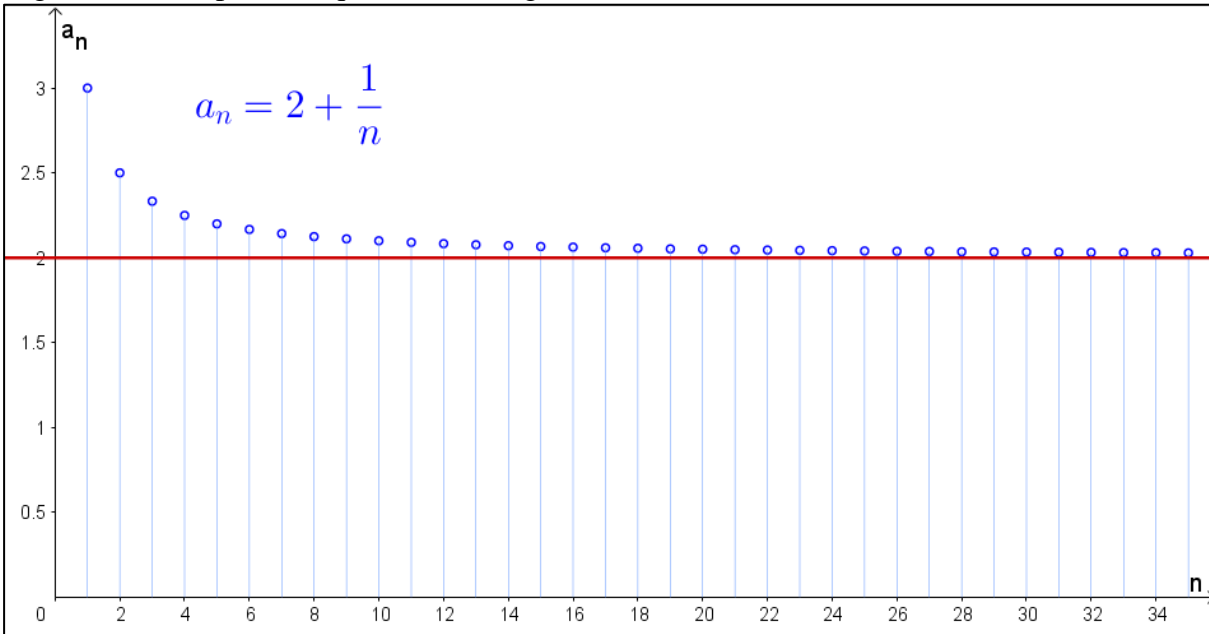
Uma sequência $\{a_n\}$ tem o limite L e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \rightarrow L \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty$$

se podemos fazer os termos de a_n tão perto de L quanto se queria ao fazer n suficientemente grande. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existir, dizemos que a sequência converge (ou é convergente). Caso contrário, dizemos que a sequência diverge (ou é divergente).

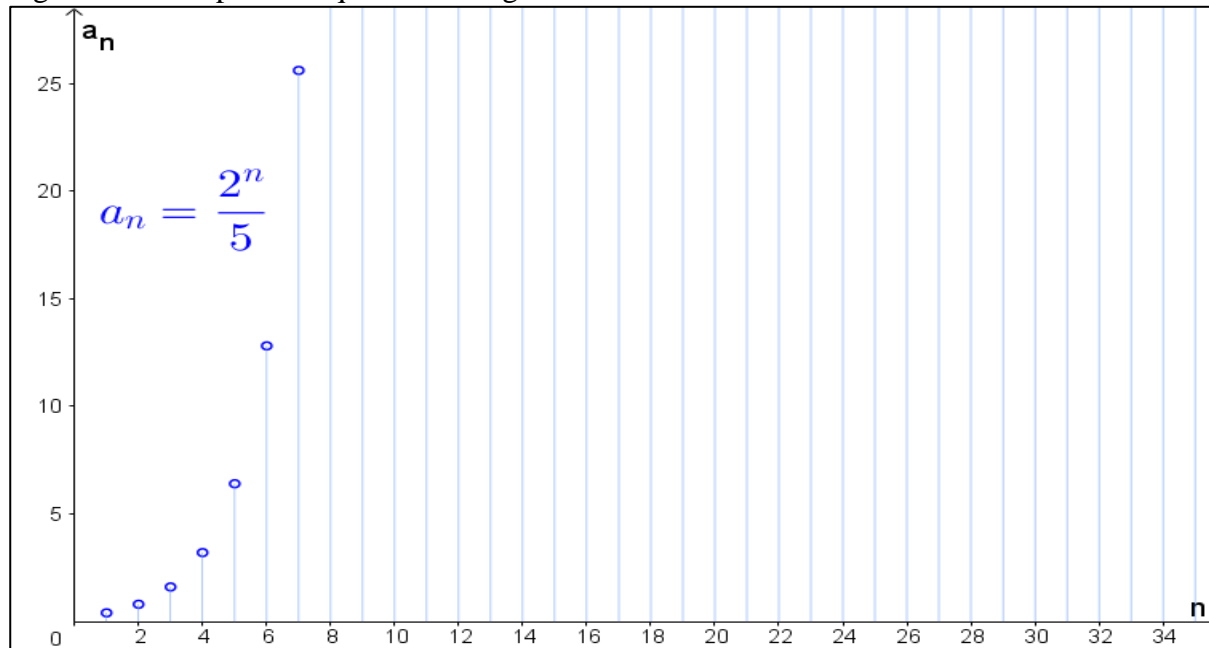
As Figuras 4 e 5 ilustram essa definição com exemplos de sequência convergente e divergente, respectivamente.

Figura 4 - Exemplo de sequência convergente



Fonte: Produção própria, 2018.

Figura 5 - Exemplo de sequência divergente



Fonte: Produção própria, 2018.

Outra definição que se tem dentro desse contexto é a de *série*. Denomina-se série infinita à soma de todos os infinitos termos de uma sequência (a_n) de números reais, isto é, uma série é uma expressão da forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

A sequência a_n , cujos termos são somados, é chamada de termo geral ou enésimo termo da série. Note-se que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i.$$

Não há um padrão em que esses conceitos são trabalhados no Ensino Superior, no CCT da UDESC é estudado limite de função na disciplina de CDI I e limite de sequência na disciplina de CDI II em todos os cursos, e no curso de Licenciatura em Matemática eles também são trabalhados na disciplina de Análise Real.

No entanto, como já foi discutido no item 2.2.1 deste capítulo, o conceito de limite também é necessário para definir conceitos de PGs trabalhados no Ensino Médio. E, para levá-los até a sala de aula do Ensino Médio, recorreremos a contextos da história da Matemática, aos paradoxos de Zenão, já que a noção do limite foi essencial para o esclarecimento desses paradoxos. O PCN+ aponta competências que se espera que o aluno do Ensino Médio desenvolva, e uma delas é que ele deve:

Compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico, em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época, de modo a permitir a aquisição de uma visão crítica da ciência em constante construção, sem dogmatismos ou certezas definitivas. (BRASIL, 2002, p. 117).

Assim, em nossos problemas foram utilizados os paradoxos propostos por Zenão de Eleia (c. 450 a.C.) que tiveram influência profunda na matemática (EVES, 2011). Esses paradoxos ficaram por muitos séculos sem solução, e só foram desvendados após a formalização dos conceitos de limite e de séries convergentes no século XIX. Desse modo, queremos mostrar para os alunos que a Matemática é uma forma histórica de resolver problemas humanos, e também desafiá-los a desmistificar o paradoxo de Aquiles e a Tartaruga, que diz:

Aquiles aposta uma corrida com uma tartaruga que sai com vantagem e é argumentado que Aquiles por mais depressa que corra, não pode alcançar a tartaruga, por mais devagar que ela caminhe. Pois, quando Aquiles chegar à posição inicial da tartaruga, ela já terá avançado um pouco; e quando Aquiles cobrir essa distância, a tartaruga terá avançado um pouco mais. E o processo continua indefinidamente, com o resultado que Aquiles nunca pode alcançar a lenta tartaruga. (BOYER, 1974, p. 55).

Percebe-se que o conceito de limite, não apenas sua definição formal, mas todos os conteúdos que o envolvem, são responsáveis por várias dificuldades de aprendizagem ao longo dos tempos. E, reconhecendo as complexidades no ensino e aprendizagem do limite, uma das principais dificuldades que os alunos têm em aprender reside nos obstáculos que surgem nesse processo, estes que serão descritos no tópico a seguir.

2.3.2 Obstáculos do conceito de limite

As dificuldades em entender e até mesmo aceitar a ideia de limite estão presentes desde suas origens – cerca de 2500 anos atrás – até a real formalização do conceito, sugerida por Karl Weierstrass em 1874: “O número L é o limite da função $f(x)$, onde $x = x_0$ se, dado qualquer número arbitrariamente pequeno ε , outro número δ possa ser encontrado tal que para todos os valores de x diferindo de x_0 por menos que δ , o valor de $f(x)$ diferir de L por menos que ε .” (BOYER, 1949, p. 287, tradução nossa).

A definição acima se encontra de maneira similar em boa parte dos mais tradicionais livros de Cálculo adotados no Brasil como foi apresentado no item 2.3.1.

No entanto, a grande maioria dos estudantes dificilmente consegue, num primeiro momento, determinar limites por meio dela. Além da dificuldade contida no próprio entendimento devido ao seu nível de abstração, tem-se a necessidade de manipular três parâmetros distintos, representados por ε , δ , e L . (FARI; FREIRE, 2014, p. 4).

Os pesquisadores Kumsa, Pettersson e Andrews (2017), baseando-se em alguns estudos, resumem que os obstáculos que surgem no ensino e aprendizagem do limite, podem ser classificados como: epistemológicos, didáticos e cognitivos.

Pais (2002), em um dos capítulos do seu livro, descreve explicitamente sobre obstáculos epistemológicos e didáticos da ciência. Segundo ele a noção de obstáculo epistemológico foi descrita inicialmente pelo filósofo francês Gastão Bachelard, na obra *A Formação do Espírito Científico*, publicada em 1938. O autor diz que os obstáculos epistemológicos têm raízes históricas e culturais e que estão relacionados também à dimensão social da aprendizagem, ademais, muitos deles estão próximos de representações elaboradas pelo imaginário do sujeito cognitivo e é nesse quadro que surgem dificuldades decorrentes de conhecimentos anteriores, bloqueando a evolução da aprendizagem (PAIS, 2002).

Cornu (2002) e Sierpiska (1985) estudaram a respeito dos obstáculos epistemológicos do conceito de limite. Cornu (2002) aponta alguns no desenvolvimento do limite, tais como: impossibilidade de estabelecer a ligação entre o geométrico e o numérico; a noção de infinitamente grande e infinitamente pequeno; aspecto metafísico da noção de limite que ele chama de “vertigem ao infinito”; a dúvida se o limite é atingido ou não. Sierpiska (1985, apud CELESTINO, 2008), fundamentada na teoria de obstáculos de Guy Brousseau, nomeou e caracterizou os seguintes obstáculos epistemológicos quanto à aprendizagem de limites:

- (a) horror ao infinito – a operação matemática como passagem para os limites não é aceita pelos alunos como uma operação matemática, pois eles não aceitam o conjunto dos números infinitos;

- (b) obstáculo ligado à noção de função – dada uma função $y = f(x)$ preocupa-se em como os valores de y são determinados à medida que se atribui valores para x , não há uma preocupação em analisar o limite num determinado ponto x_0 ; redução às funções monótonas; não distinção da noção de limite e da noção de ínfimo e supremo do conjunto imagem;
- (c) obstáculo geométrico - dificuldade em compreender a diferença entre uma grandeza variável e uma grandeza constante que é o seu limite;
- (d) obstáculo lógico - não diferenciação dos quantificadores (ε e δ) ou sua ordem; aspecto na própria definição ao se pensar em vizinhança no cálculo de limite, faz-se necessário fazer considerações no eixo x mediante análise prévia do que ocorre no eixo y (sentido inverso de quando se trabalha com função);
- (e) obstáculo do símbolo: a utilização do símbolo da operação de passagem ao limite, abreviado *lim*, traz aos alunos dificuldades em perceber que o *limite é* e a *função se aproxima*, e em geral leem *o limite se aproxima*.

A respeito dos obstáculos didáticos da ciência, Pais (2002, p. 44, grifo do autor) afirma que “devido ao caráter específico do contexto histórico das ciências, em que surgiu a noção de obstáculo epistemológico, no plano pedagógico, é mais pertinente se referir à existência de *obstáculos didáticos*”. Para ele, “os obstáculos didáticos são conhecimentos que se encontram relativamente estabilizados no plano intelectual e que podem dificultar a evolução da aprendizagem do saber escolar.” (PAIS, 2002, p. 44).

Ainda sobre os obstáculos de origem didática, Brousseau (1976) aponta que são aqueles que dependem de uma escolha ou de uma concepção do sistema educacional. Nesse sentido, Miranda (2013, p. 159) diz que se pode inferir que os obstáculos didáticos “surgem no âmbito do planejamento (ou na falta deste) do trabalho a ser realizado em sala de aula (...)”. E acrescenta que,

Embora caminhemos para sete décadas do surgimento da expressão ‘*obstáculo didático*’, não encontramos na literatura pesquisada registros sobre o que caracteriza efetivamente um obstáculo didático e como estudá-lo. O que temos é referência clara sobre a íntima relação entre *a existência de erros e obstáculos* e *a emergência de obstáculos didáticos*. Considerando essa relação, podemos inferir que estudar ‘*obstáculos didáticos*’ é estudar ‘*a existência quantitativa e qualitativa de erros observáveis no desenvolvimento escolar dos estudantes*’. (MIRANDA, 2013, p. 160, grifos do autor).

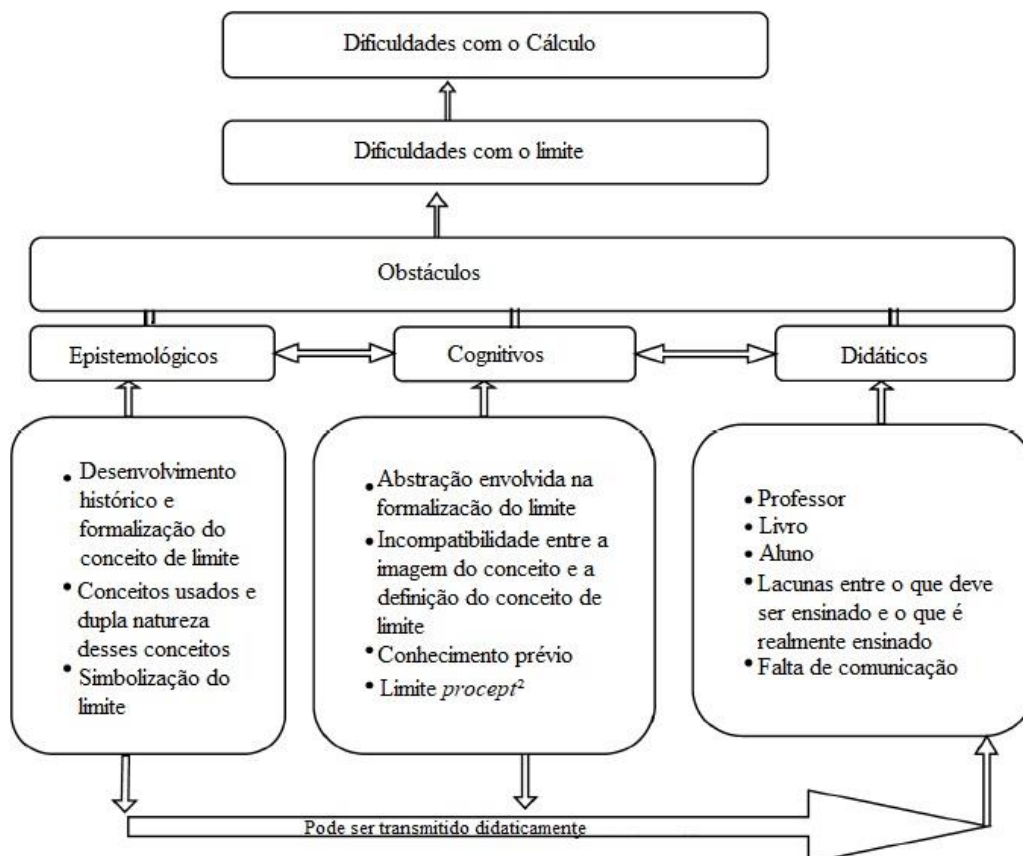
Para Kumsa, Pettersson e Andrews (2017) os obstáculos didáticos surgem como consequência da natureza do ensino e da aprendizagem, das formas como o conceito é apresentado nos livros didáticos, o sequenciamento dos conceitos associados, e a tomada de decisão para o ensino. A respeito do conceito de limite em livros, os autores dizem que,

Alguns livros didáticos introduzem o conceito graficamente, alguns verbalmente e intuitivamente, e alguns algebricamente. Essas diferentes abordagens privilegiam diferentes formas de conhecimento que podem ou não ser proporcionais a formalizações e definições posteriores. (KUMSA; PETTERSSON; ANDREWS, 2017, p. 4, tradução nossa).

Os obstáculos cognitivos são obstáculos que se encontram no processo de aquisição de novos conhecimentos. Assim, quando o indivíduo tem acesso a um novo conhecimento, sua compreensão prévia pode não ser compatível com ele, gerando conflito entre os dois. A respeito do limite, muitos obstáculos cognitivos surgem, e podem ser citados como exemplo: a natureza abstrata do conceito de limite e o processo de abstração envolvido em sua formalização, as incompatibilidades que o aluno tem entre a imagem e a definição do conceito, e o conhecimento prévio relacionado a noção de limite (KUMSA; PETTERSSON; ANDREWS, 2017).

Através de sua pesquisa, Kumsa, Pettersson e Andrews (2017), resumem e classificam esses obstáculos que surgem no ensino e aprendizagem do limite num esquema, representado na Figura 6:

Figura 6 - Representação esquemática dos obstáculos relacionados ao limite.



Fonte: Traduzido de KUMSA; PETTERSSON; ANDREWS, 2017, p. 5

² O termo *procept* é o amálgama de três componentes: um *processo* que produz um *objeto* matemático, e um *símbolo* que é usado para representar também processo ou objeto (GRAY; TALL, 1994).

Esses autores, concluem em seu trabalho que, a comunidade de Educação Matemática fez uma enorme tentativa de lidar com os obstáculos e usou diferentes marcos teóricos para lidar com as dificuldades dos alunos, no entanto, parece que ainda não são apresentados num nível satisfatório, o que pode ter contribuído para a persistência destes obstáculos (KUMSA; PETTERSSON; ANDREWS, 2017).

Assim, para reduzir as dificuldades dos alunos em aprender limites, pode ser de grande valor se as partes interessadas; desenvolvedores de livros didáticos, professores e alunos tenham consciência desses obstáculos e como eles são desencadeados. (KUMSA; PETTERSSON; ANDREWS, 2017, p. 6, tradução nossa).

Uma das formas que vem sendo utilizadas com intuito de superar tais obstáculos e dificuldades no aprendizado de limite, é o emprego de tecnologias no ensino.

Numa pesquisa realizada com alunos da Turquia, com o objetivo de descobrir se os alunos poderiam compreender o conceito de limite e superar suas dificuldades com a ajuda do computador, Büyükköroglu et al. (2006), concluíram com os resultados de exames aplicados que, o suporte computacional teve um efeito positivo na visualização do conceito de limite.

No Brasil, também existem estudos investigando a potencialidade das tecnologias no ensino de limites, como é o caso da dissertação desenvolvida por Alves (2010) que buscava responder à questão: “Como a utilização de Tecnologias Informacionais e Comunicacionais pode contribuir/redirecionar o ensino de Funções, Limites e Continuidade em disciplinas de Introdução ao Cálculo?”. Após a realização de uma pesquisa em campo com alunos de Licenciatura em Matemática, utilizando atividades exploratórias sobre conteúdos de Funções, Limites e Continuidade, implementadas no laboratório de informática com a utilização do software GeoGebra, o autor acredita que,

O ensino de Funções, Limites e Continuidade em ambientes informatizados pode contribuir para um ‘repensar’ do ensino de Cálculo e, assim, para um ‘redirecionar’ da própria prática pedagógica de um Professor de Matemática, com flexibilidade de abordagens didáticas e multiplicidade de conhecimentos específicos, pedagógicos e curriculares. (ALVES, 2010, p. 95).

Dessa forma, no próximo capítulo iremos explorar a respeito das tecnologias digitais e sobre a visualização no ensino.

3 TECNOLOGIAS DIGITAIS, VISUALIZAÇÃO NO ENSINO E O SOFTWARE GEOGEBRA

A relação com o conhecimento e com as outras pessoas é atualmente mediada pelas chamadas tecnologias digitais, e apesar dos desafios, há perspectivas futuras positivas que associam o uso das tecnologias digitais nos ambientes de ensino e aprendizagem.

Neste capítulo, descrevemos aspectos e terminologias que caracterizaram as fases do desenvolvimento tecnológico e as possibilidades e desafios que as tecnologias digitais apresentam. Também é exibido definições associadas à visualização - processo reconhecido como sendo importante na Educação Matemática. Então, aspectos e características de softwares no ensino são expostos, para em vista disso ser explicado a escolha do GeoGebra como componente deste estudo.

3.1 TECNOLOGIAS DIGITAIS

Em diversos momentos da Educação Matemática a tecnologia digital vem sendo utilizada, e essa tecnologia assumiu nomes distintos que simbolizaram diferentes épocas. Borba, Silva e Gadanidis (2014) consideram que o uso de tecnologias em Educação Matemática no Brasil pode ser compreendido em quatro fases, caracterizadas conforme Quadro 2:

Quadro 2 - Aspectos que caracterizam as quatro fases do desenvolvimento tecnológico em Educação Matemática

	Tecnologias	Natureza ou base tecnológica das atividades	Perspectivas ou noções teóricas	Terminologia
Primeira fase (1985)	Computadores; Calculadoras simples e científicas.	LOGO Programação.	Construcionismo; Micromundo	Tecnologias informáticas (TI).
Segunda fase (início dos anos 1990)	Computadores (popularização); Calculadoras gráficas.	Geometria dinâmica (Cabri Géomètre; Geometriks); múltiplas representações de funções (Winplot, Fun, Mathematica); CAS (Maple); jogos.	Experimentação, visualização e demonstração; zona de risco; conectividade; ciclo de aprendizagem construcionista; seres-humanos-com-mídias.	TI; software educacional; tecnologia educativa.
Terceira fase (1999)	Computadores, laptops e internet.	Teleduc; e-mail; chat; forum; google.	Educação a distância online; interação e colaboração online; comunidades de aprendizagem.	Tecnologias da informação e comunicação (TIC).
Quarta fase (2004)	Computadores; laptops; tablets; telefones celulares; internet rápida.	GeoGebra; objetos virtuais de aprendizagem; Applets; vídeos; YouTube; WolframAlpha; Wikipédia; Facebook; ICZ; Second Life; Moodle.	Multimodalidade; telepresença; interatividade; internet em sala de aula; produção e compartilhamento online de vídeos; performance matemática digital.	Tecnologias digitais (TD); tecnologias móveis ou portáteis.

Fonte: BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014, p. 28.

Segundo os autores, resumidamente, pode se dizer que:

A primeira fase é caracterizada pelo uso do software LOGO, a segunda pelo uso de softwares de geometria dinâmica e sistemas de computação algébrica, a terceira pelo uso da internet em cursos a distância e a quarta pelo uso da internet rápida que democratiza a publicação de material digital na grande rede. (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014, p. 8).

No entanto, é importante destacar que o surgimento de cada fase não exclui ou substitui a anterior, pois elas vão se integrando, muitos dos aspectos que surgiram nas três primeiras fases ainda são fundamentais dentro da quarta fase (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014).

Percebe-se que cada uma das fases é caracterizada por uma terminologia diferente. A expressão TI (Tecnologias da Informação) começou a ser utilizada na primeira fase pelas pessoas para se referirem, por exemplo, ao computador ou software, e se estendeu pela segunda fase. Na terceira fase, em razão da natureza informacional e comunicacional da internet, além do termo TI, surge e se consolida a expressão TIC (Tecnologias da Informação e Comunicação). Na quarta fase - a qual estamos atualmente - se tornou comum o uso do termo TD (Tecnologias Digitais). Assim, verifica-se que a evolução tecnológica não se restringe somente a utilização de novos produtos ou equipamentos, ela reflete também no vocabulário da sociedade.

Outra terminologia contemporânea que vem sendo utilizada em pesquisas em Educação Matemática é TDIC (Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação) que se diferencia da Tecnologia de Informação e Comunicação (TIC) pela aplicação de elementos digitais. Moraes, (2014, p. 10) diz que as TDIC “São traduzidas, ou melhor, operacionalizadas pela digitalização e pela comunicação em rede, que se realizam pela captação, transmissão e distribuição das informações, que podem ser textos, imagens, vídeos e áudios”. A autora também coloca o que são consideradas TDIC:

Os computadores (*hardware e software*), *webcams, players* de CDs e DVDs, *Blu Ray, pendrivers*, cartões de memórias, telefonia móvel, os recursos da internet (correio eletrônico, *websites, podcasting*, arquivos *etc*), TV e cinema digital, *scanners, wi-fi, Bluetooth*, entre outros exemplos. (MORAES, 2014, p.10, grifos da autora).

Embora se reconheça que os termos TIC e TDIC tenham uma distinção conceitual, eles vêm sendo utilizados como sinônimos na literatura acerca do assunto.

Na redação desse trabalho, optou-se por utilizar apenas a sigla TD quando tratar-se do que abrange as tecnologias digitais, pois corrobora-se com os conceitos que caracterizam diversos aspectos das TD de acordo com Borba, Silva e Gadandis (2014).

É notável a quantidade de elementos e recursos digitais que estão inseridos em nossa presente realidade e na vida dos estudantes. Para Frizon, Maier e Richit (2014, p. 658), “A inserção das tecnologias digitais nos processos educativos permite novas abordagens e a interação social decorrentes de transformações culturais e sociais em curso (...)”. Ademais,

As tecnologias digitais têm se apresentado como uma das possibilidades para o desenvolvimento de uma prática pedagógica mais dinâmica e interativa, com possibilidades de intercâmbios, de compartilhamento de conhecimentos, de múltiplas mediações, de aquisição e produção de conhecimento, entre outros processos envolvendo o conhecimento. (FRIZON; MAIER; RICHIT, 2014, p. 658).

As TD oferecem novos desafios, uma vez que as novas possibilidades de acesso a informação, interação e de comunicação dão origem à novas formas de aprendizagem (KENSKI, 2003). Essas se apresentam como:

Construções criativas, fluidas, mutáveis, que contribuem para que as pessoas e a sociedade possam vivenciar pensamentos, comportamentos e ações criativas e inovadoras, que as encaminhem para novos avanços socialmente válidos no atual estágio de desenvolvimento da humanidade. (KENSKI, 2003, p. 9).

Contudo, Kenski (2003) alerta que os novos e múltiplos produtos criados a partir de usos diferenciados das tecnologias se distinguem em seus usos e nas formas de apropriação pedagógica, o que nem sempre contribui para a aprendizagem.

Muitas vezes o mau uso dos suportes tecnológicos pelo professor põe a perder todo o trabalho pedagógico e a própria credibilidade do uso das tecnologias em atividades educacionais. Os educadores precisam compreender as especificidades desses equipamentos e suas melhores formas de utilização em projetos educacionais. O uso inadequado dessas tecnologias compromete o ensino e cria um sentimento aversivo em relação à sua utilização em outras atividades educacionais, difícil de ser superado. Saber utilizar adequadamente essas tecnologias para fins educacionais é uma nova exigência da sociedade atual em relação ao desempenho dos educadores. (KENSKI, 2003, p. 4-5).

Assim, para que os recursos das TD contribuam com a aprendizagem, é fundamental que o professor se aproprie desse saber, para que de posse desse conhecimento construa outras perspectivas e possibilidades de sua ação pedagógica (FRIZON; MAIER; RICHIT, 2014). Logo, é preciso saber aliar os objetivos de ensino com os suportes tecnológicos que melhor atendam a esses objetivos, adicionalmente, sabendo que a apropriação das tecnologias para fins pedagógicos requer um amplo conhecimento de suas especificidades tecnológicas e comunicacionais, elas devem ser aliadas ao conhecimento profundo das metodologias de ensino e dos processos de aprendizagem (KENSKI, 2003). Com esse foco, nessa dissertação trabalhamos conjuntamente a tecnologia com a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da RP, que será aprofundada no próximo capítulo.

Apesar dos desafios, há um enfoque positivo que associa o uso das TD nos ambientes de aprendizagem, como por exemplo, o auxílio no entendimento e visualização de conteúdos – este último que será tratado no próximo tópico dessa seção.

3.2 CONCEITO DE VISUALIZAÇÃO

Na literatura de Educação Matemática, embora exista um grande número de pesquisas sobre visualização, não há um consenso comum para a terminologia.

Por exemplo, Presmeg e Bergsten (1995) assumem uma imagem visual como uma construção mental retratando informações visuais ou espaciais, e a visualização como sendo “o

processo de construção ou uso de imagens visuais, com ou sem diagramas, figuras ou gráficos.” (PRESMEG; BERGSTEN, 1995, p. 60, tradução nossa).

Espinosa (1997) num estudo a respeito da visualização sobre a convergência uniforme de séries de funções contínuas, sugere que a visualização de conceitos matemáticos não é uma atividade cognitiva trivial, para ele, visualizar não é o mesmo que ver, “visualizar é a capacidade de criar imagens ricas e mentais que o indivíduo pode manipular em sua mente, treinar diferentes representações do conceito e, se necessário, usar papel ou uma tela de computador para expressar a ideia matemática em questão.” (ESPINOSA, 1997, p. 697, tradução nossa).

De acordo com Guzmán (2002, p.3, tradução nossa) “visualização não é, portanto, uma visão imediata das relações, mas sim uma interpretação do que é apresentado à nossa contemplação, que só podemos fazer quando aprendemos a ler adequadamente o tipo de comunicação que nos é proposta”. Para este autor, as ferramentas tecnológicas podem ajudar em algumas circunstâncias, como por exemplo, quando um desenho feito à mão não é satisfatório, além disso, “a prática da visualização pode ser agora significativamente aprimorada de muitas maneiras diferentes com a ajuda dessas ferramentas.” (GUZMÁN, 2002, p.14, tradução nossa).

Segundo Arcavi (2003), a visualização não está mais relacionada apenas a fins ilustrativos, mas também, está sendo reconhecida como uma componente chave do raciocínio, da resolução de problemas, e até de demonstrações. O pesquisador ainda cita alguns itens em que a visualização pode desempenhar um importante papel para os estudantes em Matemática: (a) como apoio e ilustração de resultados essencialmente simbólicos; (b) como uma possível maneira de resolver o conflito entre soluções simbólicas (corretas) e intuições (incorretas); (c) como forma de ajudar a reencontrar e recuperar os fundamentos conceituais que podem ser facilmente ignorados por soluções formais (ARCAVI, 2003).

Embora a visualização na contemporaneidade possa estar relacionada ao feedback fornecido por TD, através dos conceitos apresentados até aqui, observa-se que a visualização na comunidade de Educação Matemática é muito mais ampla do que isso. Borba e Villarreal (2005) dizem que a visualização tem sido considerada como uma forma de raciocínio na pesquisa matemática, bem como na aprendizagem da matemática, e vantagens e desvantagens de abordagens visuais no ensino e aprendizagem de matemática têm sido caracterizadas. Um exemplo é que “embora muitos autores enfatizem a importância da visualização, existe uma ideia subjacente de que a visualização é apenas um meio de atingir ‘o estágio superior de abstração’” (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 86), dessa forma, uma solução visual de um

problema é considerada útil, mas é apenas um passo em direção a uma solução final analítica ou algébrica.

Borba e Villarreal (2005) apresentam em seu livro uma gama de posições de vários estudiosos relacionadas à visualização em matemática. Os autores constataam que se pode expor as situações em dois níveis. O primeiro caso está associado ao uso da visualização em provas formais de matemática, aqui, representações visuais não são aceitas como parte de uma prova formal, mas como acompanhamentos heurísticos para prova, inspirando um teorema ou sua prova; e o outro caso é relacionado ao uso da visualização em outras atividades matemáticas, como fazer uma conjectura, resolver um problema ou tentar explicar alguns resultados matemáticos para colegas ou alunos, esse, usado mais como um recurso periférico ou até mesmo pedagógico (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Hoje em dia, a visualização está intimamente relacionada às mídias, em particular aos computadores, Borba e Villarreal (2005) destacam algumas particularidades do aspecto visual em Educação Matemática, proporcionada pelas tecnologias computacionais:

- Visualização constitui um meio alternativo de acesso ao conhecimento matemático.
- A compreensão de conceitos matemáticos requer múltiplas representações, e representações visuais podem transformar o entendimento deles.
- Visualização é parte da atividade matemática e uma maneira de resolver problemas.
- Tecnologias com poderosas interfaces visuais estão presentes nas escolas, e a sua utilização para o ensino e aprendizagem da matemática exige a compreensão dos processos visuais (...) (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 96).

As TD enfatizam o componente visual da matemática, mudando a situação da visualização na Educação Matemática. E uma das formas de representar conceitos matemáticos de formas visuais é utilizando softwares - assunto discutido a seguir.

3.3 SOFTWARES NO ENSINO

Nesse aspecto de compreensão e visualização de conceitos matemáticos, a inserção de softwares no ensino vem sendo aplicada e discutida, já que, com os softwares é possível criar conjecturas, validá-las e levantar aportes para a elaboração de uma demonstração matemática. “Com o auxílio de softwares é possível construir figuras, gráficos e objetos de forma interativa, proporcionando com isso uma melhor compreensão, visualização e percepção dinâmica dos conteúdos.” (MELO; AMORIM; BARROS, 2012, p. 226).

Boz (2005) examina em seu artigo o uso de softwares e a visualização dinâmica na Educação Matemática. Ele conclui que softwares têm potencial de melhorar a compreensão,

pois podem possibilitar a produção de imagens dinâmicas que não podem ser produzidas em mídias estáticas.

Além disso, os ambientes de software podem ser uma ferramenta muito valiosa para proporcionar oportunidades de investigação, experiências de conceitos geométricos e outros conceitos matemáticos. Portanto, uma visão de que os ambientes de software devem ser integrados na educação matemática sempre que possível, é mantida neste estudo. (BOZ, 2005, p. 30, tradução nossa).

Um software é caracterizado como educacional, quando existe sua inserção em contextos de ensino e aprendizagem. Oliveira, Costa e Moreira (2001), enquadram um software educacional em duas categorias: software educativo e software aplicativo. O software educativo tem como finalidade facilitar o processo de ensino e aprendizagem, desenvolvido especialmente para que o aluno construa determinado conhecimento relativo a um conteúdo (OLIVEIRA; COSTA; MOREIRA, 2001). Já na categoria de software aplicativo, entram os softwares que não foram desenvolvidos com finalidades atreladas à educação, mas que podem ser usados para este fim, sendo divididos em: software para a produção de software educativo (como sistemas de autoria, sistemas de hipertextos, ambientes tutoriais e linguagem LOGO); e softwares de apoio administrativo (como banco de dados, ambientes de programação, processadores de textos, planilhas eletrônicas e programas de comunicação) (OLIVEIRA; COSTA; MOREIRA, 2001).

Visto isso, tanto os softwares desenvolvidos especificamente para o ensino e aprendizagem, quanto os softwares e programas que não tenham sido produzidos com essa finalidade, mas que são aplicados no ensino, recebem a denominação de softwares educacionais (SE).

Sette, Aguiar e Sette (1999), autores de um dos documentos da coleção “Informática para a mudança na Educação” fornecido pelo MEC, dizem que existem softwares que se adaptam melhor a certas propostas pedagógicas e outros nem tanto, assim, cabe ao professor definir os objetivos a serem alcançados e identificar qual o mais indicado para tal fim. Apesar do documento ser da década de 90, seus fundamentos são pertinentes atualmente. Os autores também acrescentam que SE voltados para um domínio específico ou genérico permitem ao professor criar atividades e explorar de formas diversas os recursos oferecidos, e ressaltam aqui a importância do professor: “Pode-se mesmo afirmar que o sucesso de um software depende não apenas da forma como foi concebido e do produto final obtido, mas principalmente pelo modo de utilização pelo professor.” (SETTE; AGUIAR; SETTE, 1999, p. 30).

Com a utilização de SE em sala de aula o papel do professor acaba mudando,

É verdade que nas aulas em que se faz uso do software como um apoio o professor deixa de ser o centro das atenções da classe e passa a assumir a função de mediador nas atividades desenvolvidas. Esse modelo exige do educador um esforço maior do

que o habitual, pois ele deve preparar as atividades antecipadamente, prever situações diversificadas e promover trabalhos individuais ou em grupo. (SETTE; AGUIAR; SETTE, 1999, p. 31).

Além de trazer reflexões sobre a integração dos softwares na Educação, este documento destina-se a ajudar os educadores a se apropriarem das novas tecnologias. Um dos itens tratados na redação é sobre o que se almeja que um software apresente, conseqüentemente, apresentam características desejadas de um SE:

- explore a criatividade, a iniciativa e a interatividade, propiciando ao aluno a postura ativa diante da máquina e do sistema;
- desperte a curiosidade;
- incentive o trabalho cooperativo e interdisciplinar;
- estimule ou não a competitividade (de acordo com a linha pedagógica adotada) nas diversas dimensões (com relação aos colegas, ao computador, a si próprio etc.);
- estimule a reflexão, o raciocínio, a compreensão de conceitos;
- ressalte a importância do processo em vez do resultado obtido (ganhar ou perder, certo ou errado);
- encoraje o alcance dos objetivos propostos, evitando-se as tentativas irrefletidas sobre o processo e levando-se em consideração a dimensão tempo;
- provoque mudanças desejáveis no processo ensino/aprendizagem;
- propicie a construção do conhecimento;
- contemple aspectos de linguagem (faixa etária, gênero, ambiente...);
- considere aspectos socioculturais, éticos, pedagógicos etc.;
- estimule o aluno a propor e resolver problemas. (SETTE; AGUIAR; SETTE, 1999, p. 26).

Identifica-se que vários aspectos pedagógicos e metodológicos devem ser considerados na escolha de um software. Atualmente existe uma infinidade de SE, e muitos desses podem ser acessados gratuitamente no portal do Banco Internacional de Objetos Educacionais (BIOE)³ vinculado ao MEC. No banco estão disponibilizados recursos educacionais gratuitos que atendem desde a Educação Básica até a Superior nas diversas áreas do conhecimento.

Na área da Matemática, pode-se destacar a existência de softwares voltados às múltiplas representações de funções, de cálculo, estatísticos e gráficos, softwares de geometria dinâmica (SDG), e com uso de sistemas de computação algébrica (CAS⁴).

Os SGD vem sido comumente utilizados, sendo problematizados em diversas pesquisas acadêmicas, proporcionando reflexões sobre suas as potencialidades de uso, bem como o emprego de determinadas metodologias de ensino que se valha de tais recursos (CARVALHO; CIVARDI, 2012). Além disso, “a utilização dos softwares de geometria dinâmica propicia a interatividade, o movimento dinâmico das figuras construídas, potencializa suas construções e a verificação de conjecturas bem como desenvolve o pensamento dedutivo.” (CARVALHO; CIVARDI, 2012, p.722).

³ A esse respeito, acesse: <http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/>

⁴ Em inglês: Computer Algebra System – CAS

Os autores dos artigos em King e Schattschneider (1997, apud ABAR, 2017, p. 101-102) apresentam ideias dos modos como um SGD pode ser utilizado no ensino e de algumas consequências da sua utilização:

- Rigor nas construções: a confiança no rigor das construções geométricas ou medições são tão básicas que são assumidas naturalmente pelos usuários, mas, no entanto, podem ser limitadas pelos cálculos executados internamente ao programa; pela resolução do monitor ou da impressora; pelas aproximações dos resultados numéricos; existência de bugs, etc.
- Visualização: não só para o ensino da Geometria como da Matemática em geral a visualização é, por si só, uma poderosa ferramenta na resolução de problemas, pois ajuda que o aluno “veja” o que significa um fato verdadeiro em geral e ajuda a entender a Matemática.
- Demonstração: embora não possa fazer demonstrações formais, a evidência experimental provoca uma forte e necessária convicção que pode motivar o desejo da demonstração.
- Simulação: a possibilidade de “arrastamento” de pontos, segmentos, circunferências, do traçado de lugares geométricos fornecem muitas oportunidades de simulação e uma variedade de situações.
- Micromundos: a criação de ambientes específicos nos quais a matemática pode ser explorada são motivadores para a aprendizagem.
- Exploração e descoberta: em um curso de Geometria, por exemplo, é importante que os alunos vivam a experiência da descoberta de relações geométricas, possam testar suas ideias matemáticas e conjecturas numa maneira visual, eficiente e dinâmica ficando mais envolvidos na sua própria aprendizagem.

Os SGD não são necessariamente utilizados apenas para o ensino e aprendizagem de conteúdos relativos a Geometria, por exemplo, o GeoGebra é um software que combina elementos de SGD e CAS, e vem sendo empregado na abordagem de diversos conteúdos - estes que perpassam as consequências recente citadas.

3.4 O SOFTWARE GEOGEBRA

No processo de escolha de um software para uso na Educação, alguns aspectos básicos devem ser considerados:

- correspondência dos objetivos do software com os objetivos pedagógicos do educador;
- avaliação consolidada anteriormente por experiências próprias ou de outros educadores;
- existência de material de apoio para uso e integração ao planejamento pedagógico;
- utilização adequada dos recursos de cálculo, decisão, multimídia, e interatividade oferecidos pelo computador;
- funcionamento sem falhas e com navegação em todas as direções e sentidos;
- apresentação de conteúdos claros e corretos;
- análise de custo/benefício;
- compatibilidade do software com a plataforma existente (hardware, sistemas operacionais, rede etc);
- sistema de atualização disponível (*upgrade*). (SETTE; AGUIAR; SETTE, 1999, p. 31).

Nesse estudo foi escolhido trabalhar com o software GeoGebra, inicialmente pelo fato da autora ter familiaridade com o mesmo, e também por todas as potencialidades que ele possui, como será relatado aqui.

Para Abar e Almeida (2017), o GeoGebra é um instrumento privilegiado para se aprender e ensinar matemática em todos os graus de ensino, sua utilização não é apenas mais um recurso tecnológico, mas também um recurso que colabora no desenvolvimento de conceitos matemáticos. Ademais, o software vai além da geometria plana, possibilitando o trabalho da geometria tridimensional, por meio de uma tela de cálculo integrada que possibilita utilizar cálculo algébrico e simbólico, bem como, seus recursos dinâmicos permitem a institucionalização do conhecimento de objetos matemáticos ao serem explorados pelos diferentes registros que são apresentados visualmente (ABAR; ALMEIDA, 2017).

Nóbriga et al (2013), dizem que o GeoGebra pode ser um recurso potencial para o processo de aprendizagem e ensino da matemática, por exemplo, o professor pode criar atividades para uma exploração eficaz do software. Essas atividades podem ser feitas de diferentes maneiras, tais como:

Construções prontas, em que o professor prepara um arquivo com uma construção pronta para ele ou o estudante manipule no momento da aula; Atividades que exigem construção em que o professor pode sugerir um roteiro, contendo o “passo a passo” para a construção. Atividade feitas em planilhas dinâmicas que são páginas de internet que contém uma figura dinâmica (no caso de GeoGebra, um Applet Java interativo) e correspondentes explicações, bem como questões e tarefas para os alunos. (NÓBRIGA et al, 2013, p. 10-11, grifos dos autores).

Ainda ressaltam que esses exemplos, não esgotam todas as formas de utilização do GeoGebra, e que existem vários materiais disponíveis na internet, contendo sugestões de atividades, construções e vídeos que podem auxiliar o trabalho tanto do professor como do estudante.

Além de sua facilidade de utilização de um SGD e com certas características de um CAS, o GeoGebra é um software livre, ou seja, possui código aberto sob a Licença Pública Geral GNU⁵, sendo gratuitamente disponível no endereço www.geogebra.org. Ele está disponível em vários idiomas, e é amplamente utilizado para ensinar Geometria, Álgebra e Cálculo. O software está sendo constantemente melhorado por uma equipe ativa de pesquisadores e professores, e tem uma grande coleção de atividades que são desenvolvidas e doadas por usuários de todo o mundo. Também “pode ser trabalhado na resolução de questões e/ou na construção de conhecimentos ligados a inúmeras disciplinas, proporcionando uma melhor percepção dos conceitos (...)” (MELO; AMORIM; BARROS, 2012, p. 226).

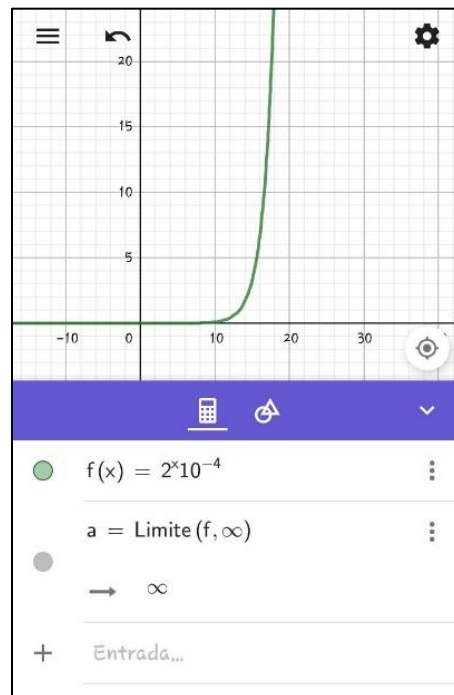
⁵ Em inglês: General Public License - GNU

Atualmente o software está disponível em algumas versões e pode ser acessado de diversas maneiras e em diferentes sistemas operacionais, como apresentaremos a seguir:

➤ **Calculadora Gráfica GeoGebra:**

Disponível online ou para download no sistema operacional Windows, Mac e ChromeOs, além disso, é possível baixar o aplicativo da Calculadora Gráfica em iPhones, iPads, smartphones e tablets com sistema Android ou Windows. No aplicativo é possível plotar funções (curvas polares e paramétricas) resolver equações, encontrar pontos especiais de funções (raízes, mínimo, máximo, interseções), assim como limites (Figura 7), derivadas e integrais.

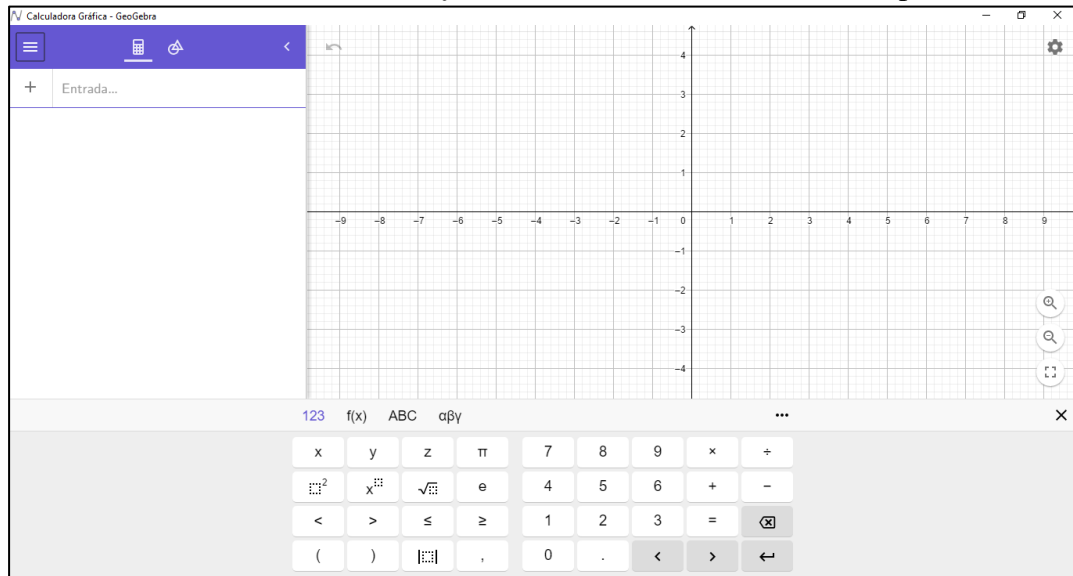
Figura 7 - Print da tela da *Calculadora Gráfica GeoGebra* em um smartphone com cálculo do limite de uma função



Fonte: Produção própria, 2018.

Também, caso o usuário esteja com dispositivo com tela sensível ao toque, podem ser realizados desenhos de figuras geométricas apenas arrastando o dedo, pois o aplicativo reconhece as formas à mão livre. Na Figura 8 apresentamos a interface Calculadora Gráfica exibida em um computador.

Figura 8 - Interface da *Calculadora Gráfica GeoGebra* exibida em um computador



Fonte: Produção própria, 2018.

➤ **GeoGebra Geometria:**

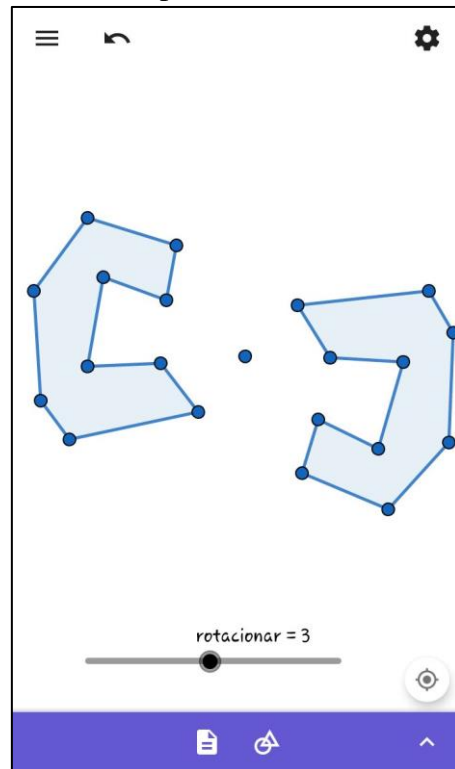
Assim como a *Calculadora Gráfica GeoGebra*, o *GeoGebra Geometria* pode ser acessado online ou fazendo download em algum dispositivo. Nele, é possível criar construções com pontos, linhas, círculos, polígonos e ângulos; explorar a geometria interativa arrastando pontos; medir comprimentos e áreas; transformar formas espelhando, girando e dilatando-as. No aplicativo, pode ser acessado a opção tutorial (Ajuda → Tutorial) que traz alguns passos e exemplos de construções⁶. Vídeos no YouTube também podem ser acessados para auxiliar em construções.

Seguindo os passos de um vídeo⁷, fizemos a construção de um polígono que translada através de um ponto e com ângulo de rotação definido pela criação de um controle deslizante, conforme mostra a Figura 9.

⁶ É importante observar que o tutorial disponibilizado pelo computador e pelo smartphone não são os mesmos (dados observados pela autora).

⁷ Rotations in Geometry App. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=MM2Wu6uqois>>. Acesso em: 26 abr. 2018.

Figura 9 - Print da tela em um smartphone com uma construção no *GeoGebra Geometria*



Fonte: Produção própria, 2018.

Apesar de ser mais voltado a elementos da geometria, no aplicativo também podem ser plotadas e exploradas informações de funções. Na Figura 10 mostramos a interface *Calculadora Gráfica* exibida em um computador.

Figura 10 - Interface do *GeoGebra Geometria* exibida em um computador

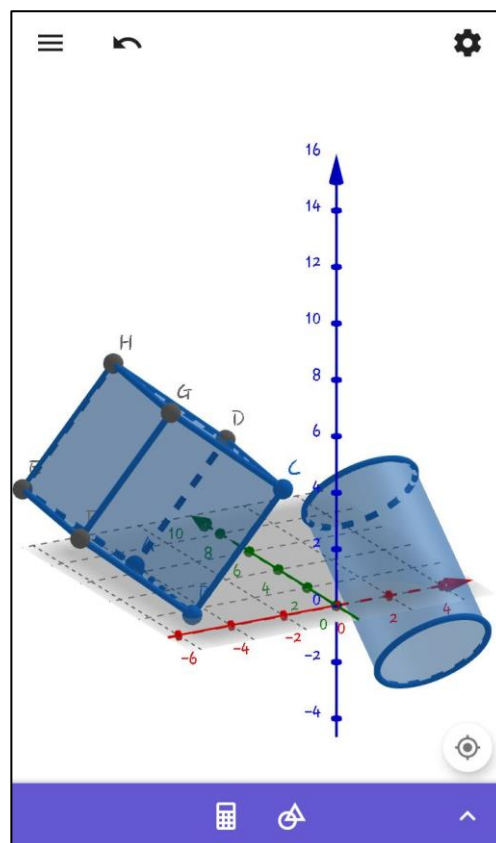


Fonte: Produção própria, 2018.

➤ **GeoGebra 3D Graphing Calculator:**

Disponível online ou para download em smartphones e tablets com sistema Android. Com o aplicativo o usuário tem a oportunidade de trabalhar facilmente problemas matemáticos em 3D, como plotar o gráfico de funções e superfícies, e criar construções geométricas. É possível criar sólidos, esferas, planos e outros objetos tridimensionais de forma dinâmica e interativa, obter pontos de intersecção e seção transversal. Como ilustração, na Figura 11, temos a construção⁸ de sólidos em 3D feita em smartphone, e na Figura 12 a interface do aplicativo disponível online.

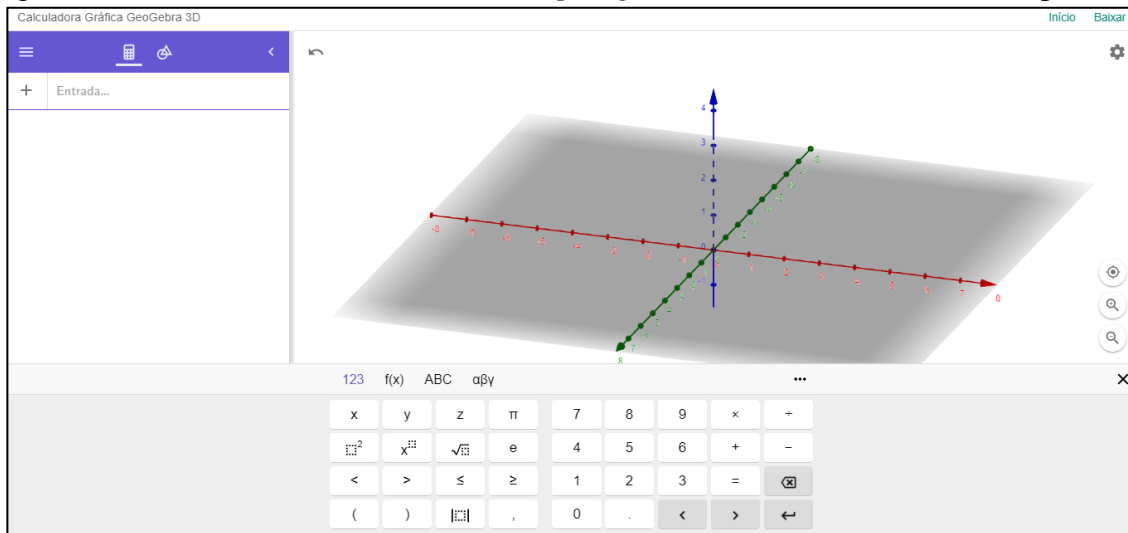
Figura 11 - Print da tela em um smartphone com uma construção no *GeoGebra 3D Graaphing Calculator*



Fonte: Produção própria, 2018.

⁸ Unbundled 3D app! Disponível em: < <https://www.youtube.com/watch?v=xjub-6tdccY>>. Acesso em: 26 abr. 2018.

Figura 12 - Interface do *GeoGebra 3D Graaphing Calculator* exibida em um computador

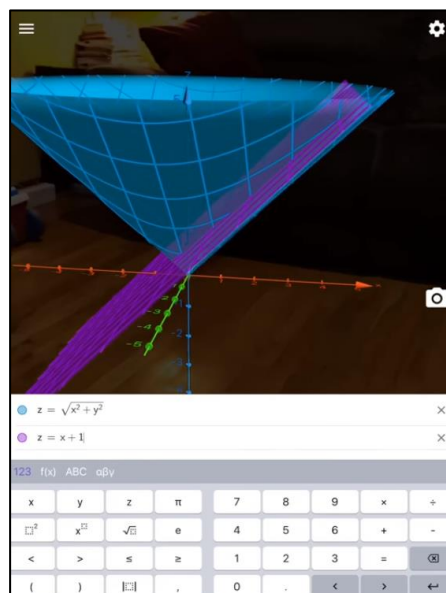


Fonte: Produção própria, 2018.

➤ **GeoGebra Augmented Reality:**

É o mais recente lançamento das opções que são apresentadas neste estudo, e até a data de publicação desse trabalho, o aplicativo estava somente disponível para download em dispositivos com sistema iOS. Criado para explorar o potencial da realidade aumentada para aprender e ensinar matemática, no aplicativo podem ser colocados objetos de matemática em qualquer superfície, contorná-los e fazer capturas da tela de diferentes ângulos. Ele inclui vários exemplos de objetos de matemática 3D, em que o usuário pode colocá-lo em sua mesa, no chão ou em qualquer superfície plana ao seu redor. Essas atividades levam a descobrir matemática no mundo real tirando prints de tela em diferentes perspectivas, como ilustra a Figura 13.

Figura 13 - Print de uma tela com construção de superfícies no *GeoGebra Augmented Reality*

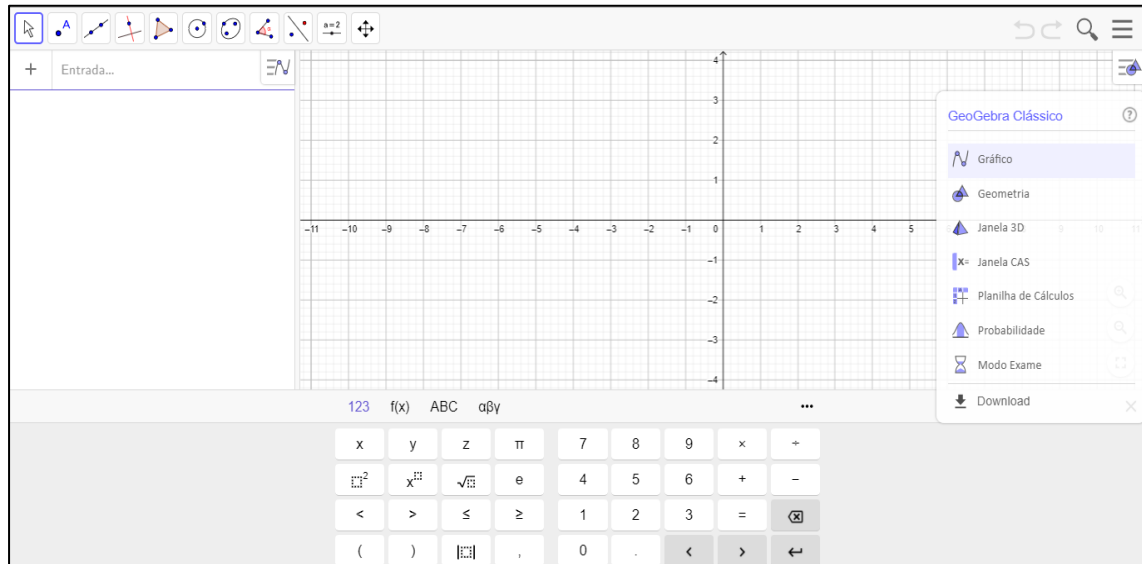


Fonte: Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=o1KxZBPNetg>>. Acesso em: 14 ago. 2018.

➤ **GeoGebra Classic:**

Disponível online (Figura 14) ou para download em sistemas operacionais Windows, Mac, ChromeOs e Linux, e ainda, é possível baixar o *GeoGebra Classic* em iPads e tablets.

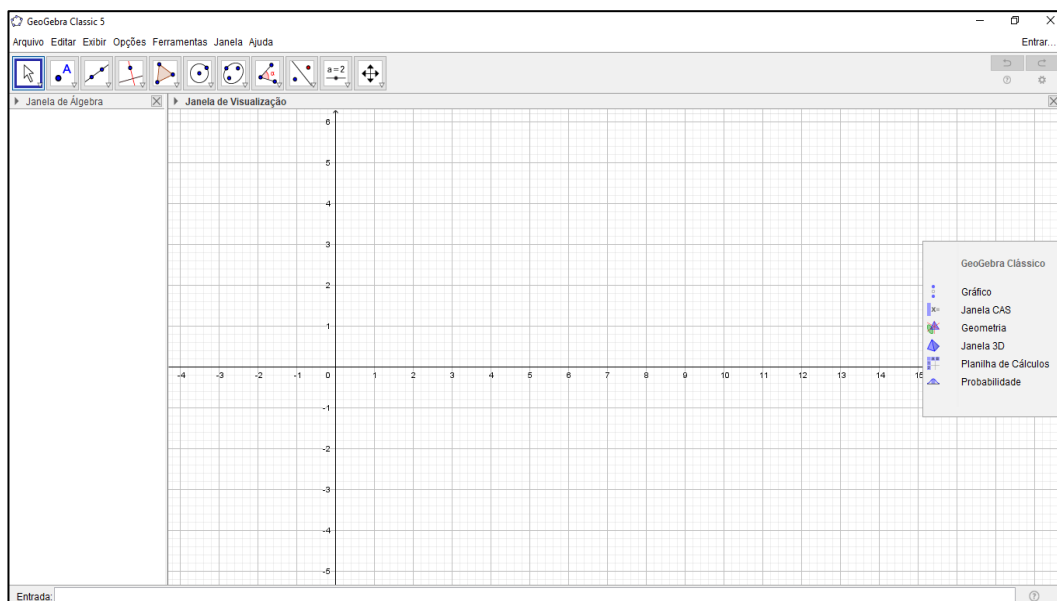
Figura 14 - Interface online do *GeoGebra Classic* exibida em um computador



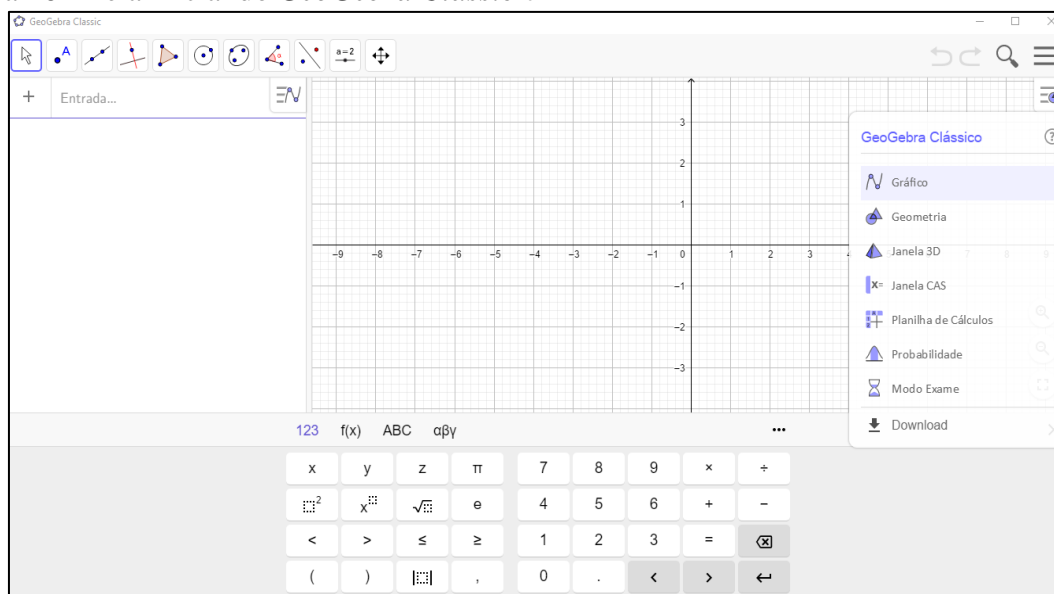
Fonte: Produção própria, 2018.

O *GeoGebra Classic* reúne várias ferramentas matemáticas, e com exceção da opção de realidade aumentada, ele contempla tudo que foi exposto nas outras versões do GeoGebra e muito mais. Nele é possível traçar funções com controles deslizantes e resolver equações; criar construções geométricas interativas; na opção 3D podem ser criados gráfico de funções, superfícies e outros objetos em 3D; com a ferramenta planilha tem-se a oportunidade de analisar dados e fazer estatísticas conectadas com gráficos; com o CAS resolvem-se problemas com um poderoso sistema de álgebra computacional; na área da probabilidade podem ser rapidamente visualizados parâmetros e distribuições. Logo, esse software junta gráficos, geometria, 3D, planilhas, álgebra computacional e probabilidade.

Hoje, o *GeoGebra Classic* está disponível em duas versões para download: *GeoGebra Classic 5* e *GeoGebra Classic 6*, que basicamente se diferem em questão de layout, nas Figuras 15 e 16 é apresentado cada uma das versões.

Figura 15 - Tela inicial do *GeoGebra Classic 5*

Fonte: Produção própria, 2018.

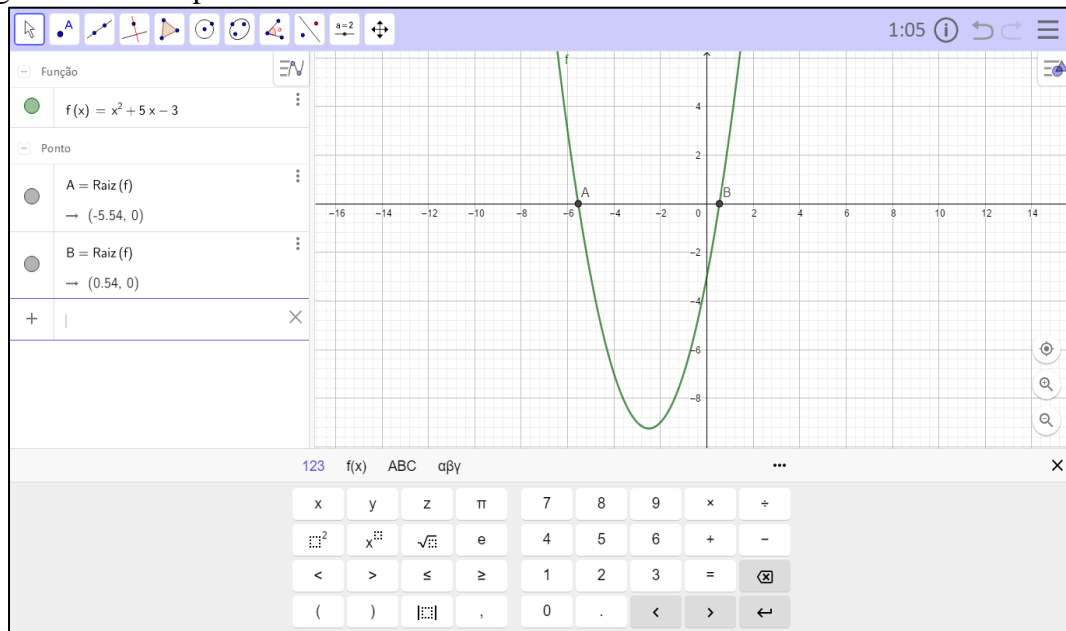
Figura 16 - Tela inicial do *GeoGebra Classic 6*

Fonte: Produção própria, 2018.

Outra diferença entre as duas versões, é a ferramenta *Modo Exame*, disponível apenas no *GeoGebra Classic 6*⁹. Essa ferramenta permite que alunos utilizem o GeoGebra durante avaliações, pois ela é executada no modo de tela cheia, não permitindo acesso à Internet, a outros softwares ou arquivos salvos no dispositivo (Figura 17). Caso o aluno deixe a janela, a ferramenta do *Exame* aciona um alerta visual (Figura 18) que é facilmente detectável e gravado no *Registro de Exames* (Figura 19).

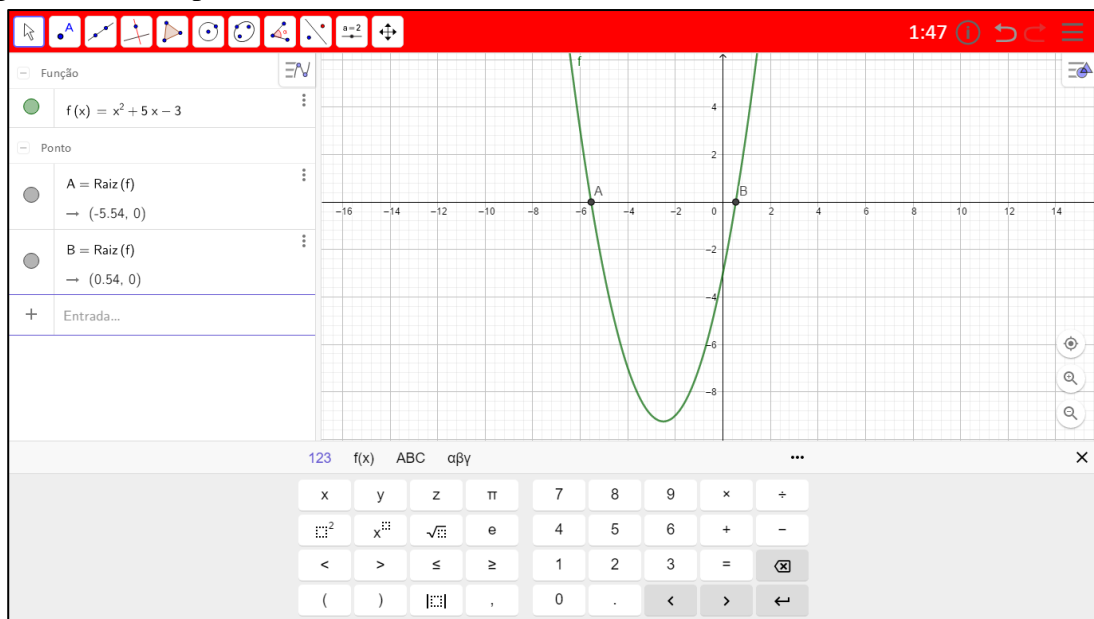
⁹ A ferramenta *Exame* também está disponível na *Calculadora Gráfica GeoGebra*.

Figura 17 - Exemplo da tela da ferramenta *Modo Exame* no *GeoGebra Classic 6*



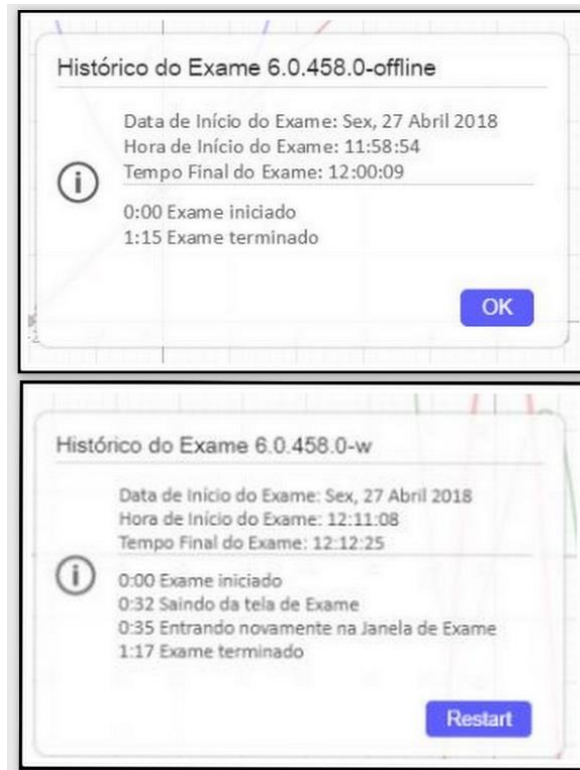
Fonte: Produção própria, 2018.

Figura 18 - Exemplo de alerta da tela da ferramenta *Modo Exame* no *GeoGebra Classic 6*



Fonte: Produção própria, 2018.

Figura 19 - Exemplo de registros da ferramenta *Modo Exame* com e sem alerta



Fonte: Produção própria, 2018.

Outras potencialidades do *GeoGebra Classic* é que as construções realizadas podem ser visualizadas simultaneamente em janelas 2D e 3D, e ele possibilita que se salve ou exporte imagens das construções em vários formatos, tais como, png e pdf, e também como gif animado.

As construções feitas em qualquer um dos aplicativos e /ou versões apresentadas aqui podem ser compartilhadas para outras pessoas através da plataforma online do GeoGebra, assim como, na plataforma podem ser encontrados materiais prontos com acesso gratuito.

Neste trabalho, para desenvolvimento das atividades propostas, escolhemos trabalhar com *GeoGebra Classic*, por ser a ferramenta mais completa do GeoGebra. E construímos os materiais na versão 5, pois já estávamos habituados com essa interface, além de que, a versão 6 foi lançada após já ter sido dado início nas construções para o produto educacional.

Um fato que também motivou a escolha do software GeoGebra para esse estudo, foi a possibilidade da publicação das atividades em formato de livro online – GeoGebraBook – que foi adotado para construção do produto educacional, e será melhor apresentado no próximo tópico.

3.4.1 Plataforma online do GeoGebra

Para acessar a plataforma do software GeoGebra, basta entrar no endereço: <https://www.geogebra.org/>. Nela encontram-se todas as opções dos aplicativos para acesso online ou com os links para download; busca e acesso gratuito à materiais desenvolvidos no software por usuários de vários países; tutoriais explicativos; fóruns - nele membros podem compartilhar opiniões, fazer perguntas ou tirar dúvidas sobre algum tópico; e manuais.

Na plataforma, podem ser criados livros, grupos e folhas de trabalho. Para isso, é necessário que o usuário faça seu cadastro, que necessita apenas do nome, e-mail e senha para acesso. Com a conta criada, além de poder administrar os próprios materiais, é possível seguir e ser seguido por outros usuários, e participar de grupos e fóruns.

As “folhas de trabalho” podem ser consideradas como páginas de um livro digital e dinâmico. Nas folhas podem ser colocados títulos, textos, vídeos, imagens, páginas da web, arquivos em pdf, aplicativos do GeoGebra, questões abertas ou de múltipla escolha.

Essas folhas de trabalho podem ser agrupadas para formar os GeoGebraBooks. Na Figura 20, está um exemplo de um GeoGebraBook criado:

Figura 20 - Exemplo de GeoGebra Book

The screenshot displays a GeoGebraBook interface. On the left, a sidebar lists the book's structure under the title "Som das notas musicais com o GeoGebra: sequência de atividades com a função seno". The structure includes four activities: "1. Primeira Atividade", "2. Segunda Atividade", "3. Terceira Atividade", and "4. Quarta Atividade". The main content area shows a preview of the first activity, titled "Som das notas musicais com o GeoGebra: sequência de atividades com a função seno" by Jéssica Sabatke, dated 03/12/2016. The preview features a graph of a sine wave with a control panel on the left and an index below it. The index lists the following sub-topics for each activity:

- 1. Primeira Atividade**
 - 1. Funções seno e suas principais características
- 2. Segunda Atividade**
 - 1. Produzindo notas musicais no GeoGebra
- 3. Terceira Atividade**
 - 1. Amplitude e frequência
- 4. Quarta Atividade**
 - 1. Criando melodias

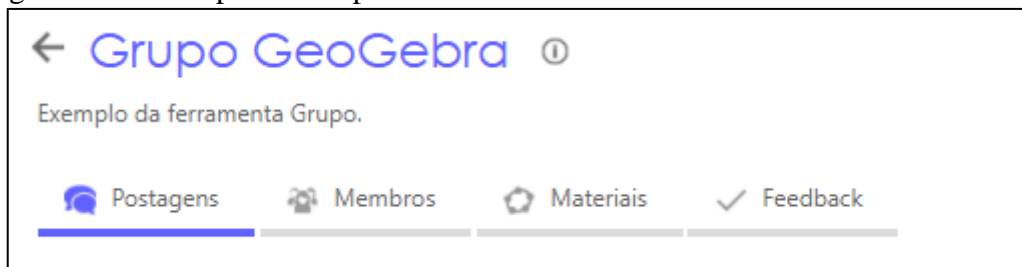
Fonte: Produção própria, 2016.

Na criação do GeoGebraBook o usuário pode colocar um título para o livro e algumas informações: descrição, público alvo (idade), palavras-chaves, e visibilidade (público, compartilhado com link, particular). O GeoGebraBook permite que o livro seja organizado em capítulos e seções, nos quais podem ser inseridos folhas de trabalho existentes (feitas pelo usuário ou não), ou também podem ser criadas novas folhas de trabalho.

Assim, com o GeoGebraBook tem-se a possibilidade de criar um livro online interativo, sendo possível que usuários acessem os conteúdos e aplicativos desenvolvidos, e além disso, tendo a opção de baixar e utilizar os applets offline.

Ainda na plataforma, membros podem trabalhar com a ferramenta Grupo. Essa é uma ótima ferramenta para professores planejarem suas aulas e compartilharem com seus alunos. No Grupo permite-se que sejam compartilhados materiais e tarefas com outros membros, e a comunicação é feita através de publicações e comentários. Alunos podem responder individualmente as tarefas publicadas, essas ficam registradas online, e o professor pode corrigi-las e dar o feedback pela própria ferramenta. Também pode-se criar Grupo entre professores, para trabalharem em conjunto - compartilhando, colecionando e criando materiais com o GeoGebra. Na Figura 21 tem-se um exemplo de como fica a interface de um Grupo:

Figura 21 - Exemplo de Grupo no GeoGebra



Fonte: Produção própria, 2018.

Cada grupo é organizado em quatro guias chamadas: Postagens, Membros, Materiais e Feedback (para proprietário) / Tarefas (para membros), essas que coletam todas as informações e conteúdos compartilhados entre os membros. E, na criação do Grupo, são colocadas informações como: nome do grupo, descrição e permissões – usuários podem ser adicionados como proprietários (podem editar e criar folhas de trabalho) e membros (podem apenas visualizar os materiais). O usuário também pode decidir se quer receber notificações de atualizações feitas na ferramenta por e-mail.

Através da ferramenta Grupo o professor pode criar uma sala de aula virtual, e utilizá-lo como um sistema de gerenciamento de aprendizado para potencializar o ensino presencial. Até mesmo, pode usá-la nos processos de avaliação com a criação de tarefas, a exemplo disso,

neste trabalho, utilizamos a ferramenta como parte da avaliação do conteúdo de limites numa turma de CDI I, os resultados dessa aplicação serão mostrados no capítulo 7.

Diante do exposto, concordamos com Pescador (2016, p. 64) “(...) parece-nos inegável que a presença das TD esteja provocando transformações e fazendo com que a sociedade se reorganize.” A autora também comenta que,

(...) para utilizar as TD com vistas a contribuir para o aprendizado dos estudantes, há que se considerar alguns aspectos como a cooperação, a colaboração, a interação e o respeito mútuo com vistas a serem recursos que possibilitem experiências de aprendizado. (PESCADOR, 2016, p. 58).

Tais aspectos mencionados acima, fazem parte da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problema, que será abordada no capítulo a seguir.

4 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo temos um retrato sobre as concepções que a Resolução de Problemas (RP) assume, tais como: ensinar *sobre* resolução de problemas, ensinar *para* resolver problemas e ensinar *através* da resolução de problemas. Em seguida apresentamos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas - que é base principal desta dissertação. Por fim, falamos sobre trabalhos já desenvolvidos que envolvem a RP aliada ao software GeoGebra.

4.1 CONCEPÇÕES SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Todos os dias resolvemos pequenos problemas, podendo ser do cotidiano, pessoais, sociais, científicos, entre outros. Devido as rápidas mudanças sociais, ambientais e tecnológicas, a aplicação do que sabemos também pode evoluir rapidamente. Todos precisamos nos adaptar, aprender, arriscar novas tentativas e estar sempre prontos a aprender com os erros. E isso, é altamente aplicado no mercado de trabalho, pois buscam-se profissionais que consigam resolver problemas que não são rotineiros, e, muitas vezes complexos.

Os estudantes necessitam ser capacitados para enfrentar e superar desafios cognitivos complexos e não rotineiros, para estarem preparados para o mundo de amanhã, precisam mais do que o domínio de um repertório de fatos e procedimentos; precisam ser capazes de pensar de forma flexível e criativa sobre como superar as barreiras que estão no caminho de uma solução (OECD, 2014).

Um dos objetivos de se educar por meio da Matemática é contribuir para o desenvolvimento da autonomia intelectual do estudante. E, a competência de resolução de problemas é essencial entre os componentes necessários tanto para essa autonomia, quanto para realizar tarefas interpessoais e não rotineiras. No PISA¹⁰ 2012, a competência de resolução de problemas é definida como:

A capacidade de um indivíduo se envolver em processos cognitivos para compreender e resolver situações problemáticas onde um método de solução não é imediatamente óbvio. Inclui a disposição de se envolver com tais situações de modo a conseguir alcançar seu potencial como um cidadão construtivo e reflexivo. (OECD, 2014, p. 30).

George Polya (1887-1985), através da sua obra *How to Solve It?*, publicada em 1945, se tornou o precursor na Resolução de Problemas. O livro teve grande êxito, sendo traduzido

¹⁰ PISA - Programa Internacional de Avaliação de Alunos.

em mais de 20 línguas de muitos países, no Brasil recebeu o título de *A Arte de Resolver Problemas*. O livro é dividido em quatro partes: a primeira fala sobre a resolução de problemas e uma perspectiva de aplicação em sala de aula; a segunda imita um diálogo entre professor e aluno durante a aplicação em sala da resolução de problemas; a terceira trata sobre a heurística da resolução de problemas; a quarta traz ao leitor alguns problemas, indicações de como resolvê-los e as soluções (POLYA, 1995).

Polya define quatro etapas consecutivas para resolver um problema, que devem ser seguidas. São elas: *compreensão do problema*, em que as seguintes perguntas podem auxiliar: Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? Além disso, traçar uma figura pode auxiliar, bem como, usar uma notação adequada. A segunda etapa é o *estabelecimento de um plano*, em que o autor traz novamente algumas indagações que podem ser feitas. Ainda nesse passo, pode-se buscar um problema mais específico, um mais genérico, algum análogo, ou ainda usar algum problema correlato já resolvido para auxiliar. A terceira etapa é a *execução do plano*, que corresponde a: “ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?” (POLYA, 1995, p. xiii). A última etapa é o *retrospecto*, que consiste em verificar o resultado, analisar se pode chegar a solução por outro caminho ou ainda usá-la em outro problema (POLYA, 1995).

Na visão de Polya, há dois objetivos principais que o professor deve ter ao resolver problemas com seus alunos: “primeiro, auxiliá-lo a resolver o problema que lhe é apresentado; segundo, desenvolver no estudante a capacidade de resolver futuros problemas por si próprio.” (POLYA, 1995, p. 2). O autor afirma que quanto mais for possibilitado que o aluno pratique, maior será o seu sucesso na resolução de problemas, e destaca que se quisermos aprender como resolver um problema, devemos nos atentar a resolução feita por outras pessoas, imitando-as para resolver os nossos próprios problemas (POLYA, 1995).

Percebe-se que, nessa visão, o professor ensina estratégias e métodos para resolver problemas, ou seja, nesse caso o professor se preocupa em ensinar *sobre* como resolver problemas. Assim, o interesse está voltado na melhoria de habilidades da resolução de problemas e de fazer os estudantes bons resolvidores de problemas.

Ensinar *sobre* resolução de problemas, é uma das formas de se conceber a Resolução de Problemas. Schroeder e Lester (1989) apresentaram caminhos diferentes de abordá-la: ensinar *sobre* resolução de problemas; ensinar *para* resolver problemas; e ensinar *via* resolução de problemas.

De acordo com Nunes (2010, p. 83) na concepção de ensinar *para* resolver problemas, o professor “está muito preocupado sobre a habilidade dos estudantes em transferir aquilo que eles já aprenderam no contexto de um problema para outros.” Aqui, apesar da aquisição do conhecimento matemático ter uma importância fundamental, a ênfase é dada em aprender os conteúdos matemáticos e depois ser capaz de usá-los.

Além desses dois caminhos de abordar a Resolução de Problemas, no fim da década de 80, emergem ideias para trabalhá-la também como uma metodologia de ensino. Schroeder e Lester (1989), abordando essa concepção de ensino, chamaram de "ensino *via* resolução de problemas", e diziam que ela deveria ser considerada não somente como um dos objetivos de se ensinar Matemática, mas, principalmente, como um meio de fazer Matemática.

A partir de 1990, a abordagem “ensinar *via* resolução de problemas” (Teaching via Problem Solving) passou a ser “ensinar *através* da resolução de problemas” (Teaching through Problem Solving), a diferença entre as duas é que a expressão “através de” significa do começo ao fim, inteiramente, ao longo da resolução do problema e não simplesmente um recurso para se resolver o problema dado como se colocava a expressão “*via*” que significa “por meio de” (NUNES, 2010).

No Brasil, a principal idealizadora da metodologia é a professora pesquisadora Lourdes de la Rosa Onuchic, fundadora e coordenadora do Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), formado em 1992 na Universidade Estadual Paulista (UNESP) – Rio Claro. Desde então, os participantes desse grupo (alunos regulares e ex-alunos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) desenvolvem trabalhos sobre a Resolução de Problemas. Uma das primeiras publicações que deu uma visão do que seria Resolução de Problemas foi no artigo *Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas* (ONUCHIC, 1999), em que foi feita uma referência ao tratamento de problemas matemáticos, ao longo da História da Matemática. Nesse trabalho a autora diz que:

O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. Sob esse enfoque, problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação dos conceitos antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal. (ONUCHIC, 1999, p. 207).

Desde então, Onuchic e outros pesquisadores vêm realizando estudos sobre a implantação da Resolução de Problemas em sala, adotando a chamada: *Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas*.

Vale salientar que a Resolução de Problemas como Metodologia de ensino, defendida pelo GTERP, não exclui as demais concepções de Resolução de Problemas. Isso significa que, quando o professor adota essa Metodologia, os alunos podem aprender tanto *sobre* resolução

de problemas, quanto aprendem Matemática *para* resolver novos problemas, enquanto aprendem Matemática *através* da resolução de problemas. Pelo fato de ser mais abrangente, nesta pesquisa, optamos em trabalhar com essa Metodologia no desenvolvimento de atividades em sala de aula.

4.2 METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas amplia as três abordagens apresentadas por Schroeder e Lester (1989). A palavra composta “Ensino-Aprendizagem-Avaliação” foi proposta (PIRONEL, 2002; ONUCHIC; ALLEVATO, 2011) no sentido de que “ao ter em mente um trabalho em que estes três elementos ocorrem simultaneamente, pretende-se que, enquanto o professor ensina, o aluno, como um participante ativo, aprenda, e que a avaliação se realize por ambos.” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

O problema matemático é concebido como algo que não se sabe resolver, mas que há interesse em resolvê-lo (ONUCHIC, 1999), isto é, “qualquer situação que estimule o aluno a pensar, que possa interessá-lo, que lhe seja desafiadora e não trivial.” (ZUFFI; ONUCHIC, 2007, p. 83). Na aula orientada por essa Metodologia, o problema é considerado como ponto de partida para o processo de construção do conhecimento, e, através da resolução de problemas, espera-se que os alunos possam realizar conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e conteúdos (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011). “Por meio dela, o aluno utiliza os conhecimentos anteriores que possui e o professor o auxilia a construir, a partir desses novos conhecimentos relacionados ao problema proposto.” (JUSTULIN; NOGUTI, 2017, p. 22). Então,

Compreender os dados de um problema, tomar decisões para resolvê-lo, estabelecer relações, saber comunicar resultados e ser capaz de usar técnicas conhecidas são aspectos que devem ser estimulados em um processo de aprendizagem *através* da resolução de problemas. No decorrer desse processo, a formalização, o simbolismo e as técnicas precisas são introduzidas depois da resolução trabalhada, dando-se liberdade aos alunos, evitando-se direcioná-los para ‘o que pensar’ ou ‘o que fazer’, conduzindo-os somente em casos de maiores dificuldades, ou seja, quando eles não sabem como agir. (ZUFFI; ONUCHIC, 2007, p. 83).

Desse modo,

O processo de ensino-aprendizagem-avaliação de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca por respostas razoáveis ao problema dado. A avaliação

dos alunos é feita continuamente durante a resolução do problema. (MENINO; ONUCHIC, 2017).

Portanto, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (RP)¹¹ é um meio de se aprender matemática através da resolução de problemas (rp)¹².

Nessa concepção, os problemas são propostos aos alunos antes mesmo de lhes ser apresentado formalmente o conteúdo que é pretendido, assim, o problema gerador é que conduzirá ao conteúdo que o professor planejou construir em determinada aula. Segundo Pironel e Vallilo (2017) após definir o problema gerador, o professor deve iniciar um exame minucioso sobre a validade das atividades para que sejam alcançados os objetivos propostos.

O professor precisa resolver o problema e tentar chegar à solução por diversos caminhos procurando vislumbrar, durante esse processo, possibilidades de erros ou de obstáculos que o aluno possa cometer ou enfrentar, com a finalidade de antecipar possíveis intervenções durante a resolução do problema. Precisa certificar-se de que os alunos sejam capazes de resolver o problema utilizando apenas conceitos, operações e propriedades previamente concebidas. (PIRONEL; VALLILO, 2017, p. 286).

Ainda sobre a escolha dos problemas a serem propostos, Pironel e Vallilo (2017, p. 286), elaboraram algumas questões para que o professor estude ao selecionar um problema: “Isso é um problema? Para que séries ele é adequado? Quais conteúdos estão envolvidos? É possível que a resolução desse problema nos leve à formalização do conteúdo pretendido?”. As autoras Onuchic e Allevalo (2008) também comentam que a maneira de implementar aulas de matemática a partir de problemas depende da criatividade e do entusiasmo do professor, e que muitos desses problemas podem ser retirados ou adaptados das listas que os livros didáticos trazem.

Desse modo, o professor que segue estas orientações com a seleção de problemas, demonstra preocupação com o desenvolvimento da aula. Deve ser enfatizado também, que o resultado final do problema não é o mais importante nesse processo, mas sim, as diferentes estratégias abordadas que serão apresentadas e comparadas pelos alunos e pelo professor.

Na aplicação da Metodologia através da RP em sala, sugere-se que os alunos trabalhem em grupo, já que o trabalho colaborativo é muito importante na rp, pois “permite aos estudantes com maiores dificuldades discutir suas dúvidas e concepções com os colegas que aprenderam um determinado conceito com maior rapidez ou com mais precisão.” (PIRONEL; VALLILO, 2017, p. 291).

¹¹ Será usado RP (maiúsculo) quando se referir a Metodologia.

¹² Será usado rp (minúsculo) quando se referir ao ato de resolver problemas.

Essa Metodologia tem por meta ajudar os alunos a se tornarem investigadores de uma situação desafiadora – um problema – de forma a compreender e questionar os conceitos de que irão necessitar para resolvê-lo, dessa forma, o papel do professor é de ser observador, organizador, consultor, mediador, controlador e incentivador da aprendizagem (MENINO; ONUCHIC, 2017).

Como se pode perceber, trabalhar com a RP não é tarefa fácil para o professor, pois requer tempo, maturidade, muita reflexão e pesquisa (NUNES, 2010). Consequentemente, implementar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da RP, exige tanto do professor como também dos alunos novas posturas e atitudes com relação ao trabalho em sala de aula.

O professor precisa preparar, ou escolher, problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir. Precisa deixar de ser o centro das atividades, passando para os alunos a maior responsabilidade pela aprendizagem que pretendem atingir. Os alunos, por sua vez, devem entender e assumir essa responsabilidade. Esse ato exige de ambos, portanto, mudanças de atitude e postura, o que, nem sempre, é fácil conseguir. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82).

Apesar dos desafios da implementação da RP em sala, há boas razões que justificam prosseguir nesse esforço, Van de Walle (2009) destaca algumas destas:

- A resolução de problemas concentra a atenção dos alunos sobre as ideias e em dar sentido às mesmas;
- A resolução de problemas fornece dados contínuos para a avaliação que podem ser usados para tomar decisões educacionais, ajudar os alunos a ter bom desempenho e manter os pais informados;
- A resolução de problemas possibilita um ponto de partida para uma ampla gama de alunos;
- Uma abordagem de resolução de problemas envolve os estudantes de modo que ocorrem menos problemas de disciplina;
- A resolução de problemas desenvolve o “potencial matemático”. Envolve os estudantes nos seguintes processos do fazer Matemática: resolver problemas, raciocinar (argumentar), comunicar, conectar e representar.

Não há formas rígidas em se trabalhar através da RP, no entanto, tendo em vista uma forma de ajudar os professores a empregar a Metodologia em suas aulas, foi criado um roteiro com etapas da implementação em sala, conforme é apresentado no item 4.2.1, a seguir.

4.2.1 Etapas de trabalho com a Metodologia

Para trabalhar com a Metodologia de RP, Allevato e Onuchic (2014) apresentam um roteiro para auxiliar os professores na elaboração do planejamento de suas aulas. Esse roteiro contempla 10 etapas, caracterizadas e apresentadas a seguir:

- 1) Proposição do problema – Selecionar ou elaborar um problema, visando à construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado de problema gerador, e o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema ainda não deve ter sido trabalhado em sala de aula.
- 2) Leitura individual – Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura. A ação nessa etapa, é do aluno; ao ler individualmente, tem possibilidade de refletir, de colocar-se em contato com a linguagem matemática e desenvolver sua própria compreensão do problema.
- 3) Leitura em conjunto – Solicitar nova leitura e discussão do problema, agora em grupos. O professor ajuda os grupos na compreensão do problema e na resolução de problemas secundários, mas ainda as ações são realizadas, essencialmente pelos alunos. Nessa fase, exercitam a expressão de ideias, para o que necessitarão utilizar e aprimorar a linguagem, a fim de expressar-se com clareza e coerência e fazer-se entender.
- 4) Resolução do problema – A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Isso lhes conduzirá à construção de conhecimento sobre o conteúdo planejado pelo professor para aquela aula. Nessa etapa, a ação dos alunos volta-se à expressão escrita, pois, para resolver o problema, precisarão da linguagem matemática ou de outros recursos de que dispõem: linguagem corrente, desenhos, gráficos, tabelas ou esquemas.
- 5) Observar e incentivar – Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa o trabalho, os incentiva a utilizar conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas, e a troca de ideias. Ainda, o professor auxilia nas dificuldades, sem fornecer respostas prontas, demonstrando confiança nas condições dos alunos.
- 6) Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são solicitados a fazer o registro de suas resoluções na lousa. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas.
- 7) Plenária – O professor estimula os alunos a compartilhar e justificar suas ideias, defender seus pontos de vista, comparar e discutir as diferentes soluções, isto é, avaliar suas próprias resoluções de modo a aprimorar a apresentação (escrita) da resolução.

8) Busca do consenso – Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, em um esforço conjunto, professor e alunos tentam chegar a um consenso sobre o resultado correto.

9) Formalização do conteúdo – Neste momento, o professor registra na lousa uma apresentação “formal” – organizada e estruturada em linguagem matemática - padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando diferentes técnicas operatórias construindo demonstrações, se for o caso.

10) Proposição e resolução de novos problemas – Objetivando realizar avaliação contínua, novos problemas relacionados ao problema gerador são propostos aos alunos, a fim de analisar se foram compreendidos os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido e consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores, bem como aprofundar e ampliar a compreensão acerca daquele conteúdo ou tópico matemático, gerando um círculo que se configura pela construção de novos problemas, e assim por diante.

A etapa 10 teria forte viés no ensino *para* resolução de problemas, contudo, isso não desconfigura a Metodologia porque essa concepção (*através*) inclui as demais (*sobre e para*) (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

4.3 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O SOFTWARE GEOGEBRA

Segundo Vale (2017) pesquisas recentes na área de cognição, em particular nos processos de resolução de problemas, chegaram à conclusão de que, “para certos tipos de tarefas, o uso de representações visuais pode ter vantagens sobre o uso de outras representações, facilitando a resolução de problemas.” (VALE, 2017, p. 133). Ademais, para a autora, esse fato deve ser encarado com preocupação no ensino que se promove, já que a visualização não é apenas uma ferramenta poderosa na abordagem e tópicos geométricos, mas também em outros, por isso, os professores devem estar sensibilizados e preparados para a sua utilização nas práticas em sala de aula.

Para Pinheiro (2013), o processo de transição de pensamentos abstratos para um ambiente sólido, visível, palpável, na resolução de problemas, não é uma tarefa simples.

Por isso, instrumentos como *softwares* educativos e materiais concretos, que pensados e apontados devidamente pelo professor mediador, são relevantes para essa transição, pois neles podem ser armazenados dados que facilitam a visualização, que permitem e possibilitam fazer conjecturas mais coerentes com os possíveis caminhos que direcionam a uma solução satisfatória. (PINHEIRO, 2013, p. 9)

Allevato (2005) em sua tese de doutorado, em que adotou como metodologia de ensino a RP, analisou de que forma os alunos do curso superior de Administração de Empresas, relacionavam o que faziam na sala de aula, quando utilizam lápis e papel, com o que faziam no laboratório de informática, quando estavam utilizando o software gráfico *Winplot*¹³ na resolução de problemas fechados¹⁴ sobre funções. De acordo com a autora, a utilização do software permitiu que os alunos construíssem novos conhecimentos, e os dados mostraram que a compreensão dos estudantes cresce e se aprofunda ao tratarem os conteúdos com o apoio da ferramenta. Da mesma forma que, “a ênfase na representação gráfica de funções dada pela presença do software e a unicidade do processo de resolução, característica de problemas fechados, permitiu que os alunos percebessem novas formas de considerar antigos conteúdos.” (ALLEVATO, 2005, p. 320).

Pinheiro (2013) em seu artigo, traz um relato e uma reflexão sobre experiência vivida em torno da simulação de uma aula, na qual foi trabalhada um problema de Geometria sob a perspectiva da RP em uma disciplina de um Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática de uma universidade pública. Levando em conta que na RP os alunos são agentes independentes, livres para tomar suas próprias decisões, o pesquisador não impôs nenhum instrumento para resolução de problemas, mas sugeriu alguns como auxiliares: computadores contendo o software GeoGebra, duas tábuas de isopor e barbante, assim como, os alunos poderiam trabalhar com os meios tradicionais, como lápis, papel, compasso e quadro de giz (PINHEIRO, 2013).

Este autor diz que “um evento observado, e que deve ser levado em consideração, é o fato de que instrumentos tecnológicos, na maioria das vezes, sobressaem-se no que diz respeito ao potencial de *facilitador* de resolução de um problema. ” (PINHEIRO, 2013, p. 9, grifo do autor). E, durante a aplicação, teve uma amostra dessa afirmação, pois dos cinco participantes que estavam na intervenção, apenas um conseguiu resolver por completo o problema – a única aluna que optou por utilizar o GeoGebra na resolução.

No presente estudo, um dos objetivos foi trabalhar com a metodologia da RP mediada pelo software GeoGebra. Com base nisso, tínhamos o interesse em encontrar trabalhos nacionais que tivessem esse mesmo intuito, para averiguar as potencialidades, bem como, os desafios nesse processo. No entanto, não obtivemos grande êxito nas buscas, apenas dois

¹³ WinPlot é um programa para gerar gráficos de 2D e 3D a partir de funções ou equações matemáticas.

¹⁴ Os problemas fechados no estudo da autora são “problemas de solução única e nos quais tanto a situação inicial (proposição, ponto de partida) como o objetivo final (resposta, meta) são pré-determinados.” (ALLEVATO, 2005, p. 287).

trabalhos foram encontrados em buscas feitas no primeiro semestre de 2017, estes que serão relatados a seguir.

A dissertação de Souza (2013) aborda a utilização do software GeoGebra em conjunto com a Metodologia da RP. Nesse trabalho desenvolvem-se reflexões sobre o ensino de função modular por meio de Resolução de Problemas utilizando o GeoGebra como estratégia pedagógica. A intenção da pesquisadora era que o professor pudesse vislumbrar a possibilidade de atuar como facilitador, mediador, desafiador e que elaborasse atividades de aprendizagem a fim de que a interação do aluno com o conhecimento em construção fosse desenvolvida no decorrer da aprendizagem. Para isso, a autora realizou uma coleta de dados utilizando questionários e entrevistas com alunos de um curso de Pós-Graduação em Educação Matemática em São Paulo, que também eram professores de escolas da cidade. Na investigação, se procurou evidenciar a forma como os professores compreendem as expressões dos pontos de vista algébrico e geométrico da função modular por meio da RP, assim como, a influência do GeoGebra e de estratégias a ele ligadas na compreensão e na proposição de métodos mais interativos e experimentais de construção do conhecimento.

Souza (2013) conclui que a principal relevância do GeoGebra para o ensino de função modular baseada em RP não reside no software em si, mas no planejamento dos professores para utilizá-lo como elemento mediador das aprendizagens. Além disso, diz que o conhecimento matemático do professor é essencial para que a estratégia seja efetiva, pois problemas relativos aos conteúdos de referência tendem a fragilizar a estratégia, transformando-a em apêndices de práticas tradicionais. Para finalizar, a autora ainda ressalta que os professores precisam se apropriar mais das ferramentas tecnológicas e utilizar com mais frequência os softwares matemáticos nas suas aulas, pois só assim muitos alunos também teriam acesso e estímulo para praticar o uso desta ferramenta.

Vogado (2014) em sua tese de doutorado focou sua pesquisa em analisar o ensino e aprendizagem da integral por meio da RP. Ele realizou a aplicação de uma sequência de ensino com intuito de introduzir o conceito de integral para alunos de Licenciatura em Matemática. E com a intenção de dinamizar o desenvolvimento das atividades, o autor, no sentido de promover a visualização de elementos que pudessem contribuir para a introdução do conceito de integral e motivado pelas constatações das vantagens da utilização de ferramentas computacionais, optou em trabalhar também com o GeoGebra. O software foi utilizado como uma ferramenta de visualização de gráficos e também para agilização de cálculos. Em uma das aplicações, o pesquisador perguntou aos participantes o que eles tinham achado do uso do GeoGebra no ensino de integral, algumas das respostas que surgiram, foram:

D_L¹⁵: Ficou fácil acharmos a variação do tempo, a velocidade e a distância total.

D_L: Fica fácil o uso do GeoGebra na manipulação a respeito das quantidades de retângulos e o cálculo de área.

D_F: Ganhamos tempo, usando o GeoGebra, para responder as nossas respostas.

D_P: Observamos que no momento que aumentávamos o valor do **n** no GeoGebra o valor da somatória das áreas aumentava na atividade I e na atividade II, diminuía.

D_P: Deu para perceber por meio do GeoGebra que o valor da área na parte I, II e III da atividade 4 foram os mesmos valores na medida que aumento o número de retângulos. (VOGADO, 2014, p. 133-134).

A partir dessas falas e nas observações realizadas, Vogado (2014) infere sobre a importância do uso de um software matemático no ensino do Cálculo Diferencial e Integral. Além disso, nas considerações finais de sua tese, ressalta que:

A estratégia do ensino da matemática por meio de resolução de problemas mostrou-se eficaz no sentido de dar oportunidade aos estudantes de discutir suas estratégias de resolução, quer no interior da dupla, quer no momento da socialização das soluções, quer na plenária, contribuindo para que os mesmos passassem a apresentar certa autonomia e criticidade em suas produções. (VOGADO, 2014, p. 139-140).

E baseando-se também em outros estudos, destaca que o uso de um software matemático pode ser um caminho a ser seguido pelos educadores comprometidos com a Educação (VOGADO, 2014).

A partir do exposto sobre o conceito de limite, sobre as TD, softwares, e a respeito da Metodologia de ensino através da RP, a partir de agora, iremos tratar sobre a metodologia de pesquisa que orienta esta dissertação, mencionando os procedimentos metodológicos adotados nas etapas do desenvolvimento do trabalho. E, na sequência, nos capítulos 6 e 7, apresentamos os problemas propostos e os resultados da aplicação em sala de aula utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas mediada pelo software GeoGebra.

¹⁵ Os alunos trabalharam em duplas, e na pesquisa foi realizada análise das respostas de três duplas nomeadas como D_F, D_L e D_P.

5 METODOLOGIA

Neste capítulo, serão apresentadas as considerações da metodologia de pesquisa que orienta o trabalho, os procedimentos metodológicos adotados nas etapas de desenvolvimento, bem como os recursos utilizados para coleta de informações e o processo utilizado na análise dos dados oriundos das experimentações realizadas. Acreditamos que essas especificações sejam fundamentais na pesquisa, pois concordamos com a afirmação:

Se nossas conclusões somente são possíveis em razão dos instrumentos que utilizamos e da interpretação dos resultados a que o uso dos instrumentos permite chegar, relatar procedimentos de pesquisa, mais do que cumprir uma formalidade, oferece a outros a possibilidade de refazer o caminho e, desse modo, avaliar com mais segurança as afirmações que fazemos. (DUARTE, 2002, p. 140).

Em resumo, essa pesquisa é de natureza qualitativa, classificada como descritiva e que utilizou o trabalho de campo como procedimento para coleta de dados.

5.1 A METODOLOGIA DE PESQUISA QUALITATIVA

A escolha da opção metodológica de pesquisa é uma tarefa muito importante no estudo, Bogdan e Biklen (1994, p. 52), dizem que “os bons investigadores estão conscientes dos seus fundamentos teóricos, servindo-se deles para recolher e analisar os dados. A teoria ajuda à coerência dos dados e permite ao investigador ir para além de um amontoado pouco sistemático e arbitrário de acontecimentos.” Duarte (2002, p. 140), coloca que “a definição do objeto de pesquisa assim como a opção metodológica constituem um processo tão importante para o pesquisador quanto o texto que ele elabora ao final.”

Tendo em vista que no presente estudo o objetivo principal é propor uma abordagem para o ensino de limites através da Resolução de Problemas mediada por recursos dinâmicos do software GeoGebra, foi adotada a metodologia de pesquisa qualitativa. Minayo em seu livro sobre pesquisa social diz que:

A pesquisa qualitativa responde a questões muito particulares. Ela se preocupa, nas ciências sociais, com um nível de realidade que não pode ser quantificado. Ou seja, ela trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis. (MINAYO, 2001, p. 21-22).

Goldenberg (2004, p.63) coloca que, “os métodos qualitativos poderão observar, diretamente, como cada indivíduo, grupo ou instituição experimenta, concretamente, a realidade pesquisada.” E, Bogdan e Biklen (1994) definem cinco características para a

investigação qualitativa: 1- Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; 2- A investigação qualitativa é descritiva; 3- Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; 4- Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva; 5- O significado é de vital importância na abordagem qualitativa.

Cabe ressaltar que, embora continuem a ser aceites para caracterizar de uma maneira geral as pesquisas qualitativas, os aspectos mencionados acima não devem ser vistos como regras, por exemplo, Bogdan e Biklen (1994) comentam que alguns estudos que consideram qualitativos, são totalmente desprovidos de uma ou mais das características. Pressupõe-se que isso pode ocorrer, porque as investigações qualitativas assumem muitas formas e são conduzidas em múltiplos contextos.

Chueke e Lima (2012) após traçar uma trajetória evolutiva e os critérios de qualidade da pesquisa qualitativa, expõem uma definição sobre o que é pesquisa qualitativa nos dias de hoje: “A pesquisa qualitativa não procura enumerar ou medir eventos estudados, nem prega referencial estatístico na análise de dados, os interesses vão se definindo à medida que o estudo se desenvolve.” (CHUEKE; LIMA, 2012, p. 65).

Portanto, em geral, a pesquisa qualitativa preocupa-se, com aspectos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se na compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais (GOLDENBERG, 2004). Além disso, se opõe ao pressuposto que defende um modelo único de pesquisa para todas as ciências.

A partir do entendimento desses aspectos que caracterizam as pesquisas qualitativas, baseando-se em Bogdan e Biklen (1994) e Gerhardt e Silveira (2009), também julgamos importante descrever a seguir alguns cuidados que o pesquisador deve estar atento ao seguir os métodos, a coleta e análise de dados que compõem essa metodologia:

- Tentar agir de modo que as atividades que ocorrem na sua presença não difiram significativamente daquilo que se passa na sua ausência;
- Cuidar com a sensação de dominar profundamente seu objeto de estudo, pois isso pode fazer esquecer que somente uma parte bem reduzida da totalidade está representada nos dados;
- Não contaminar seus resultados em função de sua personalidade e de seus valores;
- Não interferir nas respostas do grupo ou indivíduo que pesquisa;
- Observância de aspectos diferentes sob enfoques diferentes;

- Escrever os detalhes sobre os processos através dos quais as conclusões foram alcançadas.

Baseando-se nesse exposto, na sequência serão descritos os métodos específicos que foram utilizados para o desenvolvimento, a coleta e a análise de dados da pesquisa e do produto educacional.

5.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Após a especificação da metodologia escolhida, e tendo já definidos os objetivos da pesquisa, cabe agora descrever os procedimentos metodológicos que foram utilizados para realização das etapas do trabalho.

Aqui é importante salientar a diferença entre metodologia e métodos:

A metodologia se interessa pela validade do caminho escolhido para se chegar ao fim proposto pela pesquisa; portanto, não deve ser confundida com o conteúdo (teoria) nem com os procedimentos (métodos e técnicas). Dessa forma, a metodologia vai além da descrição dos procedimentos (métodos e técnicas a serem utilizados na pesquisa), indicando a escolha teórica realizada pelo pesquisador para abordar o objeto de estudo. (GERHARDT; SILVEIRA, 2009, p.13).

A seguir apresentamos as fases que compuseram os procedimentos metodológicos.

5.2.1 Fase Preliminar

A fase preliminar de exploração, teve como objetivo caracterizar o contexto em que a pesquisa foi desenvolvida, esta já foi descrita nas seções anteriores dessa dissertação, utilizando o método de análise documental.

5.2.1.1 Análise documental

Como tivemos o intuito de desenvolver um produto educacional que trouxesse problemas a serem trabalhadas através da RP com mediação do GeoGebra, fez-se necessário realizar uma pesquisa documental de estudos que também pudessem tratar desses temas juntos, para termos uma base do que já foi produzido e os resultados obtidos.

Para isso, foi realizada uma pesquisa, no primeiro semestre de 2017, por meio eletrônico em bancos de dados de teses e dissertações do Brasil: Capes¹⁶ e Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD)¹⁷.

E, por abordarmos pesquisas desenvolvidas com o software GeoGebra, também achamos necessário fazer um mapeamento de artigos publicados em revistas, já que quando falamos de um software, estamos tratando de TD e essas estão sempre se modificando, logo, os artigos são uma forma mais acessível de conhecer produções contemporâneas. As revistas brasileiras utilizadas nessa busca foram:

- Educação Matemática Pesquisa (Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática PUC-SP);
- Ensino da Matemática em Debate (PUC-SP);
- Bolema;
- Educação Matemática em Revista;
- Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo;
- Zetetiké;
- REMATEC;
- REVEMAT;
- Alexandria (UFSC);
- Investigações em Ensino de Ciências (online);
- Educação (Santa Maria);
- Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista – ENCITEC.

Para a coleta de dados, nos mecanismos de pesquisas de cada banco de dados, e das revistas foram utilizados os descritores: “GeoGebra”, “Resolução de Problemas”, ou “Problemas”. No site da Capes e BDTD foi buscado com os descritores “GeoGebra” e “Resolução de Problemas” juntos. Nas revistas, foi colocado inicialmente “GeoGebra”, e depois, caso o resultado de artigos encontrados fosse superior a dez, também era utilizado o descritor “Resolução de Problemas” ou apenas “Problemas”.

A análise dos resultados da busca foi realizada lendo o título e resumo dos trabalhos, caso esses trouxessem o uso da RP com o GeoGebra, foi lido o texto na íntegra.

Nas revistas não encontramos nenhum trabalho trazendo estudos com atividades desenvolvidas *através* da RP. Algumas vezes até traziam resoluções de problemas com o

¹⁶ Disponível em: <<http://bancodeteses.capes.gov.br/banco-teses/>>.

¹⁷ Disponível em: <<http://bdtd.ibict.br/vufind/>>.

GeoGebra, mas não estavam tratando mesmo da Metodologia, e sim em ensinar *sobre* resolução de problemas e ensinar *para* resolver problemas.

No quadro abaixo encontram-se os resultados obtidos através da busca nos bancos de dados de teses e dissertações:

Quadro 3 - Resultados em bancos de dados online de teses e dissertações envolvendo Resolução de Problemas e GeoGebra

Instituição	Tese	Dissertação	Título dos trabalhos	Autor/Ano
PUC-SP		1	Um estudo com professores do ensino médio sobre função modular por meio de resolução de problemas utilizando o software GeoGebra como estratégia pedagógica.	Souza / 2013
PUC-SP	1		O ensino e a aprendizagem das ideias preliminares envolvidas no conceito de integral, por meio da resolução de problemas	Vogado / 2014

Fonte: Produção própria, 2017.

A descrição do que esses trabalhos encontrados trazem, já foi realizada no capítulo 4 da dissertação.

Pode-se dizer que quando foi proposto fazer essa busca, esperava-se encontrar mais trabalhos publicados, isso porque tinha-se a pretensão em apoiar-se em tais investigações para desenvolver o produto educacional. Porém, os trabalhos correlatados indicaram possibilidades positivas em aulas guiadas pela metodologia da RP mediadas pelo GeoGebra.

Assim o que poderia ser uma dificuldade, se transformou em um desafio e na abertura de novas possibilidades de investigação, pois percebe-se que há uma gama de questões a serem conhecidas e propostas dentro desse contexto de RP em conjunto com o GeoGebra no ensino e aprendizado.

5.2.2 Fase inicial

Esta fase consistiu na elaboração dos problemas para compor o produto educacional.

5.2.2.1 O produto educacional

O produto educacional desenvolvido, é apresentado através de um caderno didático na plataforma online do GeoGebra – GeoGebraBook¹⁸, e também por outro arquivo¹⁹ que acompanha esta dissertação - que o descreve mais detalhadamente.

¹⁸ Disponível em: <<https://ggbm.at/fZyuzpmx>>.

¹⁹ Resolução de Problemas e GeoGebraBook: atividades para o ensino do conceito de limite.

O produto educacional é composto de problemas que envolvem os conceitos referentes ao limite. Foram desenvolvidas situações-problema que em sala de aula podem ser utilizadas para abordar os seguintes conceitos:

- Noção intuitiva e geométrica de limite;
- Limites laterais;
- Limite pela definição;
- Limites infinitos;
- Propriedades de limite;
- Limite de sequência.

Desses itens, os problemas envolvendo os cinco primeiros, foram elaboradas para serem aplicadas na disciplina de CDI no Ensino Superior.

Pelo fato de limite de sequência fazer parte do conteúdo de Progressão Geométricas infinitas no Ensino Médio no Brasil, com relação a esse item foram desenvolvidas duas situações-problema voltadas para serem aplicadas no Ensino Médio. No entanto, nada impede que elas possam ser adaptadas e aplicadas também no Ensino Superior.

Buscando oferecer um caminho metodológico para desenvolvimento das atividades através da RP, o caderno didático também foi estruturado de forma a permitir ao professor ter acesso a fundamentação teórica e as etapas que regem esse processo. E, além da sugestão das atividades elaboradas, também estão disponíveis para manipulação online e/ou download, os aplicativos desenvolvidos no GeoGebra para visualização dos problemas.

O GeoGebraBook é um ambiente que permite a inserção de textos, equações, imagens e as worksheets produzidas no próprio GeoGebra. Portanto, com ele, pretendeu-se oferecer aos professores um material de fácil compreensão e acesso, fundamentado para ser aplicado em sala de aula.

Apesar do produto educacional ser um guia para os professores que buscam trabalhar novas estratégias de ensino, desejamos que essa Metodologia instigue os alunos a participarem ativamente no processo de aprendizagem, obtendo uma melhor compreensão do conceito de limite. E, baseando-se no que os alunos conseguiram resolver e compreender, o professor então, poderá construir os conceitos inerentes ao conteúdo que estará sendo abordado.

5.2.3 Fase experimental - Trabalho de campo

Na fase experimental, foram feitas aplicações em sala de aula para investigação de como ocorreria na prática a realização das situações-problema. Verificando com isso, as possíveis modificações e sugestões de melhorias para o produto educacional.

Para Minayo (2001, p. 26) o trabalho de campo é a etapa que “combina entrevistas, observações, levantamentos de material documental, bibliográfico, instrucional etc. Ela realiza um momento relacional e prático de fundamental importância exploratória, de confirmação ou refutação de hipóteses e construção de teorias”.

Nesta fase, foram realizados experimentos em sala com alunos do Ensino Médio e com acadêmicos da Graduação.

5.2.3.1 Observação participante

O pesquisador Cruz Neto (2001) afirma que entre as diversas formas de abordagem técnica do trabalho de campo, a observação participante é uma que se destaca, por se tratar de importante componente da realização da pesquisa qualitativa. Complementando, Alves-Mazzotti (1998) diz que apesar das pesquisas qualitativas serem caracteristicamente multimetodológicas, isto é, usam uma grande variedade de procedimentos e instrumentos de coleta de dados, a observação participante é uma das mais utilizadas.

A técnica de observação participante se realiza através do contato direto do pesquisador com o fenômeno observado para obter informações sobre a realidade dos atores sociais em seus próprios contextos. O observador, enquanto parte do contexto de observação, estabelece uma relação face a face com os observados. Nesse processo, ele, ao mesmo tempo, pode modificar e ser modificado pelo contexto. A importância dessa técnica reside no fato de podermos captar uma variedade de situações ou fenômenos que não são obtidos por meio de perguntas, uma vez que, observados diretamente na própria realidade, transmitem o que há de mais imponderável e evasivo na vida real. (CRUZ NETO, 2001, p. 59-60).

Alves-Mazzotti (1998, p. 167), diz que devem ser esclarecidos os seguintes aspectos da observação participante:

- a) o nível de participação do observador no contexto estudado;
- b) o grau de conhecimento dos participantes sobre os objetivos do estudo proposto;
- c) o contexto da observação;
- d) duração provável e, sempre que possível distribuição do tempo;
- e) forma de registro dos dados.

No caso desta pesquisa, foi realizada a aplicação das situações-problema propostas do caderno didático em sala de aula no Ensino Médio, e na disciplina de CDI numa instituição de Ensino Superior. A seguir são apresentados esses dois contextos.

5.2.3.2 Contexto da investigação no Ensino Médio

A aplicação de uma das partes do produto educacional ocorreu no segundo semestre de 2017 na Escola Estadual de Educação Básica Professor Gustavo Augusto Gonzaga, localizada na cidade de Joinville-SC. Essa escola contempla turmas de 1º ao 9º ano do Ensino Fundamental e de 1º a 3º série do Ensino Médio.

A escolha dessa escola se deu, pois, a autora desta pesquisa era professora de Matemática do Ensino Fundamental da mesma, assim, por fazer parte da equipe de docentes da instituição, a direção e a professora de Matemática do Ensino Médio prontamente aceitaram a realização da pesquisa.

No Ensino Médio, como foi apresentado no capítulo 2, um dos conteúdos que aparecem o conceito de limite é no estudo de Progressões Geométricas infinitas. A professora do Ensino Médio da escola, trabalhou no primeiro bimestre²⁰ de 2017 com os alunos da 2º série Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas finitas. Assim, disponibilizou que no quarto bimestre o assunto fosse retomado para apresentação do conteúdo de PG infinita e consequentemente do conceito de limite para uma de suas turmas da 2º série.

Logo, o contexto de aplicação ocorreu sem os alunos terem conhecimento do conteúdo, como prevê a Metodologia de ensino através da RP.

Como na proposta de aplicação, o professor em sala deveria trabalhar com a RP e o GeoGebra, por não ter familiaridade com a Metodologia e o software, a professora da turma preferiu participar da aplicação apenas como supervisora e pediu para que a autora desenvolvesse o trabalho com os alunos em sala de aula.

A turma cedida para pesquisa era composta com vinte e quatro alunos. O desenvolvimento ocorreu em quatro dias, sendo utilizadas ao total seis aulas, de 45 minutos cada. A investigação ocorreu em horário de aulas normais de Matemática e em duas fornecidas pelo professor de Física.

O primeiro contato entre a turma e a pesquisadora ocorreu antes do início das atividades, a pesquisadora foi na sala da turma apresentar-se, falar sobre a pesquisa e entregar o termo de

²⁰ Em escolas estaduais no estado de Santa Catarina o período letivo anual é dividido em quatro bimestres.

consentimento (Apêndice A) para eles e seus pais assinarem, já que a maioria dos alunos era menor de idade.

5.2.3.3 Contexto da investigação no Ensino Superior

As aplicações das atividades do produto educacional no Ensino Superior, ocorreram em aulas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, do curso de Licenciatura em Matemática na Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC). A escolha dessa turma se deveu ao fato de ser uma turma que contempla futuros professores, esses, que com a aplicação, vivenciaram na prática a implementação da Metodologia através da RP. Outro fato de escolha foi a professora ter disponibilidade e interesse em participar da pesquisa.

Na turma estavam matriculados 38 alunos, mas desses, 3 não estavam frequentando as aulas. A turma era composta por 35 alunos, do curso de Licenciatura em Matemática, Ciência da Computação e das Engenharias. O fato da turma contemplar alunos de outros cursos, ocorre porque os conteúdos abordados na disciplina de CDI I são iguais para todos os cursos do Centro de Ciências Tecnológicas (CCT) da UDESC, assim, os alunos podem optar por uma turma de CDI I que não seja específica do seu curso. E, como na Licenciatura em Matemática tem menos alunos, acaba sobrando vagas para acadêmicos de outros cursos se matricularem. A carga horária da disciplina é composta por seis créditos, tendo um total de 108 horas/aula, e as aulas são distribuídas em três dias durante a semana, cada dia com duas horas/aula (50 minutos cada).

O primeiro contato entre os alunos e a pesquisadora ocorreu antes do início da aplicação dos problemas, quando a pesquisadora foi na sala da turma apresentar-se, falar sobre a pesquisa e objetivos desta, e informar sobre a importância da colaboração dos alunos. Também foi entregue o termo de consentimento (Apêndice G) para assinarem e também um questionário inicial (Apêndice F) para responderem. Nesse dia, a pesquisadora observou duas aulas, em que a professora estava fazendo a revisão de conteúdo de funções. Nessas aulas, a professora ministrou exemplos e exercícios sobre funções, utilizando recursos de quadro e giz, e do software GeoGebra. Na aula seguinte, a turma tinha agendado uma avaliação sobre funções, e então, após esta aula foi dado início à proposta de aplicação em sala.

A aplicação e desenvolvimento das atividades ocorreram em cinco dias. Essas, foram realizadas tanto em sala de aula como em laboratórios da Universidade, ministradas pela professora da turma. A pesquisadora estava presente em todas as aplicações, observando a realização das atividades e as anotando no diário de campo, assim como, estava dando suporte

para a professora – entregando e recolhendo as atividades; pegando chave dos laboratórios; montando o projetor quando necessário; e ajudando a tirar as dúvidas dos alunos durante a resolução dos problemas.

Antes da aplicação em sala foram enviadas para a professora por e-mail todas as atividades, contendo os aplicativos desenvolvidos no GeoGebra, e a possível forma de formalização, contidos no produto educacional. Para que desse modo fosse possível ela analisar, preparar a sua aula, e também indicar para pesquisadora possíveis mudanças ou aprimoramentos - tanto nos problemas, como nos aplicativos.

5.2.3.4 Coleta de dados

Para o registro de dados foram utilizados os seguintes instrumentos:

- Questionário inicial - contendo perguntas relacionadas ao estudante de CDI, com intuito de identificar o perfil dos alunos (único instrumento que foi utilizado apenas no Ensino Superior);
- Gravação em áudio durante resolução das situações-problemas em alguns grupos, realizada utilizando quatro tablets fornecidos pela UDESC, para análise do diálogo e interações entre os estudantes;
- Fotografias, pois o registro visual amplia o conhecimento do estudo já que proporciona documentar momentos ou situações que ilustram o que está sendo vivenciado.
- Registro de resoluções dos alunos nas folhas de atividade, com intenção de verificar como os alunos trabalharam com os problemas – após finalização de cada atividade, antes de ser feita a formalização pelo professor, eram recolhidos os registros;
- Questionário de avaliação dos problemas – aplicado no fim da realização do experimento, com anonimato nas respostas, com objetivo de conhecer as percepções dos alunos acerca da proposta realizada;
- Diário de campo da pesquisadora. Durante os encontros registrou-se o maior número de informações, como o que ouvia, via e observava sobre o desenvolvimento das atividades.

Destacamos que essa observação foi voltada com um olhar para questões técnicas, como comportamento dos alunos no desenvolvimento das atividades, adequação e entendimentos dos problemas propostos, e facilidade de o professor lidar com os recursos planejados.

5.2.4 Fase de análise

Na medida em que estamos tratando de análise em pesquisa qualitativa, segundo Gomes (2001) não devemos nos esquecer de que, apesar de mencionarmos uma fase distinta com a denominação “análise”, durante a fase de coleta de dados a análise já poderá estar ocorrendo.

Por meio dos registros das resoluções das atividades feitas pelos alunos – principais dados da pesquisa – buscou-se verificar como trabalharam com os problemas e também identificar os conceitos que utilizaram. Para isso, recorreu-se à Análise de Conteúdo (AC) pelo fato de ser um instrumento de análise interpretativa que busca o(s) sentido(s) de um texto (BARDIN, 1977), designada como:

Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens. (BARDIN, 1977, p. 42).

O método da AC, segundo Bardin (1977) consiste em tratar a informação a partir de três momentos específicos: (1) “a pré-análise”, fase de organização que tem três “missões” - escolha dos documentos, formulação de hipóteses e objetivos, e a elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final; (2) “a exploração do material”, consiste essencialmente de operações de codificação, na qual é feita a categorização dos dados; (3) “o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação”, o qual permite avançar para conclusões da pesquisa.

Nesta pesquisa, o primeiro momento correspondeu na leitura dos registros das situações-problema entregues, identificando as estratégias de resolução utilizadas, bem como, relacionando-as com as discussões feitas em sala. No segundo momento, foram criadas categorias para classificar os diferentes elementos que surgiram nos problemas. Nos agrupamentos para análise, foram reunidas as respostas levando em consideração alguns critérios, como, a interpretação que os alunos tiveram na resolução dos problemas, quais procedimentos e maneiras que eles utilizam para interpretar as questões. E, no terceiro momento, após os dados estarem categorizados, foi realizada a inferência e a interpretação dos mesmos.

Assim, a partir de todos os dados coletados, e baseando-se nos referenciais teóricos desta pesquisa, foi realizada a discussão e análise dos resultados, apresentados nos próximos capítulos.

6 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DAS SITUAÇÕES-PROBLEMA APLICADAS NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo, serão apresentadas as situações-problema, sua aplicação na turma da segunda série do Ensino Médio numa escola pública de Santa Catarina, e também a análise de dados do seu desenvolvimento e considerações parciais.

Foram aplicados dois problemas em sala de aula, desenvolvidos utilizando a Metodologia de ensino através da RP. Estes dois problemas foram adaptados da monografia de Graduação da pesquisadora, na qual os problemas tinham sido elaborados para aplicação na disciplina de Fundamentos do Cálculo numa turma de Pós-Graduação (SABATKE, 2016). Nessa aplicação, surgiu a ideia para implementação dos problemas no Ensino Básico, dessa forma, fizemos as adaptações necessárias e também incluímos o desenvolvimento deles através da RP – o que não tinha sido proposto na monografia.

Após a formalização dos dois problemas em sala, foi proposto a resolução de três problemas para os alunos resolverem como tarefa de casa. E por fim, foi aplicado na turma um questionário de avaliação da implementação dos problemas.

6.1 SITUAÇÃO-PROBLEMA 1: PARADOXO DOS PASSOS

O desenvolvimento do primeiro problema ocorreu na Sala de Grupo de Estudos e no pátio da escola. Sua implementação foi feita pela pesquisadora, com a supervisão da professora de Matemática da turma. Para realização do problema os alunos se reuniram em trios, quartetos e quintetos, totalizando seis equipes, assim, na análise dos resultados utilizamos a nomenclatura “E1, E2, ... , E6” para identificar as equipes. Foi realizada gravação de áudio nas equipes E1, E3, E4 e E5.

6.1.1 Apresentação da situação problema

Esse problema tinha como intuito dos alunos vivenciarem um paradoxo proposto por Zenão de Eleia, e que já fossem construindo uma ideia de sequência. Assim, foi entregue uma folha para cada aluno com o problema (Apêndice B), que continha questões como apresentadas no Quadro 4.

Quadro 4 - Ensino Médio - Problema 1: O paradoxo dos passos

Siga as instruções:

- I. Com seu grupo, encontre um ponto (A) à cerca de 6 metros de uma parede.
- II. A partir do ponto (A), mova-se em direção a parede da seguinte forma: cada passo que der deve ser a metade da distância que há entre você e a parede. (Peça para um membro do grupo registrar a quantidade de passos dados).
- III. Continue a dar passos, seguindo a instrução II, até não conseguir mais.
- IV. Assim que estiver pronto, sente-se com seu grupo e respondam às seguintes perguntas:
 1. Quantos passos conseguiram dar?
 2. Poderiam ter dado mais passos? Se sim, quantos passos a mais poderiam ter dado? Se não, explique por que o número de passos é o máximo.

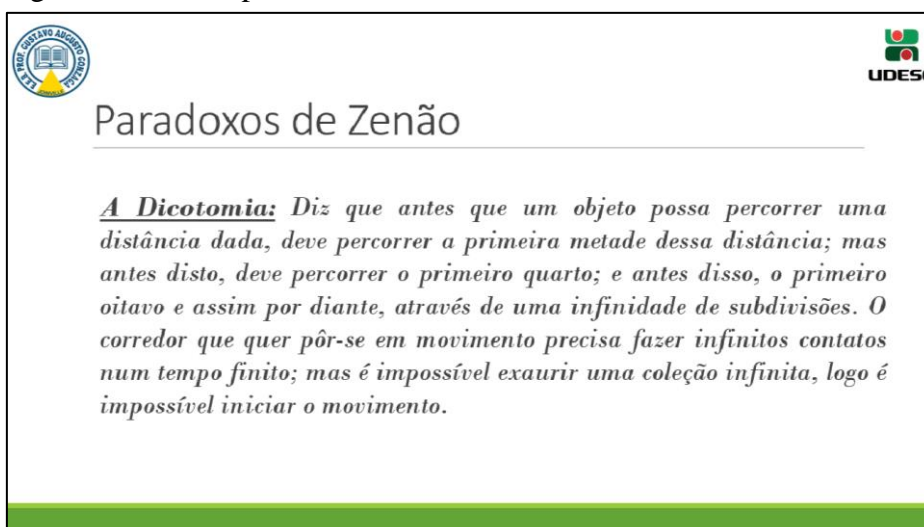
Fonte: Produção Própria.

6.1.2 Desenvolvimento da situação-problema

O desenvolvimento da primeira situação-problema se iniciou na Sala de Grupo de Estudos da escola, pois a pesquisadora já deixou a sala organizada com instalação do projetor, já que a aplicação começou com uma apresentação de slides, com cronograma da realização das atividades e sobre a Metodologia de ensino através da RP - para os alunos entenderem como iria ocorrer o desenvolvimento das aulas.

Com auxílio dos slides foi explicado o que era paradoxo, falado um pouco sobre quem foi Zenão de Eleia e mostrado dois de seus paradoxos – *Dicotomia* (Figura 22) e *Aquiles e a Tartaruga* (descrito no item 2.3.1).

Figura 22 - Slide apresentado em sala sobre o Paradoxo da Dicotomia



Paradoxos de Zenão

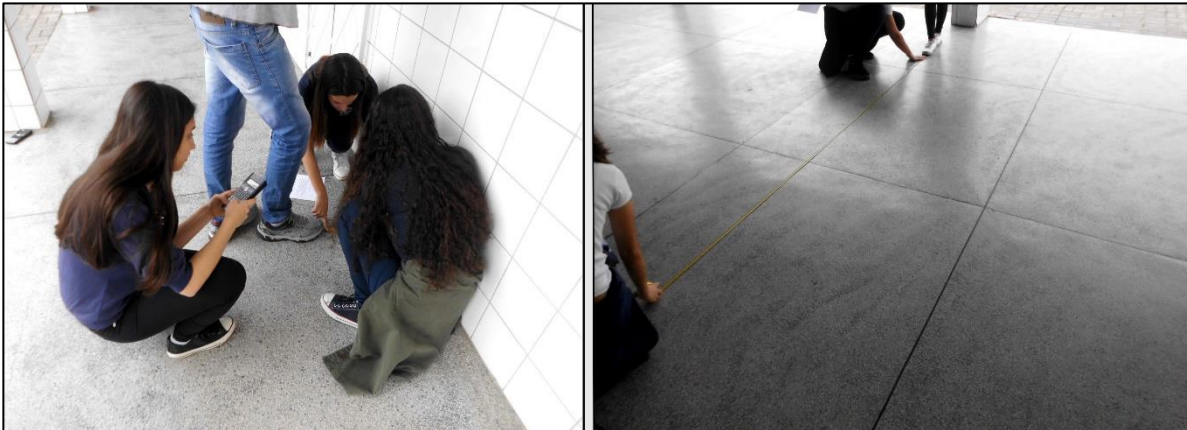
***A Dicotomia:** Diz que antes que um objeto possa percorrer uma distância dada, deve percorrer a primeira metade dessa distância; mas antes disto, deve percorrer o primeiro quarto; e antes disso, o primeiro oitavo e assim por diante, através de uma infinidade de subdivisões. O corredor que quer pôr-se em movimento precisa fazer infinitos contatos num tempo finito; mas é impossível exaurir uma coleção infinita, logo é impossível iniciar o movimento.*

Fonte: Adaptado de BOYER, 1974, p. 55.

Também foi passado um vídeo²¹ que exemplificava o paradoxo de *Aquiles e a Tartaruga*. Depois, foi entregue o problema para ser realizado a leitura individual, e após isso, os alunos se reuniram em equipes para iniciarem a resolução do problema.

A turma ficou dividida em seis equipes, e cada uma foi procurar um lugar no pátio para experimentar o problema, como ilustrado pela Figura 23:

Figura 23 - Equipes trabalhando no problema Paradoxo dos Passos



Fonte: Arquivo pessoal.

Alguns grupos estavam usando trena para resolver o problema, algo que não foi dito que teriam que utilizar. Esse fato, deve ter ocorrido, porque a pesquisadora no dia que foi se apresentar para a turma, solicitou para eles providenciarem uma trena ou outro instrumento de medida semelhante, pois seria necessário para realização do segundo problema. Assim, uma das equipes que não tinha levado trena, achou que não conseguiria resolver o problema, pois estava vendo que outras equipes estavam utilizando.

Outros grupos, sem auxílio de instrumento de medida, estavam dando pulos (primeiro passo seria de 3m), realmente experimentando o problema; uma das alunas, bailarina do Bolshoi²², já usou suas habilidades do balé para saltar - dar esses passos de Zenão.

No primeiro dia da aplicação, a turma conseguiu terminar a resolução do problema, porém, não houve tempo disponível para realização da plenária e discussão do mesmo, estes que foram realizados na aula posterior, apresentados no item a seguir.

²¹ Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=0NOHEY2ZJCg>>. Acesso em: 02 out. 2017.

²² A Escola do Teatro Bolshoi é uma tradicional escola de balé e possui sede na cidade de Joinville.

6.1.3 A Metodologia de ensino através da RP em prática e análise dos dados coletados

Para a realização da plenária, que aconteceu na Sala de Estudos da escola, a pesquisadora solicitou aos alunos que falassem sobre como resolveram a situação-problema. Alguns se dispuseram rápido para explicar como fizeram, outros ficaram tímidos e acabaram falando do seu próprio lugar o raciocínio que utilizaram para responder.

Nesse problema, as equipes deveriam colocar quantos passos conseguiram dar seguindo as instruções do problema (questão 1) e depois explicar se havia um número de passos máximos a ser dado (questão 2). Na questão 1, analisando o registro de resoluções dos alunos nas folhas de atividade, apareceram as seguintes respostas:

Quadro 5 - Respostas pergunta 1 - Problema Paradoxo dos Passos

Equipes	Interpretação feita
E1	5 passos.
E2 e E3	8 passos.
E4 e E5	9 passos.
E6	24 passos.

Fonte: Dados da pesquisa.

Durante a plenária, foi possível perceber porque a E6 considerou 24 passos, eles explicaram que acharam que teriam que contar quantos passos dariam, se colocassem um pé na frente do outro nesses seis metros, ou seja, não utilizaram as orientações dadas no problema.

Na questão 2, para análise, agrupamos as respostas das equipes utilizando três interpretações diferentes que apareceram, e a justificativas dadas pelas equipes, conforme Quadro 6.

Quadro 6 - Respostas pergunta 2 - Problema Paradoxo dos Passos

Equipes	Interpretação feita	Justificativas
E1, E2, E3, E6	Não poderiam ter dado mais passos.	Chegariam no limite da parede; Não haveria mais espaço.
E4	Poderiam dar mais passos.	Poderiam dar mais passos, porém seriam microscópicos.
E5	Talvez.	Pois na teoria seria possível, já que, os números da divisão da distância até a parede dariam positivos, mas na prática, não conseguiam dar mais passos.

Fonte: Dados da pesquisa.

A partir dessas respostas, verificamos que quatro equipes responderam que realmente não era possível. As duas equipes que responderam “não” e “talvez”, usaram uma interpretação parecida, pois elas justificaram que com os passos “normais”, não seria possível. Analisando a gravação de áudio realizada, também foi possível averiguar este raciocínio, por exemplo, a E4 tem a seguinte discussão para responder se poderiam ter dado mais passos:

Integrante 1: - Sim, porém seriam em questões microscópicas.

Integrante 2: - Seria uma bactéria andando.

Integrante 3: - Então a gente não conseguiria.

Já na E5, os integrantes estavam em desacordo a respeito dessa resposta, no primeiro momento que falam a respeito dessa questão, surge o seguinte diálogo:

Integrante 1: - Poderiam ter dado mais passos? Se sim, quantos passos a mais poderiam ter dado?

Integrante 2: - Não, a gente não poderia.

Integrante 3: - Poderia sim, só que seriam passos ... (interrompido pela colega)

Integrante 1: - Porque o número de passos é máximo? Porque não dá de andar 0,6 (cm).

Mais adiante eles discutem novamente:

Integrante 1: - Poderiam ter dado mais passos? Talvez.

Integrante 2: - Talvez não. Do ponto de vista do grupo não, pois...

Integrante 1: - Depende do ponto de vista, de dois do grupo sim.

Integrante 3: - Eu acho que não.

Integrante 2: - Eu acho que não.

Integrante 1: - Então, dois do grupo acham que sim e dois não, então talvez ... uma concordância do grupo.

Integrante 2: Não, uma contradição do grupo.

Assim, a E5 acabou colocando na folha entregue a resposta “talvez”.

Desse modo, percebe-se que as equipes conseguiram verificar que matematicamente o movimento infinito seria possível, porém, fisicamente, não.

Após a plenária com a turma, foi discutido mais sobre esse paradoxo, e explicado que nesse problema, como tínhamos a limitação da parede e também do tamanho do pé para dar os passos, teríamos um número limite de passos dados, estes que dependeriam de quem estivesse experimentando o problema, como por exemplo, um bebê conseguiria dar mais passos que os alunos.

Esse problema não se constituiu numa aplicação de algo que os alunos já haviam aprendido. Antes, ele se apresentou como um novo problema, especialmente em virtude da utilização da ideia do paradoxo. Também fez surgir inesperados obstáculos à sua resolução, proporcionando oportunidades importantes de construção de conhecimento. Sob esse enfoque é que Onuchic (1999) explicita sua compreensão sobre o que é um problema:

É tudo aquilo que não se sabe fazer mas que se está interessado em resolver, que o problema passa a ser um ponto de partida e que, através da resolução do problema, os professores devem fazer conexões entre os diferentes ramos da matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos. (ONUChic, 1999, p. 215).

6.2 SITUAÇÃO-PROBLEMA 2: PARADOXO DO CORREDOR

A apresentação deste problema aconteceu na Sala de Grupo de Estudos, seu desenvolvimento no pátio da escola, e a plenária, discussão e formalização, na sala de aula da turma.

Assim como na primeira situação problema apresentada esta também foi implementada pela pesquisadora. Para realização dos problemas a turma ficou dividida em seis equipes – as mesmas do primeiro problema - assim, na análise para mencionar as equipes foi utilizado a nomenclatura “E1, E2, ... , E6”. A gravação de áudio foi feita nas equipes E1, E3, E4 e E6.

6.2.1 Apresentação da situação problema

Esta situação problema intitulada “Paradoxo do Corredor” tinha como objetivo de os alunos construir uma PG para um cenário dado, e a partir disso investigar como seria a soma dos infinitos termos dela, e conseqüentemente trabalhar com o limite da seqüência formada.

Para isso, foi entregue para cada aluno uma tirinha que fazia parte da interpretação deste problema e a folha com o problema (Apêndice C). Nos Quadros 7 e 8, apresentamos estes.

Quadro 7 - Ensino Médio - Problema 2: Tirinha



Fonte: Produção própria.

Quadro 8 - Ensino Médio - Problema 2: O paradoxo do corredor

Suponha que o corredor que temos na tirinha é semelhante a um dos corredores da nossa escola.

1. Inicialmente, utilizando os instrumentos de medida, meça quantos metros tem o corredor.
2. Quantos passos você imagina que Leonard teria que dar a fim de atravessar esse corredor, levando em consideração as instruções de Zenão? Explique sua estimativa.
3. Considerando o ponto A como início do corredor, e utilizando a medida que foi encontrada para o comprimento do corredor, responda:

- a) Qual a distância que Leonard percorre do ponto A até seu primeiro passo?
- b) Qual a distância que Leonard percorre do ponto A até o seu segundo passo?
- c) Qual a distância que Leonard percorre do ponto A até o seu terceiro passo?

4. Seja $\{d_n\}$ a sequência em que o n ésimo termo (n) corresponde à distância que Leonard percorreu após seu n ésimo passo. Escreva os seis primeiros termos desta sequência. (Lembrando que d_1 , d_2 e d_3 já foram calculados na questão 3):

$d_1 =$ _____

$d_2 =$ _____

$d_3 =$ _____

$d_4 =$ _____

$d_5 =$ _____

$d_6 =$ _____

...

Escreva o que você imagina que seria o d_n ?

5. Você deve ter notado que a distância que Leonard tem percorrido parece estar ajudando-o a atravessar o corredor. Agora, suponha que você seja o Sheldon, então descreva o comportamento dos passos dados por Leonard e como ele continuaria sua jornada até o final do corredor. (A resposta pode ser representada utilizando estimativa; fórmula; desenho; texto, etc.)

Fonte: Produção Própria.

6.2.2 Desenvolvimento da situação-problema

A apresentação desta situação problema foi realizada na Sala de Grupo de Estudos, pois antes de entregar o problema a pesquisadora queria mostrar um vídeo²³ para turma para apresentar a série de TV *Big Bang: a Teoria*, uma série de televisão norte-americana, onde os personagens são considerados gênios da ciência, e passam seus dias debatendo sobre problemas do universo. Isso foi feito, pois a primeira parte do problema, consistia em interpretar a tirinha que tinha dois personagens dessa série.

Após ser feita essa apresentação, muitos alunos comentaram que assistiam a série e gostavam bastante dela. Então, foi entregue a tirinha e a folha com a situação-problema.

²³ Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=UKjdOvaWsm8>>. Acesso em: 04 out. 2017.

Como a primeira parte do problema, consistia em medir um corredor da escola, cada grupo escolheu um corredor, já que, se reunissem todos os grupos apenas em um lugar iria ficar apertado. Por isso, a resposta da questão 1 dependia do corredor escolhido. Para medir, os alunos usaram trena – material que foi solicitado anteriormente para que levassem para a aula. Na Figura 24 tem-se a ilustração de duas equipes nos corredores escolhidos.

Figura 24 - Equipes trabalhando no problema Paradoxo do Corredor



Fonte: Arquivo pessoal.

Nesta aula, os grupos não conseguiram finalizar a resolução da situação-problema, então a pesquisadora recolheu as folhas em que eles estavam resolvendo o problema, e entregou na próxima aula que teve com a turma para continuarem.

Para ser realizada a plenária em sala, foi solicitado que cada equipe escrevesse suas resoluções numa folha A3, para facilitar a discussão. E a formalização do problema ainda ocorreu num dia posterior.

6.2.3 A Metodologia de ensino através da RP em prática e análise dos dados coletados

A primeira parte do problema, consistia em medir um corredor da escola, e a partir disso, construir uma sequência conforme instruções dadas. Nessa parte, apareceram três diferentes interpretações para construção dos termos da sequência, que utilizamos para agrupar as respostas no Quadro 9. Também indicamos qual foi o procedimento utilizado pela(s) equipe(s) para chegar a tal interpretação.

Quadro 9 - Respostas construção da sequência - Problema Paradoxo do Corredor

Equipes	Interpretação feita	Procedimento
E3, E4, E5	Distância percorrida.	Interpretaram o enunciado corretamente, construindo a sequência que se aproximava cada vez mais do final do corredor.
E2, E6	Distância entre os passos.	Construíram uma sequência que indicava a distância entre os passos, que era parte da resolução do problema.
E1	Outro critério.	Consideraram que um passo teria 1,5m e usaram isso para construir a sequência.

Fonte: Dados da pesquisa.

Das equipes que não conseguiram construir a sequência, a E1 e E6 foi feita a gravação de áudio durante a resolução do problema. Pelo áudio, parece que essas equipes acabaram deixando de lado a tirinha, não voltando a relê-la para entender o que as questões pediam e como deveria ser feita a construção dos termos da sequência. Algo que pode ter faltado também durante a resolução, foi as equipes relacionarem o que já tinha sido discutido com a turma sobre o primeiro problema, fato que ocorreu na E4, pois quando estavam encontrando os termos da sequência, um membro da equipe achava que deveriam construir uma sequência que indicava a distância entre os passos, mas os outros integrantes explicaram para ele que não, como mostra o diálogo a seguir:

Integrante 1: - Esse é o paradoxo, tipo tu anda, o outro que a gente fez era de 6 metros, o primeiro passo era metade da distância.

Integrante 2: - É ... não é metade entre cada um, é metade da distância para o final, entendeu (nome colega)?

Integrante 1: - É... tipo... a distância que tu tem aqui é sei lá 7, vamos supor, você tem que fazer o que, dar um passo dessa metade entendeu? Aqui é metade de um número ... mais metade de um número ...

Após construção dos primeiros termos da sequência para resolução do problema, os alunos teriam que responder o que eles imaginavam que seria o n ésimo termo. Durante a realização do problema, a dúvida que mais surgiu, era sobre o significado desse d_n . Na E3, por exemplo, no diálogo da equipe durante a resolução, surgiu a dúvida sobre o seu significado:

Integrante 1: - Enésimo é dez não é?

Integrante 2: - Não

Integrante 1: - Enésimo é último ... será que é último?

A E3 não finalizou essa questão, pois a aula desse dia tinha terminado. Assim, na aula seguinte, chamaram a pesquisadora para auxiliar no entendimento. Desse modo, foi explicado para essa e outras equipes, que elas teriam que observar o que já tinham construído na sequência, e tentar descobrir o que seria então o d_n . Com relação a isso, Onuchic e Allevato

(2011, p. 84), dizem que, “enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo.” Além disso, o professor como mediador deve levar os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Para o significado de d_n , surgiram quatro respostas distintas, que classificamos em três categorias, mostradas no Quadro 10:

Quadro 10 - Respostas para d_n no Problema Paradoxo do Corredor

Equipes	Interpretação feita
E3, E4	Distância percorrida até o passo (n).
E2, E5	Número de passos no total.
E1, E6	Outro critério.

Fonte: Dados da pesquisa.

Das três equipes que conseguiram construir a sequência corretamente, apenas uma não interpretou corretamente o significado do d_n . O fato das outras três equipes não terem solucionado esse problema, pode ser devido ao caso de já terem construído uma sequência de termos usando outra interpretação. As equipes que usaram outro critério para responder, uma delas disse que o d_n seria “diâmetro nominal”, pois acharam que a resposta era relacionada as letras “d” e “n”, e a outra equipe apenas colocou que seria “ $x/2$ ”.

Na última parte do problema, queríamos verificar, se alguma das equipes conseguiria decifrar, utilizando as instruções, que era possível atravessar o corredor. Porém, nenhuma equipe respondeu isso nas folhas entregues, apenas explicaram as estratégias que usariam, assim, para agrupamento das respostas, definimos as categorias a partir das resoluções apresentadas, conforme Quadro 11.

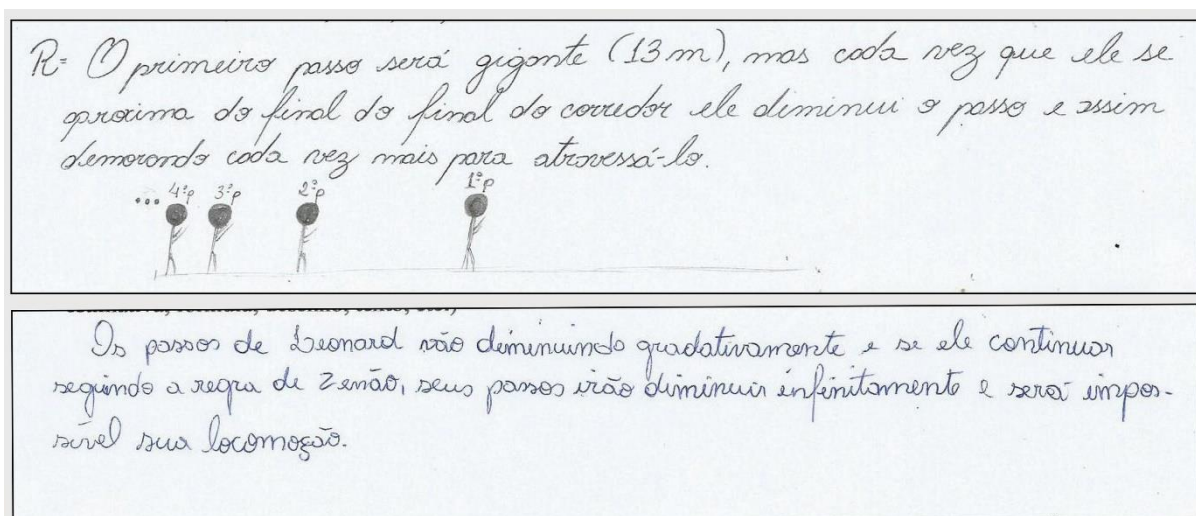
Quadro 11 - Respostas da questão 5 do Problema Paradoxo do Corredor

Equipes	Categoria
E1, E2, E3, E5	Iria continuar dando passos infinitamente, chegando perto do fim.
E4	Movimento seria impossível a partir de um ponto.
E6	Usaram uma fórmula: $x/2$, indicando que x seria o número de passos.

Fonte: Dados da pesquisa.

Embora não tenham solucionado corretamente essa questão, analisamos, por meio de seus registros, que as equipes tentaram encontrar uma solução, usando fórmulas, textos e desenhos para demonstrar seu raciocínio, como ilustrado na Figura 25.

Figura 25 - Respostas da E3 e E4 para a questão 5 do problema Paradoxo do Corredor



Fonte: Produção dos alunos, 2017.

Além disso, pelos áudios também foi possível identificar o raciocínio das equipes com relação a essa última parte do problema, expondo alguns casos:

E3:

Integrante 1: - Resumindo, o cara que quer andar igual esse daqui ele nunca vai sair do lugar.

Integrante 2: - Ele vai chegar, mas vai demorar MUITO.

Integrante 3: - É. ... Quando, tipo, dá o primeiro passo, pensa que meu, ele vai atravessar o corredor super rápido, mas depois vai demorar pra caramba.

E4:

Integrante 1: - Mas será que assim é possível atravessar o corredor?

Integrante 2: - Não, é um passo de tartaruga, ele nunca alcança a tartaruga.

Integrante 3: - Ah quando dá zero ele acaba né.

Integrante 2: - Não dá zero, vai sempre diminuindo o número.

Integrante 1: - Vai ficar tipo 0,0000000...

Durante a plenária, no momento que as equipes mostravam suas resoluções para a turma, alguns alunos, antes mesmo de falarem suas soluções, identificaram pela explicação dos colegas, que tinham interpretado de outra forma o enunciado das questões. Logo, quando esses foram mostrar sua solução, comentaram o porquê de chegarem a tais resultados. Quando se utiliza a metodologia da RP, isso deve acontecer, “resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.” (ONUHCIC; ALEVATO, 2011, p. 84).

Também, durante esse momento foi explicado, que apesar dos paradoxos serem antigos, eles ainda geram controvérsias atualmente, mas, que com a Matemática é possível desvendá-lo, o que iríamos fazer, com a formalização do conteúdo.

Para iniciar a formalização, foi utilizado duas sequências que foram construídas pela E5 e E6, pois utilizaram a mesma distância do corredor – 10 metros, porém, cada equipe construiu de uma forma, a primeira considerando a distância total percorrida até o passo, e a segunda considerando a distância entre os passos, conforme Figura 26. Temos que, uma das consequências do trabalho do professor-pesquisador que dá voz e razão ao aluno quando analisa sua produção, é que influencia não apenas na ordem em que serão desenvolvidas as discussões das soluções, mas também o foco desses debates (D'AMBROSIO, 2017).

Figura 26 - Resposta da E5 e E6 para construção da sequência do problema Paradoxo do Corredor

$d_1 =$ 5	$d_1 =$ 5 metros
$d_2 =$ 7,5	$d_2 =$ 2,5 metros
$d_3 =$ 8,75	$d_3 =$ 1,25 metros
$d_4 =$ 9,375	$d_4 =$ 0,625 metros
$d_5 =$ 9,6875	$d_5 =$ 0,3125 metros
$d_6 =$ 9,84375	$d_6 =$ 0,15625 metros

Fonte: Produção dos alunos, 2017.

Foi interessante utilizar esses dados, para mostrar que somando o d_1 e d_2 na segunda sequência (SII), chegaria ao d_2 da primeira sequência (SI); somando d_1 , d_2 e d_3 de SII chega ao d_3 da SI; e assim por diante, ou seja, teríamos a soma:

$$5 + 2,5 + 1,25 + 0,625 + 0,3125 + \dots$$

Isto é,

$$dn = \frac{10}{2^1} + \frac{10}{2^2} + \frac{10}{2^3} + \frac{10}{2^4} + \dots + \frac{10}{2^n}, \text{ em que } 10 \text{ representava a distância do corredor.}$$

Aí nesse momento surgiu uma pergunta, uma aluna questionou se não teria uma fórmula para chegar ao resultado de forma mais rápida, sem precisar calcular termo pôr termo. Então, foi falado que existe sim, que é a soma dos n primeiros termos de um PG, dada por:

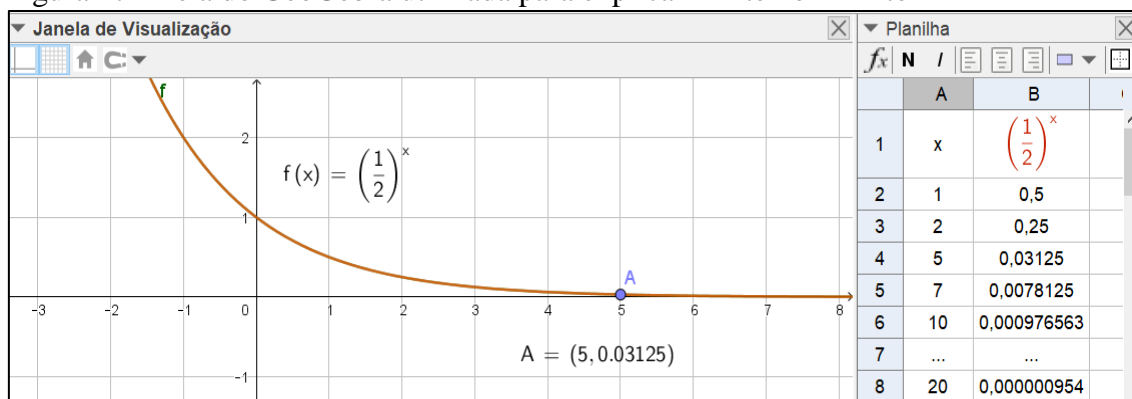
$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \quad (I)$$

Os alunos comentaram que já tinham visto essa fórmula no início do ano. Desse modo, foi feito o cálculo para S_6 , mostrando que chegaria ao valor de 9,8437, como a E5 tinha colocado.

Após isso, foi questionado a turma, sobre o problema, pois nele envolviam infinitos termos (passos dados): Seria possível calcular os infinitos termos? Chegaríamos a distância de 10 metros?

Para chegar nessa conclusão, inicialmente foi construído no quadro uma tabela para os alunos irem fazendo o cálculo e a completando e depois foi utilizado o software GeoGebra para mostrar outros exemplos, como exibido na Figura 27.

Figura 27 - Tela do GeoGebra utilizada para explicar limite no infinito



Fonte: Produção própria.

E assim, ilustramos que para um n suficientemente grande (tendendo ao infinito) q^n tendia a zero, simbolicamente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \text{ para } -1 < q < 1$$

Neste momento então, entramos com o conceito de limite, utilizando como recurso o GeoGebra. Além do exemplo mostrado na Figura 27, foram utilizadas outras funções para demonstrar essa noção. E depois foi apresentado a simbologia do limite (lim) e explicado o que cada índice representava.

Desse modo, usando a fórmula (I) e esta definição, foi mostrado que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} \quad (II)$$

E comentado que chamamos II de série geométrica convergente.

Retornando ao problema do paradoxo do corredor, e considerando a distância como sendo 10 metros, teríamos $a_1 = 5$ e $q = \frac{1}{2}$, e assim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \frac{5}{1 - \frac{1}{2}} = 10.$$

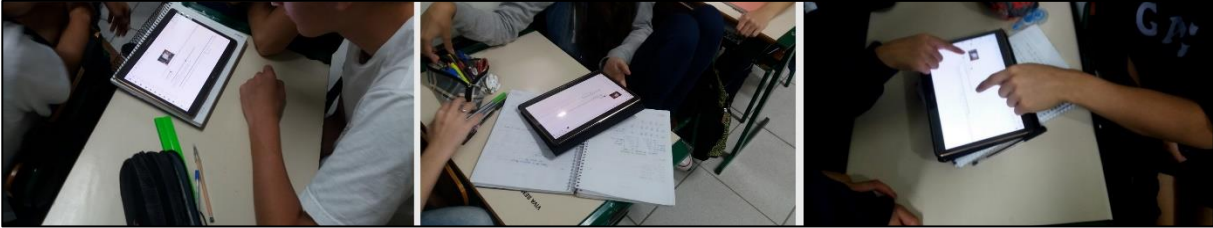
Após essa formalização, foi entregue aos alunos tablets²⁴ com o aplicativo desenvolvido no GeoGebra²⁵ para manipulação e visualização do problema conforme ilustra Figura 28. No

²⁴ Foram levados para a turma quatro tablets fornecidos pela Udesc para os alunos poderem manipular o aplicativo desenvolvido, já que a escola não tinha tablets nem computadores.

²⁵ Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/fZyuzpmx#material/cRVdqDZY>>. Acesso em: 15 ago. 2018.

aplicativo, os alunos poderiam escolher a distância do corredor, e manipularem um controle deslizante com os passos dados (n). O aplicativo automaticamente mostrava, conforme o n posto, a sequência que seria formada. Assim, conforme Nóbrega et al (2013) comentam sobre a utilização do GeoGebra, utilizamos uma “construção pronta”, a qual os estudantes puderam manipulá-la durante a aula.

Figura 28 - Alunos manipulando aplicativo no GeoGebra



Fonte: Arquivo pessoal.

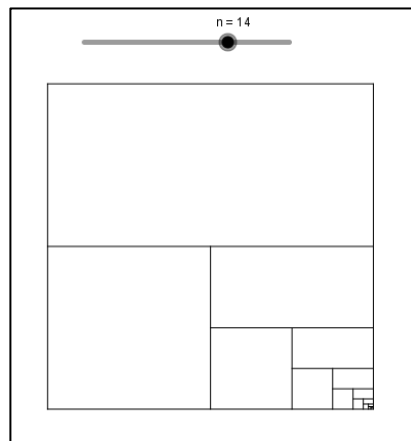
Para concluir, foi explicado que quando estudiosos descobriam séries infinitas cujas somas convergem para valores finitos, como essas que construímos, o paradoxo de Zenão foi desvendado, pois dessa forma foi compreendido que não é necessário um tempo infinito para realizar a soma de infinitas parcelas.

Seguindo a Metodologia de RP, a última etapa consiste na proposição e resolução de novos problemas. Então, após a finalização da formalização do assunto da soma dos infinitos termos de uma PG, foi dado mais um exemplo de uma PG infinita:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots, n \in \mathbb{N}^*$$

Para resolução dela, além da resolução algébrica, também foi utilizado o GeoGebra para os alunos visualizarem como seria uma possibilidade para sua interpretação geométrica considerando a área de uma região quadrada sendo igual à um. Assim, conforme exibe a Figura 29, com auxílio de um controle deslizante, foi mostrado que quanto maior for o n , a soma das áreas formadas seria mais próxima de 1.

Figura 29 - Tela do GeoGebra utilizada para explicar soma dos infinitos termos de uma PG



Fonte: Produção própria.

6.3 PROPOSIÇÃO E RESOLUÇÃO DE NOVOS PROBLEMAS

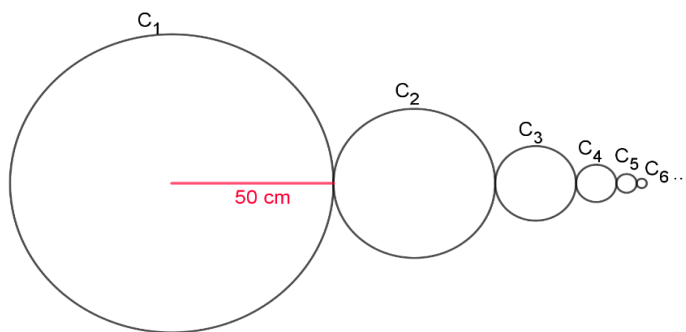
Após a formalização do assunto, foi proposto a resolução de novos problemas. Esses foram deixados como tarefa, com prazo de uma semana para entrega, podendo ser resolvido em duplas ou trios, desse modo, totalizaram nove atividades entregues, que nomeamos de E1 até E9 na análise.

6.3.1 Apresentação dos problemas

Foi entregue uma lista impressa com três problemas (Apêndice D) para resolução, estes apresentados nos Quadros 12, 13 e 14, foram propostos a fim de analisar se foram compreendidos os elementos essenciais da soma dos infinitos termos de uma PG, consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores, aprofundar e ampliar a compreensão desse assunto.

Quadro 12 - Ensino Médio – Tarefa: Problema 1

Seja a sequência C_1, C_2, C_3, \dots de infinitas circunferências, conforme Figura 1. Se o raio da circunferência C_1 é 50cm e, a partir da segunda circunferência o raio é metade do raio da circunferência anterior, calcule a **soma dos diâmetros** das infinitas circunferências.



Fonte: Produção Própria.

Quadro 13 - Ensino Médio – Tarefa: Problema 2

(VUNESP-Adaptada) Considere um triângulo equilátero cuja medida do lado é 4cm . Um segundo triângulo equilátero é construído, unindo-se os pontos médios dos lados do triângulo original. Novamente, unindo-se os pontos médios dos lados do segundo triângulo, obtém-se um terceiro triângulo equilátero, e assim por diante, infinitas vezes.

- Represente geometricamente a situação dada.
- Determine se soma dos perímetros da infinidade de triângulos formados na sequência, incluindo o triângulo original é finita ou infinita. Justifique.

Fonte: Produção Própria.

Quadro 14 - Ensino Médio – Tarefa: Problema 3

(UFF-Adaptada) Com o objetivo de criticar os processos infinitos, utilizados em demonstrações matemáticas de sua época, o filósofo Zenão de Eleia (século V a.C.) propôs o paradoxo de Aquiles e a tartaruga, um dos paradoxos mais famosos do mundo matemático.

Existem vários enunciados do paradoxo de Zenão. O escritor argentino Jorge Luis Borges o apresenta da seguinte maneira:

Aquiles, símbolo de rapidez, tem de alcançar a tartaruga, símbolo de morosidade. Aquiles corre dez vezes mais rápido que a tartaruga e lhe dá dez metros de vantagem. Aquiles corre esses dez metros, a tartaruga corre um; Aquiles corre esse metro, a tartaruga corre um décimo; Aquiles corre esse décimo, a tartaruga corre um centímetro; Aquiles corre esse centímetro, a tartaruga um milímetro; Aquiles corre esse milímetro, a tartaruga um décimo de milímetro, e assim infinitamente, de modo que Aquiles pode correr para sempre, sem alcançá-la.

Fazendo a conversão para metros, a distância percorrida por Aquiles nessa fábula é igual a

$$d = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots$$

- a) Explique o que significa, relacionando com o texto do problema, cada um dos termos da distância.
- b) Essa distância d , também pode ser representada como:

$$d = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots = 10 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

Responda:

- i) O que significa o símbolo $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$?
- ii) Quantos elementos tem nessa soma?
- iii) Aquiles alcança a tartaruga? Justifique.
- iv) Identifique a PG dando o primeiro termo e a razão.
- v) Determine a distância percorrida por Aquiles.

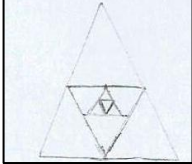
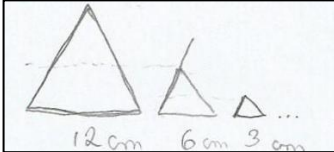
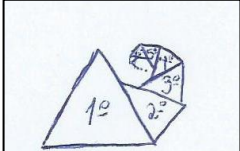
Fonte: Produção Própria.

6.3.2 Análise dos dados coletados

Não agrupamos as respostas para o problema 1, pois todas as equipes conseguiram chegar a resposta de 200cm para a soma dos diâmetros utilizando a fórmula demonstrada em sala durante a formalização do assunto.

O problema 2, consistia de inicialmente os alunos o interpretarem geometricamente. Conforme as respostas, apresentamos as interpretações que ocorreram - utilizando alguns dos desenhos das equipes - no Quadro 15.

Quadro 15 - Respostas interpretação geométrica do problema 2 da tarefa

Equipes	Interpretação feita
E2	
E1, E3, E4, E5, E6, E9	
E7, E8	

Fonte: Dados da pesquisa.

Apenas a E2 conseguiu interpretar corretamente a questão, pois encontrou primeiramente os pontos médios dos lados, e então continuou desenhando os próximos triângulos internamente. As outras equipes continuaram desenhando triângulos menores, porém, sem a ideia de utilizar os pontos médios dos lados.

Na segunda parte do problema 2, os alunos teriam que responder se a soma dos infinitos triângulos seria finita ou infinita. As respostas que apareceram foram categorizadas conforme o Quadro 16.

Quadro 16 - Respostas interpretação da soma infinita do problema 2 da tarefa

Equipes	Categoria	Justificativas
E1, E2, E4	Usaram fórmula da soma e não concluíram resposta.	-
E3, E5, E6, E7, E8, E9	Usaram a fórmula e concluíram que a soma era infinita.	PG decrescente tendendo a zero; Usaram fato do triângulo sempre ser metade do anterior para dizer que seria infinita; Sequência de triângulos infinita – mesmo que eles diminuíssem de tamanho, iriam existir; Porque no enunciado dizia que eram infinitos triângulos.

Fonte: Dados da pesquisa.

Nessa questão, ocorreu um grande equívoco, pois todas as equipes chegaram a 24cm para a soma dos infinitos perímetros dos triângulos. Porém, não conseguiram relacionar que como a soma convergiu para um valor específico, ela seria finita. Pelas justificativas apresentadas, percebemos que o fato dos triângulos continuarem infinitamente, os induziu a achar que a soma dos seus perímetros também seria infinita.

O problema 3 era o mais extenso, contendo vários itens para serem respondidos. A primeira questão consistia de os alunos interpretarem o que seria cada termo da distância

relacionando com o enunciado do problema. Surgiram três interpretações diferentes sobre a questão, como categorizadas no Quadro 17:

Quadro 17 - Respostas interpretação questão *a* do problema 3 da tarefa

Equipes	Interpretação feita
E1, E4, E5, E9	Cada termo é a distância que Aquiles percorre atrás da tartaruga e sempre haverá outro termo devido a tartaruga continuar sempre se movendo.
E3, E6, E7, E8	Não relacionaram apenas à Aquiles, pois também colocaram que os termos se relacionavam com o deslocamento da tartaruga.
E2	Relacionaram os três primeiros termos, mas não falaram sobre os demais.

Fonte: Dados da pesquisa.

Percebemos que nenhuma equipe relacionou por completo cada um dos termos, dizendo que o 10 era de 10 metros, 1 era 1 metro, $\frac{1}{10}$ era um décímetro e assim por diante. Além disso, algumas consideraram que a fórmula da distância dada, estava relacionada também a distância percorrida pela tartaruga, o que foi um equívoco, pois no próprio enunciado estava escrito que é “a distância percorrida por Aquiles”.

A questão *b* era composta de cinco itens, do qual o primeiro (*i*) era a respeito da interpretação do símbolo de Σ . Para essa questão, surgiram três tipos de resposta, conforme Quadro 18.

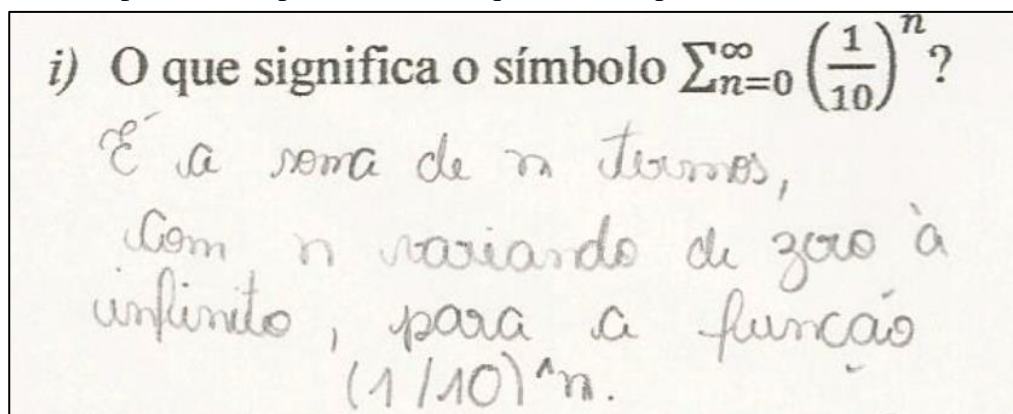
Quadro 18 - Respostas interpretação do item *i* da questão *b* do problema 3 da tarefa

Equipes	Categoria
E2, E4, E6	Somatório de uma sequência.
E7, E8, E9	Somatório da distância.
E1, E3, E5	Soma dos infinitos termos é igual a zero.

Fonte: Dados da pesquisa.

Vemos que seis equipes compreenderam corretamente a simbologia do somatório, três colocaram que era somatório da sequência e três escreveram que era o somatório da distância percorrida, ambas respostas equivalentes dentro da interpretação do problema. Uma dessas equipes até explorou todos os índices do somatório, como demonstrado na Figura 30. Por outro lado, três equipes, apesar de colocarem que era a soma dos infinitos termos, acrescentaram que essa soma seria igual a zero e deram a justificativa que quanto mais iriam somando mais próximo de zero estaria. Ainda, a E9, apesar de colocar que era o somatório da distância, escreveu que era “a distância percorrida por Aquiles e a tartaruga”, cometendo o erro já apresentado na questão *a*.

Figura 30 - Resposta da E2 para o item *i* da questão *b* do problema 3 da tarefa



Fonte: Produção dos alunos, 2017.

O segundo item da questão *b*, consistia em os alunos responderem quantos elementos tinha nessa soma, das nove equipes, sete responderam corretamente dizendo que haviam infinitos termos. Já as equipes E3 e E9, colocaram como resposta 4 e 3, respectivamente. A E3, como já mostrado, não conseguiu responder corretamente as questões anteriores desse problema, no entanto, não foi possível identificar o porquê de tal resposta, da mesma forma, não discernimos como a E9 pode ter relacionado quatro termos, visto que na expressão da distância tinham cinco termos iniciais.

No item *iii* da questão *b*, todas as equipes identificaram corretamente o primeiro termo e a razão da PG, colocando 10 para o primeiro termo e 1/10 ou 0,1 para a razão.

O item *iv* solicitava a determinação da distância percorrida por Aquiles, para resolvê-la, todas as equipes utilizaram a fórmula da soma dos infinitos termos da PG, e a categorização da análise das respostas encontra-se no Quadro 19.

Quadro 19 - Respostas interpretação do item *iv* da questão *b* do problema 3 da tarefa

Equipes	Interpretação
E1, E3, E4, E5, E6, E7, E9	Utilizando a fórmula da soma dos infinitos termos de uma PG, chegaram a 11,1111...
E2, E8	Utilizaram a fórmula da soma dos infinitos termos de uma PG, mas não souberam trabalhar com os cálculos.

Fonte: Dados da pesquisa.

As duas equipes que não chegaram a resposta, não souberam como trabalhar com divisão de frações para finalizar a conta. O que foi contraditório nessa questão, é que as equipes E1, E3 e E5 que colocaram no item *i* que a soma dos infinitos termos da sequência iria ser zero, nessa questão, calcularam corretamente. Ou seja, elas não perceberam o engano que cometeram no mesmo problema.

No Quadro 20 temos as categorias e interpretações que apareceram no último item da tarefa.

Quadro 20 - Respostas interpretação do item *v* da questão *b* do problema 3 da tarefa

Equipes	Categoria	Interpretação
E2, E4	Aquiles alcança a tartaruga.	Usaram interpretação do item <i>iv</i> para afirmar que a soma converge para um valor; Usaram interpretação da fórmula da soma dos infinitos termos de uma PG.
E1, E3, E5, E6, E7, E8, E9	Aquiles não alcança a tartaruga.	Mesmo Aquiles sendo mais rápido, a tartaruga estaria a uma distância à frente dele.

Fonte: Dados da pesquisa.

Percebemos que apenas duas equipes conseguiram “desvendar” o paradoxo de Aquiles e a Tartaruga, utilizando como justificativas o item *iv* e também a própria fórmula dos infinitos termos de uma PG, demonstrada em sala.

Portanto, com as resoluções dos alunos, é possível afirmar que eles ainda têm dificuldade em dizer que a somatória dos infinitos termos de uma PG chega a um número exato.

6.4 QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO

Após os alunos entregarem a lista dos problemas deixada como tarefa, a professora da turma forneceu um tempo de sua aula, para a pesquisadora aplicar o questionário de avaliação da aplicação.

Nesse questionário (Apêndice F), não era necessário os alunos identificarem-se, ficava a critério de cada um, pois o objetivo era que eles fossem sinceros em suas respostas, sem medo de serem avaliados por elas. Desse modo, na análise, identificamos os alunos como “A1, A2, ... , A24”.

A primeira questão, consistia de os alunos escolherem uma ou mais opções para classificarem as aulas e também teriam que justificar o porquê da escolha dessas. A classificação das respostas encontra-se no Quadro 21.

Quadro 21 - Classificação das respostas da questão 1 do Questionário aplicado no Ensino Médio

Alunos	Opção escolhida	Justificativas
A2, A3, A4, A9, A11, A13, A14, A17, A18, A20	Muito interessante	Achou divertida; Relembrou conteúdo; Algo diferenciado; Boa explicação; Aulas Dinâmicas; Bem executado.
A1, A6, A7, A10, A12, A15, A16, A18, A19, A21, A22, A23, A24	Interessante	Por trazer paradoxos – algo que nunca tinha visto; Teve vontade de resolver, mas não se aprofundar; Bem aplicadas; Fácil entendimento.
-	Pouco interessante	

-	Chatas	
A5, A7, A8, A9, A12, A14, A16, A18, A19, A20, A23, A24	Desafiadoras	Pois foi necessário colocar em prática os problemas, usar o corpo (fazer medições, dar passos); Para interpretar o problema do paradoxo do corredor; Novo conteúdo; Bastante cálculos; Paradoxos foram desafiadores.
-	Monótonas	
A2	Repetitivas	Achou questões repetitivas.
A10, A11, A13, A15, A18, A19	Estimulantes	Saiu do padrão das outras aulas; Estimulou a pensar no contexto; Aula prática.

Fonte: Dados da pesquisa.

As opções mais escolhidas foram “interessante” e “desafiadoras”, e relacionaram isso ao fato de principalmente trabalharem com paradoxos, algo que nunca tinham visto. Além disso, apesar do conteúdo ser novo disseram que foi fácil o entendimento.

Na segunda questão, tínhamos como objetivo investigar se os alunos já haviam utilizado anteriormente o GeoGebra, apenas o A19 comentou que já tinha utilizado na escola, todos os demais responderam que nunca tinham manipulado o software.

A terceira questão também foi relacionada ao software, com a intenção de verificar se ele contribui para visualização dos problemas. Aqui, tinha-se três opções de escolha, que os alunos deveriam optar e justificar o motivo da seleção, os alunos e as justificativas dessa questão encontram-se no quadro a seguir:

Quadro 22 - Classificação das respostas da questão 3 do Questionário aplicado no Ensino Médio

Alunos	Opção escolhida	Justificativas
A2, A3, A4, A5, A7, A10, A11, A13, A14, A15, A16, A18, A19, A22, A23, A24.	Muito	Na questão que foi exemplificado a sequência com a área do quadrado; Nas contas; Ficou visivelmente melhor; Entendeu o que seria “aproximar do 0”; Viu na prática o problema; Software calculava rápido os valores e mostrava o gráfico; Ficou mais fácil observar o que estava sendo falado pela professora; Ter noção e compreensão do problema proposto.
A1, A6, A9, A12, A17, A21	Um pouco	Poderia ser usado na interpretação do problema; Visualização da PG infinita; Não utilizou para resolver as contas.
-	Nada	-

Fonte: Dados da pesquisa.

Uma observação é que dois alunos A8 e A20 não responderam à questão 3, pois não estavam presentes na aula que foi utilizado o GeoGebra. Nenhum aluno optou pela opção que o software não contribuiu em nada. Todos de alguma forma, como aparece nas suas justificativas, afirmaram que o GeoGebra os auxiliou.

Na quarta questão queríamos averiguar se a forma que foi abordada os problemas, contribuiu para o entendimento do conteúdo, isto é, se a metodologia de ensino através da RP foi conveniente. Todos os alunos responderam que sim, algumas de suas justificativas se encontram na Figura 31.

Figura 31 - Algumas respostas da pergunta 4 do Questionário aplicado no Ensino Médio

4. A forma como abordado o problema contribui para o entendimento do conteúdo? Justifique. Sim, pois o que tenta fazer antes sem saber como os reis facilitando o aprendizado	A16
4. A forma como abordado o problema contribui para o entendimento do conteúdo? Justifique. Sim, pois vimos na prática e na GeoGebra, então ficou melhor para a compreensão.	A15
4. A forma como abordado o problema contribui para o entendimento do conteúdo? Justifique. Sim, porque foi criativo e menos entediante	A5
4. A forma como abordado o problema contribui para o entendimento do conteúdo? Justifique. Sim, pois foi de fácil entendimento, no começo pensei que não entenderia mas quando o prof ^o começou a explicar e deu a atividade foi fácil.	A9
4. A forma como abordado o problema contribui para o entendimento do conteúdo? Justifique. Sim. Pois foi bem explicado e acompanhado, e foi explicado de um jeito que nos está melhor a resolver com facilidade as atividades.	A18

Fonte: Produção dos alunos, 2017.

Já na quinta questão, desejávamos saber se os alunos tinham interesse em ter outros conteúdos abordados utilizando a Metodologia. Alguns responderam que sim, outros que não e um não tinha certeza. Nem todos os alunos deixaram suas sugestões, mas alguns dos alunos que responderam que sim também exemplificaram qual conteúdo que gostariam de aprender através desse método. Outros, também citaram tópicos relacionados a Metodologia que gostariam de experimentar novamente. Logo, agrupamos as respostas conforme o Quadro 23.

Quadro 23 - Classificação das respostas da questão 5 do Questionário aplicado no Ensino Médio

Alunos	Categoria	Sugestões
A2, A4, A5, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A17, A18, A19, A20, A21, A22, A23, A24.	Sim	<ul style="list-style-type: none"> • <u>Com relação ao conteúdo:</u> Estatística Matemática Financeira PA e PG; Todos os assuntos; • <u>Com relação a metodologia:</u> Dinâmicas; Praticar a atividade; Utilização de tirinhas; Trabalho em grupo; Utilização de software.
A3, A6	Não	Gostaria de problemas mais difíceis.
A1	Não tem certeza.	

Fonte: Dados da pesquisa.

Na sexta questão o objetivo foi examinar onde ocorreram as maiores dificuldades durante todo o desenvolvimento da aplicação. Os alunos elencaram suas dificuldades, e a partir delas, montamos o Quadro 24, categorizando as dificuldades e as justificativas dadas.

Quadro 24 - Classificação das respostas da questão 6 do Questionário aplicado no Ensino Médio

Alunos	Categoria da Dificuldade	Justificativas
A4, A7, A11, A20	Resolução do Problema 1	Entender o que o paradoxo queria dizer; Como dar os passos.
A5, A8, A12, A22, A24	Resolução do Problema 2	Interpretar a tirinha; Como medir o corredor; Construção da sequência;
A1, A6, A7	Resolução dos Problemas da tarefa de casa	Não ter a professora para tirar dúvidas.
A19, A21	Interpretação geral dos problemas	Complicado interpretar os problemas; Enunciados não eram muito claros;
A3	Explicação dos exercícios feitos	-
A15	Utilização do GeoGebra	Demorou para entender como funcionava.
A13	Formalização do assunto	Poucos exemplos.
A10	Fazer os cálculos	Não é bom em fazer contas.
A2, A9, A14, A16, A17, A18, A23	Nenhuma	Em grupo conseguiam solucionar as dúvidas que surgiam; Tudo bem explicado; Conteúdo fácil; Aulas muito boas.

Fonte: Dados da pesquisa.

Através do Quadro 24 constatamos que alguns alunos tiveram alguma dificuldade específica, por exemplo, uns tiveram dificuldade de entender o enunciado e de como resolver os problemas. Outros, citaram a tarefa de casa como dificuldade, por não terem o apoio presente do professor. Até mesmo, houve um aluno que listou que teve dificuldade com o GeoGebra, pois não estava entendendo como funcionava. Contudo, a maioria dos alunos indicou que não

tiveram dificuldades, as justificativas dadas foram que em grupos conseguiam solucionar as dúvidas que surgiam, além de que, o conteúdo era fácil e as aulas eram boas e bem explicadas.

A última questão foi colocada para os estudantes poderem deixar suas sugestões e contribuições para o trabalho desenvolvido. No entanto, apenas um aluno deixou uma recomendação, escrevendo que poderiam ter mais exercícios sobre o que era o S_n .

6.5 CONSIDERAÇÕES PARCIAIS

Por meio dos áudios e dos registros escritos dos alunos foi possível verificar sobre os modos que utilizaram para interpretar os problemas, assim como, analisar as estratégias e procedimentos utilizados nas resoluções. Cabe salientar, que os alunos nunca tinham trabalhado com paradoxos e também ainda não tinha visto o assunto da soma dos infinitos termos de uma PG.

Através do problema Paradoxo dos Passos, foi possível introduzir a ideia do que seria um paradoxo, a também fazer com que os alunos o interpretassem na prática. Além disso, esse problema tinha o intuito de auxiliar a resolução do problema Paradoxo do Corredor, já que, as instruções para serem seguidas, eram semelhantes. Temos então, conforme Allevato e Onuchic (2014) comentam sobre a utilização da RP, que foi desenvolvido um trabalho onde o problema é ponto de partida e a orientação para a aprendizagem, e a construção do conhecimento se fez através de sua resolução.

No entanto, ainda verificamos que ocorreram algumas interpretações diferentes das consideradas corretas no problema Paradoxo do Corredor, pois nem todas as equipes conseguiram construir uma sequência conforme foi dado as instruções na tirinha e no enunciado da questão. Porém, das equipes que não chegaram a uma sequência considerada correta, apenas uma construiu uma sequência que fugia totalmente do proposto, pois as outras elaboraram uma estratégia conectando procedimentos que poderiam ter levado a resposta certa.

Na formalização do assunto, utilizamos o software GeoGebra para mostrar o conceito intuitivo do limite. Depois, com o aplicativo desenvolvido e com a utilização dos tablets os alunos puderem ver dinamicamente a interpretação do problema 2, e as PGs que surgiriam considerando diferentes valores para o comprimento do corredor. Com aplicação do questionário, dois alunos comentaram que o software poderia ter sido utilizado durante a resolução do problema, para contribuir com a visualização do mesmo. Assim, para o produto

educacional desenvolvemos um aplicativo que simula o problema Paradoxo dos Passos²⁶. Outros alunos também comentaram que com o GeoGebra ficou mais fácil observar o que estava sendo falado pela professora, e para entender o que seria “aproximar do 0” – no entendimento do limite tendendo ao infinito. Portanto, pela análise dos resultados, percebemos que os alunos comentaram sobre a potencialidade de visualização que o GeoGebra proporcionou, ficando mais claro entender o que estava sendo proposto, corroborando com o que Boz (2005) diz, já que o software contribuiu para uma maior compreensão do assunto.

Após a formalização do assunto, foram propostos mais três problemas para os alunos resolverem (etapa 10 da RP). Com as resoluções dos alunos nessa atividade, é possível afirmar que eles ainda têm dificuldade em dizer que a somatória dos infinitos termos de uma PG chega a um número exato.

Desse modo, podemos inferir que o paradoxo de Zenão ainda causa controvérsias atualmente, e que mesmo com exemplos e demonstrações feitas, os alunos têm dificuldade em entender que uma soma infinita converge para um valor finito. Por isso, após analisar os problemas, acreditamos que durante o ensino da PG Infinita, o professor deve dar mais ênfase no que significa convergência e divergência, e evidenciar que quando se tem a soma de infinitos termos de uma PG, cuja razão (q) é dada por $|q| < 1$, essa soma tem um resultado finito.

A respeito da utilização da Metodologia através da RP, obtivemos um feedback positivo dos alunos no questionário, afirmando que trabalhar em grupos, utilizar os problemas contextualizados e os colocar em prática, tornou a aula mais dinâmica e divertida, e também os estimulou a pensar no contexto.

²⁶ Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/fZyuzpmx#material/Qq5b9rhK>>. Acesso em: 15 ago. 2018.

7 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DAS SITUAÇÕES-PROBLEMA APLICADAS NO ENSINO SUPERIOR

Neste capítulo, se encontram as descrições sobre a aplicação das situações-problema que envolviam o conceito de limite no Ensino Superior, a exposição e categorização das resoluções apresentadas pelos alunos, o relato de alguns diálogos entre alunos, professora e pesquisadora, e análise do seu desenvolvimento pelo viés da Metodologia através da RP.

A aplicação aconteceu numa turma de CDI I do curso de Licenciatura em Matemática na UDESC, composta por trinta e cinco alunos, sendo implementada pela professora da turma que já tinha conhecimento da Metodologia de ensino proposta.

Através da aplicação de um questionário inicial (Apêndice F) que tinha o intuito de identificar o perfil da turma, temos que vinte e dois alunos da turma já tinham cursado pelo menos uma vez a disciplina de CDI I.

Foram aplicados quatro problemas em sala de aula, que ocorreram sequencialmente, e em todos foi realizada a gravação de áudio em quatro grupos, com tablets fornecidos pela Universidade. Assim, no capítulo é apresentada cada situação-problema, seguida de seu desenvolvimento e análise dos dados obtidos pelas observações em sala, registro das resoluções dos alunos e gravação de áudios, realizadas em cada situação-problema. A formação dos grupos ficou a critério dos alunos, dessa forma, tiveram grupos compostos de dois a cinco integrantes.

Após a formalização das situações-problema em sala, foi proposta a resolução de uma lista através da Ferramenta Grupo na plataforma do GeoGebra. Essa lista foi composta por quatro problemas para os alunos resolverem individualmente como tarefa de casa, valendo uma pontuação que integraria a segunda nota na disciplina.

Neste capítulo também é apresentada a análise do questionário de avaliação da implementação dos problemas e algumas considerações parciais.

7.1 SITUAÇÃO-PROBLEMA 1: ÁREA DO CÍRCULO

O desenvolvimento da primeira situação-problema ocorreu na sala de aula da turma. Para essa atividade, inicialmente os alunos teriam que manipular um aplicativo no GeoGebra, assim, como não havia laboratório de informática disponível na Universidade para realização da atividade, anteriormente a aula foi solicitado aos alunos para levarem seus notebooks/tablets para a sala com o software já instalado.

Neste dia, estavam presentes trinta e um alunos, e para realização do problema eles se dividiram em dez grupos, por isso, na análise dos resultados utilizamos a nomenclatura “G1, G2, G3, ... , G10” para identificar os grupos.

7.1.1 Apresentação da situação-problema

Esta situação-problema intitulada “Área do Círculo” (Apêndice H) tinha como objetivo de os alunos compreenderem o Método da Exaustão e entenderem o comportamento de polígonos inscritos e circunscritos em uma circunferência quando o número de seus lados tendesse ao infinito, para assim, introduzir a ideia geométrica e intuitiva do limite.

Para isso, foi entregue para cada aluno a situação-problema conforme mostra o Quadro 25.

Quadro 25 - Ensino Superior - Problema 1

As primeiras ideias do Cálculo surgiram na Grécia antiga, naquela época os gregos já sabiam calcular a área de qualquer região poligonal, dividindo-a em triângulos e somando as áreas obtidas.

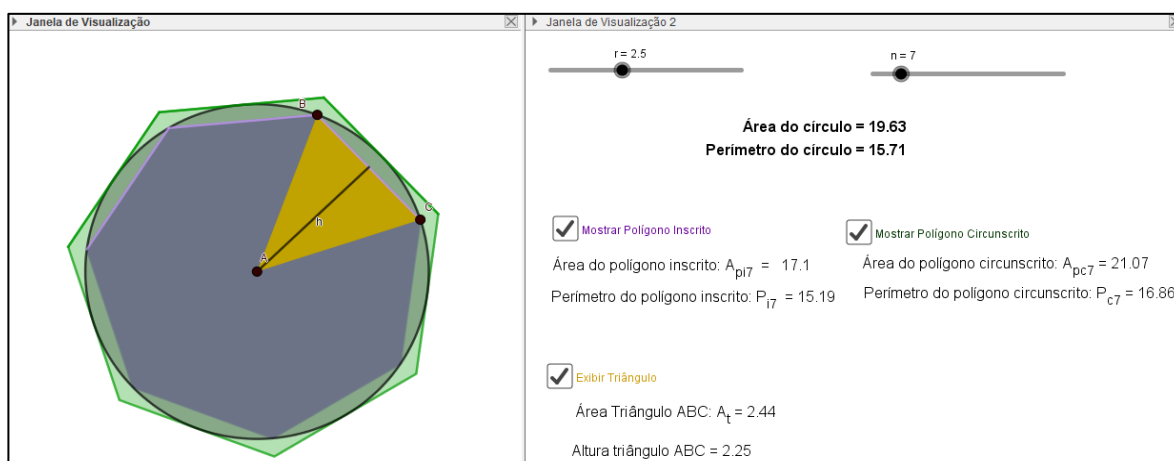
Para o cálculo de áreas de regiões planas limitadas por curvas, eles usavam o chamado *Método da Exaustão*. Esse método consistia em inscrever e circunscrever a figura com uma sequência de polígonos. Aumentando o número de lados dos polígonos, eles conseguiam chegar a valores bem próximos do valor real da área.

Utilizando a ideia do Método da Exaustão, calcule a área A de um círculo. (Você pode utilizar que o comprimento de uma circunferência é dado por $2\pi r$).

Fonte: Produção própria.

Para auxiliar no entendimento e resolução do problema foi desenvolvido um aplicativo no GeoGebra que ilustrava a situação-problema, conforme mostra a Figura 32.

Figura 32 - Tela do GeoGebra ilustrando o Problema 1 no Ensino Superior



Fonte: Produção própria.

Nesse aplicativo²⁷, através dos controles deslizantes, é possível alterar o raio do círculo e também a quantidade de lados (n) dos polígonos inscritos e circunscritos. Além disso, pode-se habilitar ou não a exibição do polígono inscrito e/ou do circunscrito, como também, o triângulo formado no interior do círculo. Ao movimentar os controles deslizantes, automaticamente o software mostra os valores para área e perímetro do círculo e dos polígonos, bem como, a altura e área do triângulo inscrito.

Para averiguarmos se os alunos conseguiram manipular e entender o que estava no aplicativo, desenvolvemos algumas perguntas, também com a intenção que essas já os auxiliasse na resolução do problema. Estas questões encontram-se no Quadro 26.

Quadro 26 - Ensino Superior – Problema 1: Perguntas para serem respondidas através do GeoGebra

Para resolver o problema, utilize o aplicativo do GeoGebra e responda:

- a) Altere o raio do círculo (controle deslizante r). O que essa alteração provoca no círculo?
- b) Habilite “Mostrar Polígono Inscrito”, e movimente o controle deslizante “ n ”. Que conjecturas podem ser estabelecidas sobre a área e o perímetro do círculo conforme a variação de “ n ”?
- c) Desabilite “Mostrar Polígono Inscrito” e habilite “Mostrar Polígono Circunscrito”, e movimente o controle deslizante “ n ”. Que conjecturas podem ser estabelecidas sobre a área e o perímetro do círculo conforme a variação de “ n ”?
- d) Habilite “Exibir Triângulo” e deixe um valor fixo para o raio (r), o que acontece com a área do triângulo quando se movimenta o controle deslizante “ n ”?
- e) Para $r = 3$ e $n = 3$, qual a diferença entre a área do polígono circunscrito e do polígono inscrito? E qual a diferença entre o perímetro do polígono circunscrito e do inscrito?
- f) Conforme “ n ” aumenta, o que acontece com a diferença entre a área do polígono circunscrito e do polígono inscrito? E com a diferença entre o perímetro do polígono circunscrito e do inscrito?
- g) O que acontece com as áreas dos polígonos circunscrito e inscrito em relação a área do círculo, conforme aumenta-se o número de lados do polígono (n)?

Fonte: Produção própria.

7.1.2 Desenvolvimento da situação-problema

O desenvolvimento da primeira situação-problema teve início com uma apresentação, feita através de slides pela professora da turma comentando sobre uma breve história do conceito de limite. Então, foi entregue para cada aluno o problema para leitura individual,

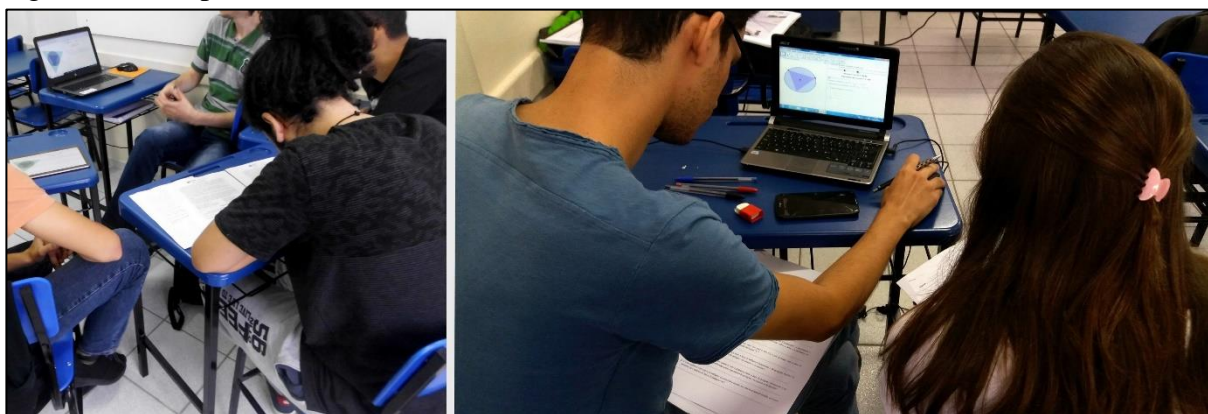
²⁷Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/fZyuzpmx#material/H6dRKEUq>>. Acesso em: 15 ago. 2018.

depois, eles se reuniram em grupos e iniciaram sua resolução. Ao mesmo tempo, foi passado através de pen-drive o aplicativo para os alunos trabalharem em seus notebooks. Como nem todos os alunos levaram notebook, e aconteceu que em alguns grupos nenhum dos integrantes tinha um dispositivo para trabalhar, foi emprestado a esses, notebooks e tablets que a Universidade disponibilizou para a aplicação. Os tablets também serviram para gravação de áudio realizada em quatro grupos – G3, G5, G8 e G10.

Todos os grupos estavam focados na resolução do problema, e chamavam para tirar algumas dúvidas – pesquisadora e professora circulavam entre os grupos para ajudá-los.

Na Figura 33 temos a ilustração de dois grupos trabalhando no problema.

Figura 33 - Grupos trabalhando no Problema 1



Fonte: Arquivo pessoal.

7.1.3 A Metodologia de ensino através da RP em prática e análise dos dados coletados

Inicialmente, para resolver o problema, os alunos deveriam utilizar o aplicativo para responder as questões que apresentamos no Quadro 26. Na primeira questão, todos os grupos responderam que se movimentassem o controle deslizante (r) iriam provocar alterações da área e no perímetro da circunferência.

Na segunda questão, todos os grupos também perceberam que movimentando (n) a área e o perímetro do polígono inscrito se aproximariam da área e comprimento da circunferência, exemplificamos esse fato na Figura 34.

Figura 34 - Exemplos de respostas da questão *b* do Problema 1

b) Habilite “Mostrar Polígono Inscrito”, e movimente o controle deslizante “*n*”. Que conjecturas podem ser estabelecidas sobre a área e o perímetro do círculo conforme a variação de “*n*”? **G4**

Quanto maior o número de lados do polígono, maior será a aproximação da sua área com a do círculo. O mesmo ocorre com o perímetro.

b) Habilite “Mostrar Polígono Inscrito”, e movimente o controle deslizante “*n*”. Que conjecturas podem ser estabelecidas sobre a área e o perímetro do círculo conforme a variação de “*n*”? **G6**

*HD Ao aumentar o “*n*”, aumenta o perímetro e a área do polígono, se aproximando do limite da área da circunferência.*

Fonte: Produção dos alunos, 2018.

Percebe-se que aqui, até mesmo teve uma equipe que já utilizou a palavra “limite” para explicar seu raciocínio. Lembramos que alguns alunos da turma já tinham cursado anteriormente a disciplina de CDI, e esses podem ter relembado do que estudaram em outro semestre.

A questão *c*, era análoga a questão *b*, somente agora trabalhava-se com o polígono circunscrito, logo, as respostas dos alunos foram semelhantes à da questão *b*.

A questão *d*, consistia em analisar o que acontecia com a área do triângulo, conforme aumentava o número de lados do polígono (*n*), novamente, todos os grupos conseguiram identificar que a área iria diminuindo. Três grupos (G5, G6 e G10) também acrescentaram em suas respostas o que acontecia com o raio desse triângulo, afirmando que ele tendia ao raio da circunferência, uma dessas respostas encontra-se na Figura 35.

Figura 35 - Exemplos de resposta da questão *d* do Problema 1

d) Habilite “Exibir Triângulo” e deixe um valor fixo para o raio (*r*), o que acontece com a área do triângulo quando se movimenta o controle deslizante “*n*”? **G10**

*Quanto maior o *n*, menor a área do triângulo, e a altura do triângulo vai tendendo a ser igual ao raio da circunferência.*

Fonte: Produção dos alunos, 2018.

Na questão *e*, os grupos deveriam calcular a diferença entre a área e o perímetro do polígono inscrito e circunscrito, no entanto, apenas G2 e G8 fizeram isso. Os demais grupos apenas descreveram que a área e o perímetro do polígono circunscrito eram maiores que do polígono inscrito. Esse erro pode ter ocorrido devido a interpretação do que estava escrito, pois os alunos não perceberam que nesse contexto o termo “diferença” indicava a subtração dos valores, e não as características entre eles.

E a questão *f*, era continuação da questão *e*, pois, agora era para ser verificado qual a diferença entre área e perímetro dos polígonos conforme se aumentava o número de lados. A resposta esperada era que a diferença era pequena, se aproximando cada vez mais de zero. No

entanto, como já comentamos, a maioria dos grupos não entenderam já na questão anterior o significado de “diferença”, assim, não apareceu nenhuma resposta exatamente dessa forma. Contudo, quatro grupos (G4, G7, G8 e G9) escreveram que a diferença da área e do perímetro ficaria cada vez menor.

Na questão *g*, era para ser descrito o que acontecia com as áreas dos polígonos em relação a área do círculo, conforme se modifica o controle deslizante (*n*). Todas as equipes colocaram que a área dos polígonos inscrito e circunscrito se aproximavam (G1, G3, G4, G7, G8, G9) ou tendiam (G2, G5, G6, G10) a área do círculo.

Com exceção das questões *d* e *e* que houve um equívoco na interpretação do termo “diferença”, em todas as demais questões os grupos conseguiram explorar bem o aplicativo desenvolvido. Tanto, que nessa primeira parte, não chamaram para tirar dúvidas, diferentemente da segunda parte do problema (Quadro 25), em que consistia deles chegarem a área do círculo, através da ideia do Método da Exaustão.

Os grupos solicitaram várias vezes o apoio da professora e da pesquisadora para os auxiliarem no desenvolvimento da demonstração da área do círculo, como ilustra a transcrição de áudio do diálogo a seguir que ocorreu no G5:

Integrante 1: - Chama ela lá.

Integrante 2: - Professora, tá muito estranho pra fazer isso.

Integrante 3: - Chegar em πr^2 .

Pesquisadora: - O que vocês conseguiram pensar?

Integrante 2: - Ah, um monte de coisa.

Pesquisadora: - O que vocês estão fazendo, isso aqui é uma regra de três?

Integrante 2: - É, mas acho que não vai dar essa regra.

Pesquisadora: - Pensem aqui num polígono, como que a gente pode calcular a área de um polígono? De um polígono de cinco lados, por exemplo.

Integrante 2: - Aí teria que dividir em cinco triângulos e aí calcula a área de um triângulo e multiplica por 5.

Pesquisadora: - Exatamente. E se a gente for aumentando a quantidade de lados?

Integrante 2: - Aumenta a multiplicação ...da área do triângulo pelo número de lados... mas é que ... assim ... eu não sei se esse triângulo aqui dá para dividir em 30 certinho (aluno se referiu ao polígono, não ao triângulo).

Pesquisadora: Divide. Se tem trinta lados... se aqui está igual a trinta ... aqui se tem trinta triângulos.

Integrante 2: - Ah, eu teria então que descobrir o raio primeiro?

Pesquisadora: - Você pode utilizar o raio como “r” mesmo, você não precisa atribuir um valor para ele. A fórmula da área do círculo é πr^2 , então você não precisa atribuir um valor para o raio, pode utilizar o “r” mesmo. É para o caso geral. É onde quero chegar ... em πr^2 .

Integrante 2: - Tá, entendi.

Posteriormente a esse diálogo o G5 conseguiu construir a demonstração utilizando a ideia do Método da Exaustão. Em outros grupos que também pediram auxílio, era questionado aos alunos se eles inicialmente lembravam qual a área do círculo (para saberem onde deveriam chegar), e enfatizado que poderiam utilizar o comprimento da circunferência dado por $2\pi r$, e também as ideias da utilização do aplicativo. Dessa forma, conforme afirmam pesquisadoras da RP, “O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias, já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem.” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 84).

Através dos registros da resolução dos alunos, classificamos a respostas dadas para demonstração da área do círculo em quatro categorias, conforme Quadro 27.

Quadro 27 - Respostas dos grupos no desenvolvimento do cálculo da área de um círculo no Problema 1

Grupos	Categoria
G2, G5, G9	Utilizaram o método da exaustão e demonstraram a área do círculo dada por πr^2 .
G1, G3, G10	Explicaram através de texto e desenho como funciona o método da exaustão e como chegariam a área do círculo, mas não chegaram a πr^2 .
G7, G8	Utilizaram exemplos de polígonos inscritos com valores dados para o lado, e colocaram que a área do polígono se aproximaria da área do círculo, mas não chegaram a generalização de πr^2 .
G6	Utilizaram área de triângulos com valores dados para dizer que quanto maior o número de triângulos, mais próximo estariam do limite da área do círculo.
G4	Não fizeram esta parte do problema.

Fonte: Dados da pesquisa.

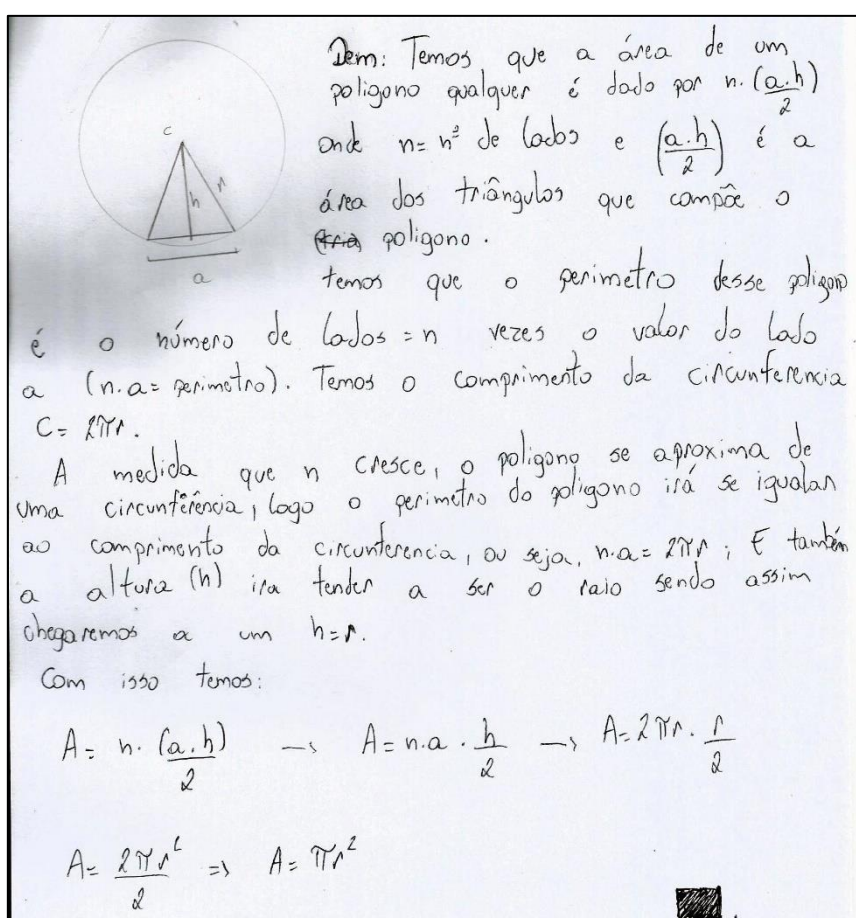
Nota-se que três grupos conseguiram chegar a πr^2 utilizando a ideia da exaustão, um grupo não deixou descrito na folha de resolução, e os demais, apesar de entenderem a ideia do Método, não conseguiram chegar a generalização para a área, no G8, um dos integrantes, já no final do áudio – quando faltava pouco tempo para entregarem - comenta sobre esse fato com os colegas:

Integrante: - É que tipo, eu não sei que conta usar, tá ligado? Eu só sei que tipo... escrever que ... conforme vai aumentando “n”, ele vai se aproximando da área do... vai aumentando a área do polígono inscrito e vai se aproximando da área do círculo.

No momento da plenária, não foi possível que todos os grupos compartilhassem sua resolução, pois senão a professora não iria conseguir formalizar o problema até o final da aula. Assim, apesar de mais grupos estarem dispostos a apresentar suas resoluções, apenas dois (G2 e G10) foram à frente da turma explicar como chegaram a fórmula da área.

O G10 não demonstrou explicitamente como chegariam a πr^2 , mas através de um desenho e explicações falaram como seria sua ideia, o que o G2 já conseguiu expressar, utilizando fórmula de área e perímetro de polígonos - colocaram algumas dessas no quadro para ilustrar para a turma. A forma como o G2 entregou a demonstração encontra-se na Figura 36.

Figura 36 - Exemplo de resposta da demonstração da área do Problema 1



Dem: Temos que a área de um polígono qualquer é dado por $n \cdot \frac{a \cdot h}{2}$ onde $n = n^2$ de lados e $\frac{a \cdot h}{2}$ é a área dos triângulos que compõe o ~~polígono~~ polígono.

temos que o perímetro desse polígono é o número de lados = n vezes o valor do lado a ($n \cdot a =$ perímetro). Temos o comprimento da circunferência $C = 2\pi r$.

A medida que n cresce, o polígono se aproxima de uma circunferência, logo o perímetro do polígono irá se igualar ao comprimento da circunferência, ou seja, $n \cdot a = 2\pi r$; E também a altura (h) irá tender a ser o raio sendo assim chegaremos a um $h = r$.

Com isso temos:

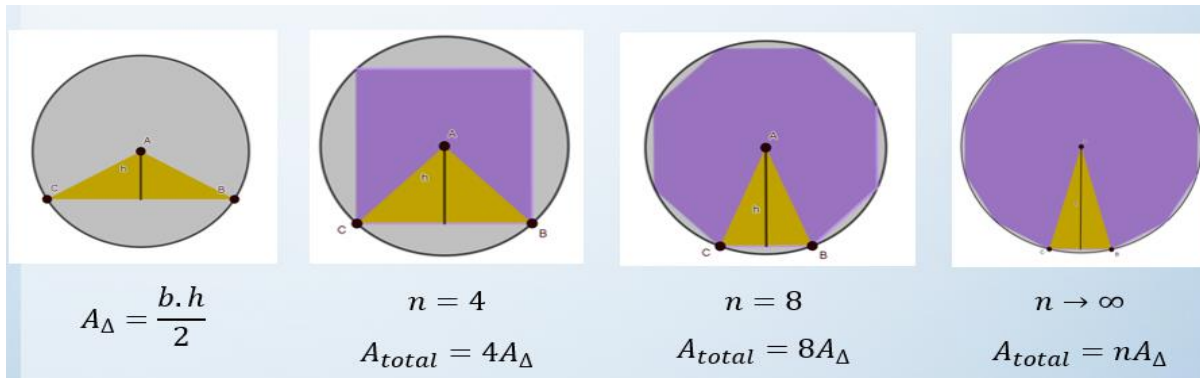
$$A = n \cdot \frac{a \cdot h}{2} \rightarrow A = n \cdot a \cdot \frac{h}{2} \rightarrow A = 2\pi r \cdot \frac{r}{2}$$

$$A = \frac{2\pi r^2}{2} \Rightarrow A = \pi r^2$$

Fonte: Produção dos alunos, 2018.

A partir disso, a professora formalizou o assunto, utilizando slides e a lousa para mostrar uma possível forma de resolução. Nos slides, utilizando imagens, ilustrou como seria a área dos polígonos inscritos, conforme mostra Figura 37.

Figura 37 - Início da formalização do Problema Área do Círculo



Fonte: Produção professora da turma, 2018.

E então, falou sobre a noção de limite e também a apresentou, dizendo que se o número de lados no polígono era denotado por n , e a função que definiu a área do polígono era $f(n)$, e se a área do círculo que encerra o polígono era denotada por A , então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$$

Nesse caso,

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot A_t = \frac{n \cdot b \cdot h}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$$

Vemos que a demonstração feita pelo G2 e pela professora são semelhantes, no entanto, os grupos não utilizaram a notação do limite. Mesmo assim, percebe-se que eles já tinham entendido sua noção antes mesmo de vê-la.

A professora nessa aula também comentou sobre limites de algumas sucessões numéricas, explicando o significado e a notação de “tender”.

Com esse problema, os alunos exploraram o Método da Exaustão e conjecturaram formas para provar a área de um círculo, conseqüentemente, foi apresentado a turma a noção do limite e sua representação simbólica. Segundo pesquisadores da RP:

Trabalhar na perspectiva da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, em qualquer nível de escolaridade, dá oportunidade ao aluno de explorar, investigar, manipular, conjecturar, falar, escrever, analisar, experimentar, refletir, abstrair, argumentar e generalizar acarretando, então, a mobilização de um conjunto de conhecimentos que possibilitarão a produção de outros. (NUNES; NOGUTI; ALLEVATO, 2014, p. 110).

Nesse viés, a partir dessa inicial apresentação do limite, foi proposto o segundo problema, com a intenção de mobilizar a produção de outros conhecimentos do conteúdo de limites – sua ideia intuitiva e o cálculo de limites laterais.

7.2 SITUAÇÃO-PROBLEMA 2: IDEIA INTUITIVA DE LIMITE

A aplicação do segundo problema ocorreu em um dos laboratórios de informática da Udesc. Estavam presentes neste dia vinte e cinco alunos, que se reuniram em onze grupos - nem todos foram os mesmos da primeira situação-problema. Assim, os nomeamos como G1, G2, ... , G11. A gravação de áudio foi realizada nos grupos G1, G3, G5 e G8.

7.2.1 Apresentação da situação-problema

Esta situação-problema (Apêndice I) tinha como intuito que os alunos identificassem a ideia de limite em problemas comuns, verificassem o que acontecia com as funções quando são atribuídos valores à esquerda e à direita de um número, e visualizassem graficamente o que acontecia com as funções. Desse modo, desenvolvendo a ideia intuitiva de limite e de limites laterais.

O problema consistia em duas partes de desenvolvimento, apresentado no Quadro 28.

Quadro 28 - Ensino Superior – Problema 2

Parte 1:

Uma bola que é colocada no chão e chutada para o alto, percorre uma trajetória descrita por $h(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 6t$ ($t \geq 0$), onde t é o tempo medido em segundos e $h(t)$ é a altura em metros da bola no instante t . Responda:

- Quanto tempo a bola leva para voltar ao solo?
- O que acontece quando o tempo se aproxima de 4 segundos?
- Qual é a altura máxima que a bola atinge?
- Qual o valor de L na expressão: $L = \lim_{t \rightarrow 4} h(t)$?

Parte 2:

Considere a função $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$.

- O que acontece com os valores de f quando x está próximo de valores à esquerda de 4?
- O que acontece com os valores de f quando x está próximo de valores à direita de 4?
- Desenhe o gráfico da função $f(x)$.
- Qual o valor de $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$?

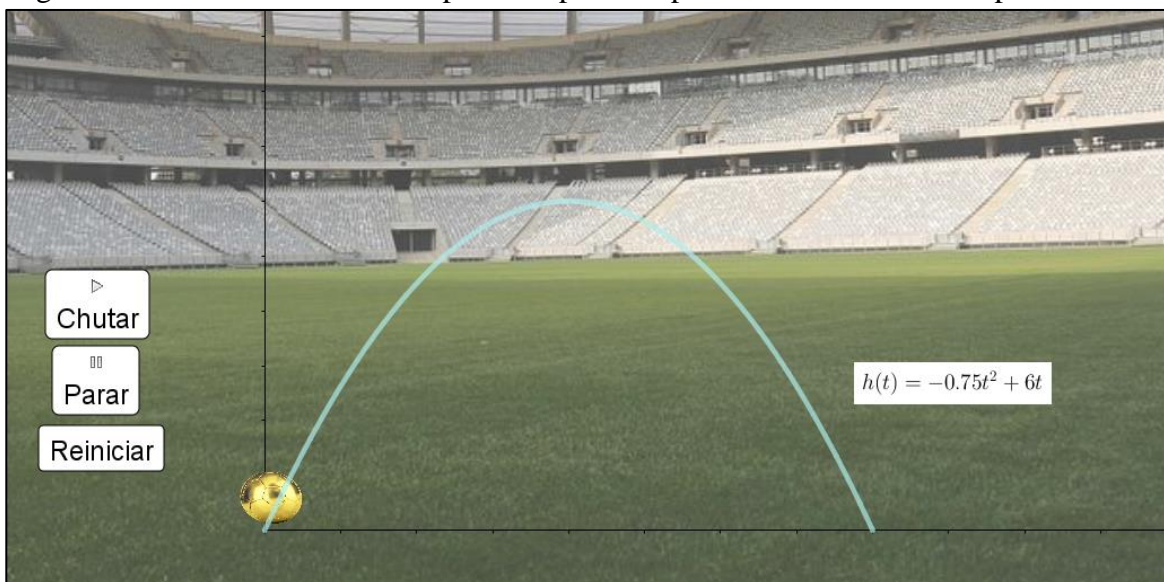
Fonte: Produção própria.

7.2.2 Desenvolvimento da situação-problema

Antes de apresentar o segundo problema à turma, a professora levou para os alunos verem suas notas e a correção da primeira prova da disciplina. Enquanto isso, os alunos iam

ligando os computadores do laboratório e abrindo o aplicativo no GeoGebra que seria utilizado na resolução da primeira parte do problema. Este aplicativo foi enviado pela professora para o e-mail de cada aluno, seu layout pode ser observado na Figura 38.

Figura 38 - Tela do GeoGebra da primeira parte do problema 2 no Ensino Superior



Fonte: Produção própria.

Através dos botões “chutar”, “parar” e “reiniciar” do aplicativo²⁸, os alunos poderiam visualizar o comportamento da função que estava na primeira parte da situação-problema.

Então, foi entregue uma folha para cada aluno com o problema para leitura individual, e logo após, eles já se organizaram em grupos para resolvê-lo. Quase todos os alunos ficaram em um computador para manipular o aplicativo, conforme mostra Figura 39.

Figura 39 - Alunos no laboratório resolvendo Problema 2



Fonte: Arquivo pessoal.

²⁸ Disponível em: < <https://www.geogebra.org/m/fZyuzpmx#material/amQH8ufk>>. Acesso em: 15 ago. 2018.

7.2.3 A Metodologia de ensino através da RP em prática e análise dos dados coletados

A primeira parte do problema, trazia uma função de segundo grau em um contexto de chute de uma bola, e na primeira questão os alunos teriam que responder utilizando a função, quantos segundos após o chute a bola retornaria ao solo. As respostas dadas estão categorizadas no Quadro 29.

Quadro 29 - Respostas dos grupos na letra *a*, da parte 1 do problema 2

Grupos	Categoria
G1, G2, G3, G4, G7, G8, G9, G11	Indicaram sua resposta como sendo 8 segundos.
G5, G6, G10	Não indicaram qual a resposta.

Fonte: Dados da pesquisa.

Os grupos que encontraram 8 segundos, chegaram a essa resposta utilizando a fórmula de Bhaskara e também determinando os zeros da função por fatoração. Dos grupos que não indicaram a resposta, dois deixaram na questão escrito $t_1 = 0$ e $t_2 = 8$, mas não explicitaram qual seria o tempo escolhido, nem qual seria a unidade de tempo, o outro grupo, G10, encontrou $t_1 = 0$ e $t_2 = 3$, também não indicou qual resposta escolhida, nesse caso, na resolução o grupo esqueceu do denominador 4 que estava na fração da função.

Nessa primeira parte do problema, os alunos solicitaram poucas vezes auxílio para resolução, o que alguns grupos perguntaram foi a respeito do aplicativo, eles estavam com dúvidas nos eixos, como não estavam aparecendo os números, mas estavam com marcações, queriam saber a sua escala, por exemplo o G3 inicialmente encontrou pelo gráfico o valor da resposta da letra *a*, mas perguntaram para a professora a esse respeito, conforme diálogo a seguir:

Integrante 1: - O tempo não é 8?

Integrante 2: - Por que?

Integrante 1: - Porque aqui é o tempo, e aqui altura. Então quando ela chegar aqui na altura máxima o tempo vai ser esse aqui, e quando ela tiver no chão de novo vai ser esse.

Integrante 2: - Tá, mas da donde tu tirou 8?

Integrante 1: - 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Integrante 3: - Deixa eu fazer uma "question"...

Integrante 2: - Não, eu acho que não, acho que esse aí é só o deslocamento, né

Integrante 1: - Não, é o tempo.

Integrante 3: - Ah, eu não tinha visto isso aqui ... gente ... amiga tem um “t” aqui ó, não tinha visto ...

Integrante 3: - Prof., a gente tem que mostrar o cálculo ou olha pelo gráfico ...

Integrante 2: - Tipo aqui a gente sabe que tem 8 segundos.

Professora: - Colocar a conta também.

Integrante 2: - A gente põe o 8 e a conta.

Professora: - Isso.

Assim, o grupo, encontrou as raízes da função e conseqüentemente o valor de 8 segundos.

Na questão *b*, era para os grupos analisarem o que acontecia quando o tempo se aproximava de quatro segundos, a categorização das respostas, encontra-se no Quadro 30.

Quadro 30 - Respostas dos grupos na letra *b*, da parte 1 do problema 2

Grupos	Categoria	Estratégias
G1, G2, G4, G6, G7	Altura se aproxima de 12.	Substituíram apenas o número 4 na função (G1, G2, G6); Substituíram número 3 e 4 na função (G3); Apenas escreveram a resposta (G7).
G3, G5, G9, G11	Atinge altura máxima.	Substituíram apenas o número 4 na função (G3); Substituíram apenas o número 3 na função (G11); Apenas escreveram a resposta (G5, G9).
G8, G10	Não indicaram uma resposta.	Substituíram apenas o número 4 na função (G8); Substituíram apenas o número 3 na função (G11).

Fonte: Dados da pesquisa.

Nessa questão, percebe-se que praticamente todos os grupos utilizaram como estratégia a substituição dos números 3 ou 4 na função. Assim, os que utilizaram apenas o 4 não compreenderam inicialmente o significado de “aproxima-se”, ao mesmo tempo, alguns grupos mesmo substituindo o 4, colocaram em sua resposta que quando o tempo se aproximava de 4 segundos, a altura da função se *aproximava* de 12 metros. No entanto, outras equipes indicaram que a bola *atingiria* sua altura máxima se o tempo se *aproximasse* de 4.

Para encontrar a altura máxima (questão *c*) o G3 estava novamente analisando pelo gráfico, estavam achando que assim como na letra *a*, somente pela escala iriam encontrar a resposta, então chamam a professora para perguntar:

Integrante 2: - Prof.

Professora: - Oi.

Integrante 2: - Aqui .. a gente ... a altura máxima seria o y vértice né?

Professora: - Perfeito.

Integrante 3: - A gente viu o gráfico para fazer ...

Professora: - Mas o gráfico ...

Integrante 3: - Aqui não é um para um ...

Professora: - Não, ali não aparece qual é a escala

Integrante 3: - É que aqui deu certinho, sabe? Deu 8 aqui e deu 8 na conta. Aqui teoricamente iria dar 6.

Integrante 1: - Tu pode pôr a metade do tempo que tu achou na questão a...

Professora: - Isso

Integrante 1: - Porque aí ele vai estar no meio.

Professora: - Seria 4 até aqui e 4 até aqui.

Integrante 1: - Sim

Integrante 2: - Daí da 12.

Integrante 1: - Sim

Professora: - Aqui está numa escala de 2 para 1.

Integrante 1: - Pode ser, faz sentido.

Dessa forma, a professora comentou com a pesquisadora a esse respeito, por isso, falamos para os alunos, que deveriam fazer os cálculos para conferirem suas respostas e não analisarem apenas pelos eixos do gráfico. Com relação a esse fato, fizemos alterações desse aplicativo para o produto educacional, tirando a escala que estava aparecendo.

Na questão *c*, dez equipes chegaram aos 12 metros, apesar de nem todas indicarem a unidade de medida (G3, G4, G5, G6). O G10, chegou em 2 metros como resposta, o grupo iria encontrar através do y_v a resposta, porém, errou o valor de Δ durante seu cálculo.

Através da última questão da parte 1, queríamos verificar se os alunos conseguiriam encontrar o valor do limite da função, temos as respostas dadas no Quadro 31.

Quadro 31 - Respostas dos grupos na letra *d*, da parte 1 do problema 2.

Grupos	Categoria
G1, G2, G5, G6, G7, G8, G9, G10, G11	Responderam que L seria igual a 12.
G3, G4	Responderam que L ficaria próximo de 12.

Fonte: Dados da pesquisa.

Nove dos onze grupos conseguiram chegar ao limite como sendo 12 para a função $h(t)$. No G5, observamos o seguinte diálogo dos alunos a respeito dessa questão:

Integrante 1: - Naquela ali, o que a gente vai fazer? A gente vai jogar valores para o "t" ali ... Ali na d.

Integrante 2: - Na d?

Integrante 1: É...

Integrante 2: - Porque aqui é o limite né?

Integrante 1: - Sim, então vai ficar ...

Integrante 2: - Então se o limite aqui está em função de t até 4, então quanto mais perto de 4 está mais perto de 12, então o limite vai ser igual a 12.

Integrante 1: - Sim, tipo se tu vai jogar valores antes de 4 e depois de 4 e vai tender a 12.

Integrante 2: - Isso ... como ele está do t para o 4, ele não vai alcançar o 4, certo? ... Isso que eu pensei, tá ligado?

Integrante 1: - Uhum.

Apenas dois grupos responderam que o limite se aproximava do 12, ou seja, até esse momento não tinham compreendido a ideia que o limite é, e não que se aproxima de um valor. A respeito desse episódio, temos que Cornu (2002) apresentou realmente como um dos obstáculos epistemológicos do conceito do limite, a dúvida se o limite é atingido ou não.

Com relação à parte 2 da situação problema (Quadro 32), não disponibilizamos nenhum aplicativo para resolução, mas os alunos poderiam contar com o auxílio do software se quisessem utilizá-lo. Assim, todos os grupos plotaram a função no GeoGebra.

Quadro 32 - Ensino Superior – Parte 2 do Problema 2

Considere a função $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$.

- O que acontece com os valores de f quando x está próximo de valores à esquerda de 4?
- O que acontece com os valores de f quando x está próximo de valores à direita de 4?
- Desenhe o gráfico da função $f(x)$.
- Qual o valor de $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$?

Fonte: Produção própria.

Como no numerador da função tinha um x^2 , alguns não entendiam porque o software plotava uma reta, outros já perceberam que era possível manipular e simplificar a função.

Na primeira questão da parte 2, queríamos que os alunos respondessem o que acontecia com a função quando x se aproximava pela esquerda do número 4. Apareceram quatro respostas diferentes nessa questão, ilustradas no Quadro 33.

Quadro 33 - Respostas dos grupos na letra a, da parte 2 do problema 2

Grupos	Categoria
G1, G2, G4, G5, G8, G9, G11	Responderam que $f(x)$ se aproximava de 8.
G6, G7	Responderam que os valores ficavam menores que 8.
G3	Responderam que se aproximava de zero.
G10	Colocaram que $f(x) = 7$.

Fonte: Dados da pesquisa.

Alguns grupos, nas folhas de resolução mostraram quais números usaram para substituir na função, um deles, o G11, até mesmo montou uma tabela, na Figura 40 tem-se esse caso.

Figura 40 - Resposta de um grupo na questão *a*, da parte 1 do problema 2

a) O que acontece com os valores de f quando x está próximo de valores à esquerda de 4?

x	3	3,5	3,75	3,9	3,99	R. Se aproximam de 8
$f(x)$	7	7,5	7,75	7,9	7,99	

Fonte: Produção dos alunos, 2018.

Semelhante a questão *a*, na letra *b* queríamos que os alunos respondessem o que acontecia com a função quando x se aproximava pela direita do número 4. A maioria dos alunos seguiu o mesmo raciocínio da primeira questão, apenas G4 e G11 mudaram um pouco sua resposta, conforme Quadro 34.

Quadro 34 - Respostas dos grupos na letra *b*, da parte 2 do problema 2

Grupos	Categoria
G1, G2, G5, G8, G9	Responderam que $f(x)$ se aproximava de 8.
G4, G6, G7	Responderam que os valores ficavam maiores que 8.
G3	Responderam que se aproximava de zero.
G10, G11	Colocaram como resposta 8,1.

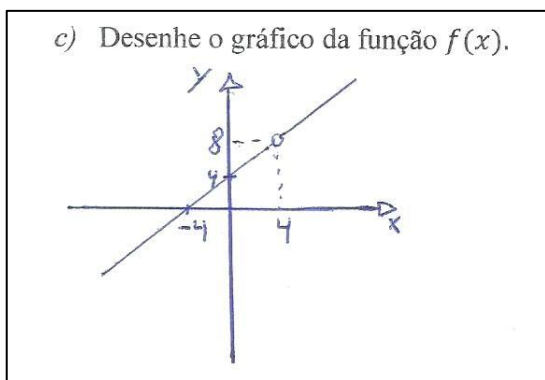
Fonte: Dados da pesquisa.

Diferente do que apresentaram na Figura 40, o G11 na questão *b*, não montou uma tabela, apenas atribuiu o valor de 4,1 na função.

Nessa segunda parte, os alunos já não cometeram o erro da primeira parte, nenhum disse que a função *atingiria* o número oito. E, apesar de nem todos descreverem que $f(x)$ se aproximava de 8, de certa forma, perceberam que isso estava ocorrendo. Apenas o G3 divergiu das respostas dos demais, afirmando que tanto pela esquerda quanto pela direita a função se aproximava de zero.

Na letra *c*, pedíamos para os alunos desenharem o gráfico da função, todos desenharam uma reta, porém, apenas G1 e G2 apresentaram a descontinuidade em (4,8), ilustrado na Figura 41.

Figura 41 - Resposta dada pelo G2 na questão c, da parte 2 do Problema 2



Fonte: Produção dos alunos, 2018.

Os demais grupos não representaram a descontinuidade que havia no gráfico, inferimos que isso ocorreu porque alguns não desenharam o gráfico com uma escala tão grande, ilustrando esse fato, temos o G5 que na folha entregue que não apresentou a descontinuidade da função, porém, discutiram sobre isso durante a resolução:

Integrante 2: - Olha só ... achei que era uma parábola.

Integrante 3: - Eu também achei cara.

Integrante 2: - Sabe por que que é? Por que ele está a simplificação que eu fiz ó ... vai dar $x+4$, porque eu não posso calcular o limite dela inteira ali... Sabe porque não posso calcular o limite? Porque nesse modo aqui ele vai zerar, vai dar zero aqui ... Então eu tenho que reescrever ela no modo que não de zero, então isso vira um produto notável de $x^2 - 4^2$, daí eu vou abrir isso em $x + 4$ e $x - 4$ sobre $x - 4$, aí vou cortar isso com isso e o resultado vai ser $x + 4$.

Integrante 3: - Certo

Integrante 2: - Aí vai dar a reta ali.

Integrante 3: - Está certo, daí ...

Integrante 2: - Quando x tender a 4 vai dar zero então? Sei lá ... sei que limites tem que desmodificar a parada, tá ligado?

Integrante 3: - Só que daí vai ser bolinha aberta e aqui fechada, entendeu? Porque o x tem que ser diferente de 4.

Outro fator de poucos grupos representarem a descontinuidade nos registros escritos, pode estar relacionado ao GeoGebra, já que os alunos estavam se baseando no software para responder as questões, e ele não representa graficamente um ponto que não está no domínio da função pela representação gráfica de “uma bola aberta” que é uma notação usual de um ponto não pertencente ao domínio de uma função. Dessa forma, percebemos a crença fiel dos alunos com relação ao que era exibido na tela do computador.

Para finalizar, na questão *d* (Quadro 32), os alunos teriam que responder qual o limite da função quando x tendia à 4, lembrando que nesse caso, ela não estava definida para tal ponto. O fato do 4 não pertencer ao domínio da função estava gerando discussões entre os alunos, através da gravação de áudio, percebemos que o G5 discutiu por um tempo sobre isso, e resolveram chamar a pesquisadora com a intenção de verificar sua resposta, a seguir temos essa conversa:

Integrante 2: - Professora, a gente chegou na resolução de $x+4$, mas a gente não consegue responder qual que é o limite de quando x tende a 4... Porque dá uma reta.

Integrante 1: - É, como tem na “a” e na “b” aqui, todos os x 's da esquerda de 4 estão chegando em 8, e todos à direita de 4 eles tão ... próximos a direita de 4, no caso, estão perto de 8, eles não alcançam o 8, então o limite seria o 8?

Pesquisadora: Bom, isso agora vocês vão precisar responder, daqui a pouco a gente vai discutir.

Integrante 1: - Porque o meu x aqui não pode ser igual a 4, porque não pode dar 8.

Pesquisadora: Na função.

Integrante 1: - Isso.

Pesquisadora: Na função ele não é definido ... Não pertence ao domínio da função.

Integrante 3: - Mas daí o limite?

Pesquisadora: - O que vocês acham? Coloquem o que vocês acham.

Integrante 2: - É porque na divisão aqui, a condição de existência é 4, x diferente de 4. No caso vai dar zero, daria uma indefinição.

Pesquisadora: O que vocês acham?

Integrante 3: - Vamos ter que pensar.

O grupo estava querendo que a pesquisadora afirmasse para eles que o limite era 8, mas isso não foi feito, pois como afirmam Pironel e Vallilo (2017, p. 293) “(...) o professor tem que manter, tanto quanto possível, uma aparente neutralidade intelectual para que sejam evitadas respostas diretas às questões dos estudantes.” Assim, o grupo continuou no empasse se o limite seria ou não 8. Mais adiante, a pesquisadora retorna ao grupo:

Pesquisadora: E aí, qual conclusão que vocês chegaram?

Integrante 1: - Que provavelmente o limite vai ser 8. Porque como a gente tem que chegar a valores próximos de 4 na “a”... e a mesma coisa para a “b”, que daí como a função é $x+4$ se a gente simplificar, se a gente colocar o x igual a 4 vai dar 8. Bom, pode dar 8, mas ele vai alcançar o 8, entendeu?

Apesar de discutirem que o limite teria realmente o valor de oito, na folha de resolução, o G5 acabou optando por não colocar isso, deixaram como resposta a simplificação da função, “ $x + 4$ ”. Essa e a classificação das respostas dos demais grupos estão no Quadro 35.

Quadro 35 - Respostas dos grupos na letra *d*, da parte 2 do problema 2

Grupos	Categoria
G1, G2, G7, G8, G11	Responderam que o limite era igual a 8.
G4, G6	Responderam que o limite tendia a 8.
G3, G10	Responderam que o limite era zero.
G5	Colocaram como resposta $x+4$.
G9	Colocaram como resposta 7,9.

Fonte: Dados da pesquisa.

O objetivo na questão *d* era que os alunos percebessem que no cálculo do limite, a função não precisa estar definida no ponto, basta que tanto pela esquerda como pela direita de tal ponto ela convirja para o mesmo valor, cinco grupos responderam dessa forma, afirmando que o limite era 8. Dois grupos apesar de chegarem ao 8 escreveram que o limite tendia para esse valor, semelhante o que a G9 fez, colocando que o limite seria 7,9. Em referência a isso, Sierpinska (1985) fala sobre o *obstáculo do símbolo* “lim”, segundo a autora, a utilização do símbolo da operação de passagem ao limite, ocasiona aos alunos dificuldades em perceber que o limite é e a função se aproxima, o que acontece é que em geral leem o limite se aproxima.

Na questão *d* o G3 seguiu o mesmo raciocínio que tinha usado nas questões *a* e *b*, e disse que o limite era zero, isso pode ter ocorrido pelo fato da equipe ver que substituindo o número 4 na função, obteriam $f(x) = \frac{0}{0}$ - o que o G10 também pode ter analisado. Já o G5 conseguiu simplificar a função, porém, como analisado na gravação, na folha entregue resolveram não substituir o 4 nela para chegar ao 8. Pela gravação também, percebemos que por um momento um dos integrantes do G3 até pensou que as respostas que colocaram na parte 2 poderiam estar erradas:

Integrante 1: - Acho que eu falei “m” na questão “a” da 2.

Integrante 2: - Por quê?

Integrante 1: - Faz sentido o que eu falei pra ti? ... Essa calculadora tá retardada ...

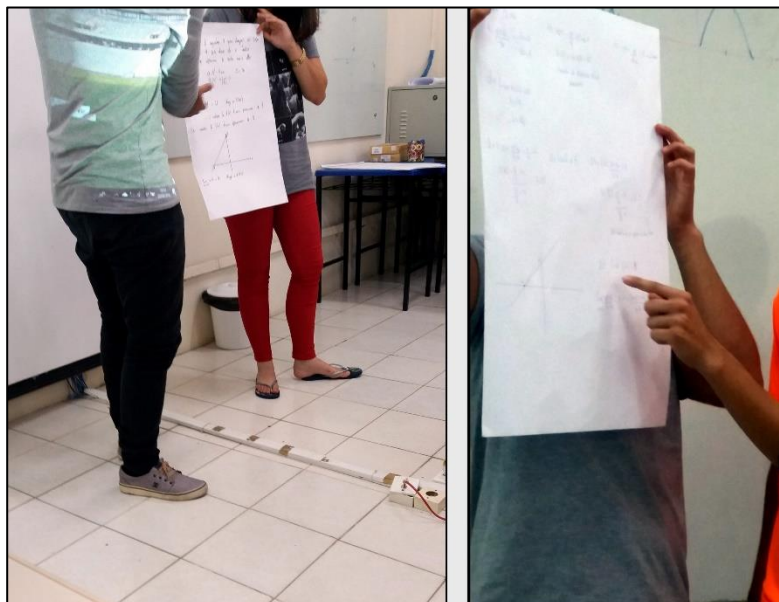
Risos

No entanto, os demais integrantes não deram muita atenção para esse fato, e não voltaram a verificar o que tinham feito.

Pudemos identificar a dificuldade da parte 1 para parte 2 demonstrada pelos alunos, pois o fato de a função da parte 2 não estar definida no ponto que estavam ocorrendo as análises, gerou dúvidas e questionamentos por parte dos alunos.

Para a plenária, nessa aula, já foi observado que os alunos não estavam tão dispostos a participarem como na aula anterior, e também como não daria tempo de todos os grupos esporem suas ideias, apenas dois grupos foram a frente explicar como resolveram as duas partes do problema, ilustrado na Figura 42.

Figura 42 - Grupos na plenária do Problema 2

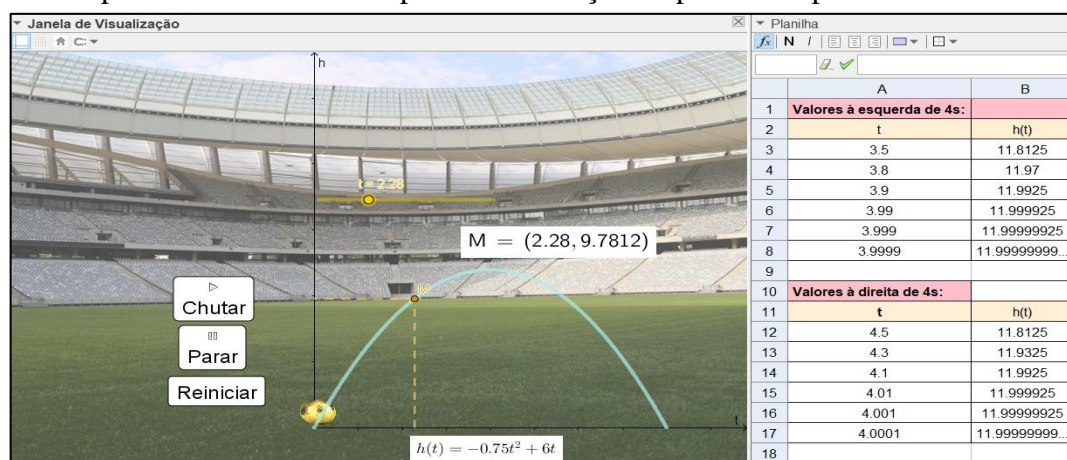


Fonte: Arquivo pessoal.

Esses dois grupos tinham finalizado um pouco antes o problema que os outros grupos, então pedimos que eles passassem suas respostas em uma folha A2 para facilitar a discussão.

Após a plenária, a professora resolveu todas as questões no quadro e utilizou outros dois aplicativos²⁹ desenvolvidos com a intenção de contribuir para a formalização - Figura 43 e Figura 44 - esses que estavam sendo projetados para a turma.

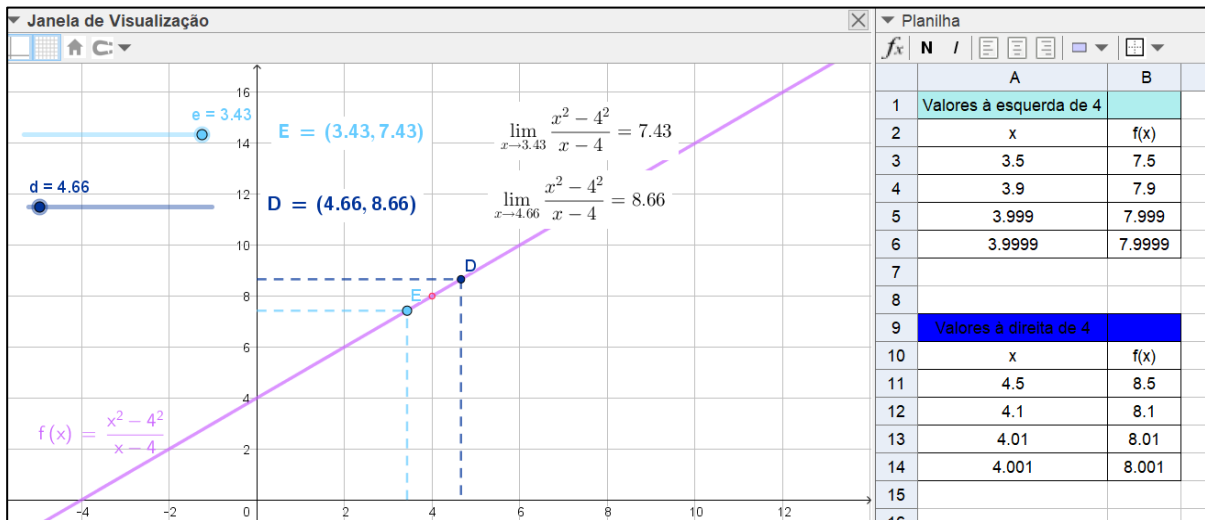
Figura 43 - Aplicativo desenvolvido para formalização da parte 1 do problema 2



Fonte: Produção própria.

²⁹ Disponível em: < <https://www.geogebra.org/m/fZyuzpmx#material/vKGBsj5S>>. Acesso em: 15 ago. 2018.

Figura 44 - Aplicativo desenvolvido para formalização da parte 2 do problema 2



Fonte: Produção própria.

Através dos controles deslizantes nos aplicativos, era possível mostrar para os alunos qual o valor para a função em dado ponto, bem como, no aplicativo da parte 2, para $x = 4$, o software mostrava um ponto de interrogação (?), indicando que ele não fazia parte do domínio. Desse modo, conforme Kenski (2003) indica,

A informação disponibilizada na tela do computador é flexível, moldável, sujeita a alterações. Ao contrário do espaço de transmissão oral de informações e mesmo do uso sistemático de livro impressos, o uso educacional das tecnologias digitais de informação e comunicação permite a realização de várias atividades, visando ao desenvolvimento de novas habilidades de aprendizagem, atitudes e valores pessoais e sociais. (KENSKI, 2003, p. 6).

A professora, tanto na parte 1 como na parte 2, aproveitou para apresentar aos alunos o que seriam os limites laterais, já que era isso que eles tinham trabalhado intuitivamente, e já passou a definição de cada um.

Então, depois de trabalhar com o problema, aproveitou que os alunos estavam com o GeoGebra e passou mais funções e pediu para eles analisarem seu comportamento em alguns pontos específicos. Em seguida, com apoio do software expressiu no quadro o valor do limite, caso existisse, das funções.

Na aula posterior, antes de ser realizado a aplicação do terceiro problema, a professora continuou trabalhando com limites laterais com a turma, dando exemplos de limites com funções logarítmicas, modulares e com raízes, e também explicou algumas indeterminações.

7.3 SITUAÇÃO-PROBLEMA 3: FATURA DE ENERGIA

No problema 2 foi trabalhado com a ideia intuitiva de limite, analisando o valor das imagens das funções quando “ x ” se aproximava de um ponto fixo. Contudo, somente com a atribuição de valores na função ou com a visualização delas no software, é possível ser induzido a erros. Assim, é necessário de mais argumentos para afirmar o valor do limite e também para prová-lo. Dessa forma é motivada a definição formal para o limite, o que foi feito com a situação-problema 3 intitulada “Fatura de energia”.

A aplicação deste problema também ocorreu em um dos laboratórios de informática da Universidade, mas não no mesmo do problema 2. Estavam presente neste dia vinte e quatro alunos, que se reuniram em dez grupos. A discussão e formalização ocorreu em outro dia, sendo realizadas na sala da turma. A gravação de áudio durante a resolução do problema foi efetuada nos grupos G2, G3, G5 e G7.

7.3.1 Apresentação da situação-problema

Este problema (Apêndice J) tinha como objetivo construir uma relação entre os deltas e epsilons da definição formal de limite, assim como, visualizar graficamente o que acontece com essa relação.

Para isso, foi contextualizado uma situação problema de economia de energia em uma residência, em que os moradores estipularam uma faixa de tolerância na fatura, essa situação encontra-se registrada no Quadro 36.

Quadro 36 - Ensino Superior – Problema 3

Considerando a tarifa convencional de energia de R\$ 0,50 por kwh, uma residência com 4 moradores, tem um gasto mensal de R\$ 200,00, ou seja, consome 400kwh mensais. Os moradores desejam fazer uma economia de 50%. Uma consultoria foi contratada visando diminuir a fatura, e a melhor opção fornecida foi a instalação de painéis solares fotovoltaicos. Os moradores aderiram a esse novo sistema de geração de energia, e desse modo, o valor da nova fatura será dado pela multiplicação valor do kwh da tarifa convencional pela diferença entre a quantidade de consumo mensal de energia convencional e a gerada pelo sistema fotovoltaico. Responda:

- a) Se a fatura de energia elétrica mensal for R\$ 100,00, qual a potência em kwh total que deve ser gerada pelos painéis solares?
- b) Suponha que os moradores tenham uma tolerância de R\$ 20,00 da fatura que desejam pagar, qual a faixa de potência que os painéis solares devem gerar?
- c) Refaça a questão (b), supondo que esses moradores admitam uma tolerância de R\$ 10,00.
- d) Represente graficamente as situações dos itens (a, b, c) e responda: O que acontece com a variação de potência gerada quando a fatura está numa faixa cada vez mais estreita em torno de R\$ 100,00?
- e) Agora, suponha que esses moradores desejem pagar mensalmente, em torno de R\$ 100,00 pela fatura de energia com tolerância muito pequena, que você pode denotar por ϵ . Qual a relação entre a tolerância e a variação em torno de 200kwh? Você pode denotar a variação da potência por δ .

Fonte: Produção própria.

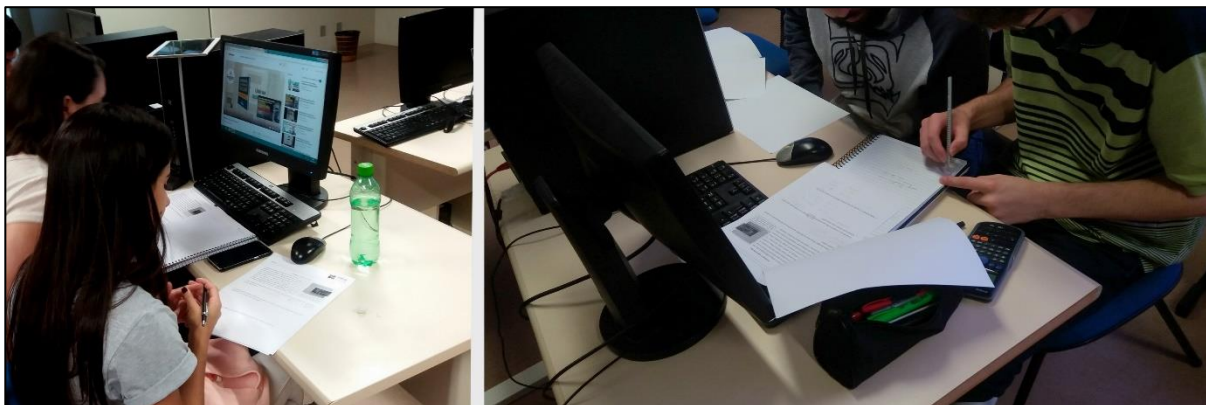
7.3.2 Desenvolvimento da situação-problema

Antes de entregar para a turma o terceiro problema, a professora deu uma breve explicação sobre o medidor bidirecional – aparelho que fazia parte da situação-problema. Para isso, ela também indicou um vídeo³⁰ para os alunos assistirem que falava como o aparelho funcionava. Esse vídeo a pesquisadora já tinha deixado como sugestão quando enviou o produto educacional para a professora.

Os alunos assistiram o vídeo já com seus grupos, simultaneamente, foi entregue o problema para eles realizarem a leitura e posterior resolução, na Figura 45 temos grupos trabalhando no problema.

³⁰ Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=AkLu1E_03cU>. Acesso em: 26 mar. 2018.

Figura 45 - Grupos trabalhando na resolução do problema 3



Fonte: Arquivo pessoal.

7.3.3 A Metodologia de ensino através da RP em prática e análise dos dados coletados

Para encontrar a potência solicitada na questão *a*, os grupos ou montaram a lei de formação da função do problema ou utilizaram regra de três ou raciocínio lógico. Apenas o G9 não chegou no valor de 200 kwh , que era a resposta correta.

As perguntas iniciais dos alunos foram sobre o que deveriam considerar como tolerância, nas questões *b* e *c*, aí era questionado sobre o que eles entendiam - alguns falavam que era apenas a mais que R\$ 100,00, outros já diziam que deveriam considerar valores maiores e menores R\$ 100,00 conforme o que era solicitado. Para os grupos que inicialmente pensavam que só deveriam considerar valores maiores, era falado um pouco mais sobre o que seria a tolerância. Ainda assim, dois grupos não consideraram valores menores que 100, conforme categorização nos Quadros 37 e 38.

Quadro 37 - Respostas dos grupos na letra *b*, do problema 3

Grupos	Categoria
G2, G3, G4, G5, G6, G7, G9, G10	Consideraram a tolerância e chegaram nos valores de 160kwh e 240kwh.
G1	Consideraram valor apenas maior para a fatura chegando a 160kwh.
G8	Utilizou outro raciocínio e chegou no valor de 399,9.

Fonte: Dados da pesquisa.

Quadro 38 - Respostas dos grupos na letra *c*, do problema 3

Grupos	Categoria
G2, G3, G4, G5, G6, G7, G9, G10	Consideraram a tolerância e chegaram nos valores de 180kwh e 220kwh.
G1	Consideraram valor apenas maior para a fatura chegando a 180kwh.
G8	Utilizou outro raciocínio e chegou no valor de 399,9.

Fonte: Dados da pesquisa.

Apesar de oito grupos encontrarem os valores extremos para a potência desejada, apenas três (G4, G5, G6) escreveram na folha qual seria realmente a faixa de potência desejada, conforme exemplo da Figura 46.

Figura 46 - Resposta de um grupo para questões b e c do problema 3

b) Suponha que os moradores tenham uma tolerância de R\$ 20,00 da fatura que desejam pagar, qual a faixa de potência que os painéis solares devem gerar?

(-20) $(+20)$ a faixa de potência será de

$$80 = 0,5(400 - x)$$

$$120 = 0,5(400 - x)$$

$$160 = 400 - x$$

$$240 = 400 - x$$

$$x = 240 \text{ KWh}$$

$$x = 160 \text{ KWh}$$

160 - 240 KWh

c) Refaça a questão (b), supondo que esses moradores admitam uma tolerância de R\$ 10,00.

(-10) $(+10)$ a faixa de potência será de

$$90 = 0,5(400 - x)$$

$$110 = 0,5(400 - x)$$

$$180 = 400 - x$$

$$220 = 400 - x$$

$$x = 220 \text{ KWh}$$

$$x = 180 \text{ KWh}$$

180 - 220 KWh

G4

Fonte: Produção dos alunos, 2018.

Percebemos que os grupos que não montaram a função, tiveram dificuldades para responder as questões d e e, pois chamavam a professora e a pesquisadora para tirar dúvidas. Ao mesmo tempo, os grupos que tinham montado a função também estavam com dúvidas, tanto que temos o seguinte diálogo do grupo G2 com a professora:

Integrante 1: - Está certo o gráfico, ele vai ficar uma assíntota?

Professora: - O que você fez aqui? O que é isso aqui?

Integrante 1: - É quando o valor mensal for 100.

Professora: - Tá ... não ... mas o que é isso, aqui?

Integrante 1: - É 100 reais para o valor mensal, daí é 0,5 para ... menos 400 para ...

Professora: - Tá, mas em termos de funções, das funções que a gente já estudou.

Integrante 1: - É o limite.

Professora: - Não, das funções, lembra lá das funções que a gente estudou, que tipo de função é essa aqui?

Integrante 1: - Uma função de primeiro grau.

Professora: - Sim, e como que é o gráfico de uma função de primeiro grau?

Integrante 1: - Uma reta

Integrante 2: - Então vai ficar só uma reta assim ó.

Professora: - Não precisa complicar.

Integrante 1: - É que a gente sempre pensa no mais difícil.

Professora: - É só uma reta, aí não vai vim aqui para baixo porque não tem gasto negativo, e para cá também não tem nada porque não tem potência negativa.

Percebe-se que a princípio o grupo estava achando que o gráfico seria algo bem mais complicado, mas a professora mostrou que era apenas para plotarem o que já tinham construído, a respeito desse evento, temos que “ao observar as inquietações e estratégias dos alunos sobre o problema gerador, o professor pode propor questões que conduzam o aluno a produzir significados relacionados ao conteúdo a ser abordado.” (PIRONEL; VALLILO, 2017, p. 294).

Apesar do auxílio da professora, o grupo G2 ainda acabou construindo um gráfico trocando o eixo da abscissa pela ordenada. A categorização dos gráficos feitos na letra *d* foi um pouco mais difícil, pois apareceram vários modelos - um diferente do outro – mesmo assim, dividimos as respostas nas categorias apresentadas no Quadro 39.

Quadro 39 - Respostas dos grupos da representação gráfica da letra *d*, do problema 3

Grupos	Categoria	Subcategoria
G1, G2, G4, G5, G6, G7, G9	Construíram o gráfico de uma função linear.	Consideraram o eixo das abscissas como sendo a potência e das abscissas como sendo o valor da fatura (G1, G4, G6); Consideraram o eixo das abscissas como sendo o da potência e das abscissas como sendo o valor da potência (G2, G7); Apesar de apresentarem uma função linear, não souberam representar corretamente os pontos encontrados nas questões anteriores (G5, G9).
G10	Construíram o gráfico de uma função afim	Desenharam a função dada por $f(x) = 0,5x$.
G3	Não conseguiram traçar uma função linear.	Marcaram corretamente os pontos encontrados nas questões anteriores, mas não fizeram os eixos com escala, assim, desenharam outros tipos de funções.
G8	Construíram uma reta passando por 400 no eixo das abscissas.	Esse grupo não tinha encontrado os valores corretos nas questões anteriores.

Fonte: Dados da pesquisa.

Cinco grupos conseguiram marcar corretamente os pontos e desenhar a reta passando por eles, os demais não, o que foi inusitado, já que apenas o G8 não tinha encontrado os valores corretos nas questões *a*, *b* e *c*.

Além de representar graficamente, na letra *d*, os alunos deveriam responder o que acontecia com a variação da potência gerada, quando a fatura estava numa faixa cada vez mais estreita em torno dos R\$100,00. A classificação das respostas está no Quadro 40.

Quadro 40 - Respostas dos grupos na letra *d*, do problema 3

Grupos	Categoria
G1, G4, G5	Responderam que quanto mais estreita em torno do R\$100,00 mais perto ficava de 200kwh.
G3	Responderam que a fatura ia reduzindo e aumentando 2kwh.
G7	Responderam que a fatura ia tender a zero – quanto mais produz energia, menos iria pagar.
G8	Responderam que quanto mais estreita em torno do R\$100,00 mais perto ficava de 400kwh.
G2, G6, G9, G10	Não responderam.

Fonte: Dados da pesquisa.

Apenas G1, G4 e G5 realmente conseguiram interpretar corretamente através dos dados das questões anteriores. O G8, apesar de entender a questão, não encontrou a variação correta para a potência.

A questão *e* foi em que tiveram mais solicitações para tirar dúvidas, assim, era explicado o que eram as letras ε (épsilon) e δ (delta), já que alguns ainda não tinham conhecimento das mesmas; e falado para os alunos verificarem o que acontecia nas questões *b* e *c* - qual era relação entre o valor da fatura e da potência, e que nessas questões tínhamos um valor dado, e, agora na questão *e*, a intenção era generalizar esse resultado. Onuchic e Allevato (2011) dizem que é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador, ademais,

Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 84).

Quatro grupos conseguiram encontrar uma relação entre δ e ε , outros descreveram o que entenderam, e dois grupos deixaram em branco, conforme categorização no Quadro 41.

Quadro 41 - Respostas dos grupos na letra *e*, do problema 3

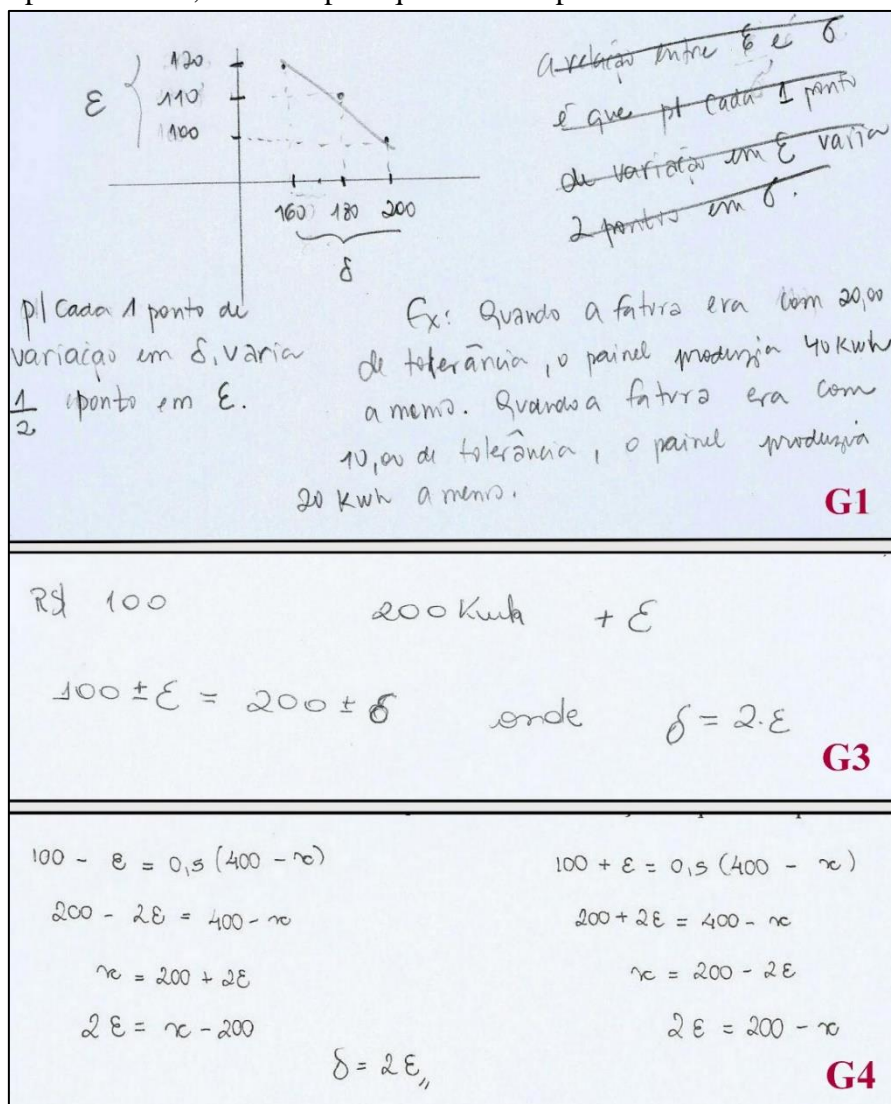
Grupos	Categoria	Subcategoria
G1, G3, G4, G5	Chegaram a uma relação de igualdade para δ e ε .	Chegaram na relação de $\delta = 2\varepsilon$ (G1, G3 e G4); Chegaram na relação de $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ (G5).
G7, G10	Utilizaram texto para responder.	Responderam que quanto maior fosse a potência da energia solar, menor seria o valor da fatura (G2); Responderam que quanto maior fosse a tolerância, maior poderia ser a variação nos 200kwh, e quanto menor a tolerância mais perto de zero estaria a variação (G10).
G2	Utilizaram inequações para responder.	Escreveram que: $\varepsilon > 100 \rightarrow \delta < 200$ e $\varepsilon < 100 \rightarrow \delta > 200$.
G8	Utilizaram equações para responder.	Chegaram na relação $\varepsilon = -7900 - 200g$, esse <i>g</i> representando a potência.
G6, G9	Não responderam.	

Fonte: Dados da pesquisa.

Dos quatro grupos que conseguiram encontrar uma relação entre δ e ε , nenhum utilizou módulo e inequações, como é formalmente utilizado no limite pela definição. Através da interpretação das questões do problema, eles conseguiram identificar essa relação, na Figura 47

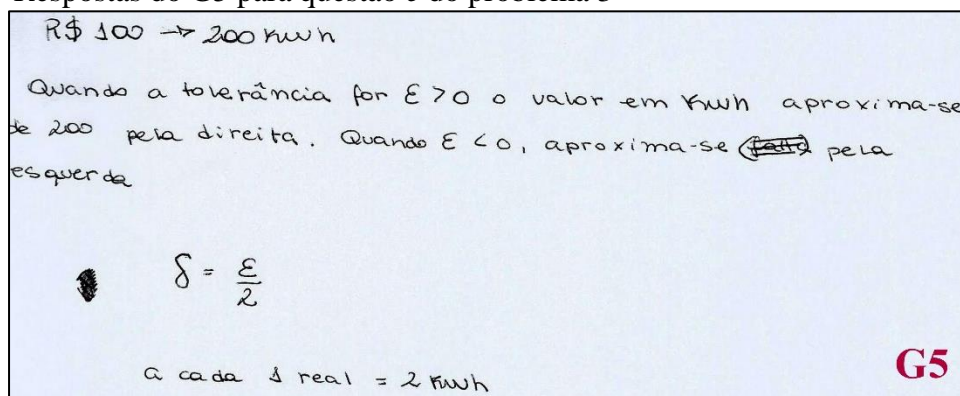
temos como os grupos G1, G3 e G4, que chegaram na relação correta, colocaram sua resposta. E na Figura 48, como o G5 quase chegou na relação correta – apenas inverteu as variáveis.

Figura 47 - Respostas do G1, G3 e G4 para questão e do problema 3



Fonte: Produção dos alunos, 2018.

Figura 48 - Respostas do G5 para questão e do problema 3



Fonte: Produção dos alunos, 2018.

Vemos que esses grupos, de alguma forma tentaram mostrar como chegaram na relação, o G1, por exemplo, utilizou o gráfico para mostrar onde estaria δ e ε . Ainda, esse grupo inicialmente tinha escrito que para cada um ponto de variação em ε o δ iria variar dois pontos, porém, riscaram isso, e rescreveram a frase, dizendo que a variação seria dada a partir de δ . Isso, conforme Sierpiska (1985) pode ser classificado como *obstáculo lógico* no aprendizado de limite, que ocorre pela não diferenciação dos quantificadores ε e δ , pois é necessário fazer considerações no eixo x mediante análise prévia do que ocorre no eixo y, que é o sentido inverso de quando é trabalhado com funções.

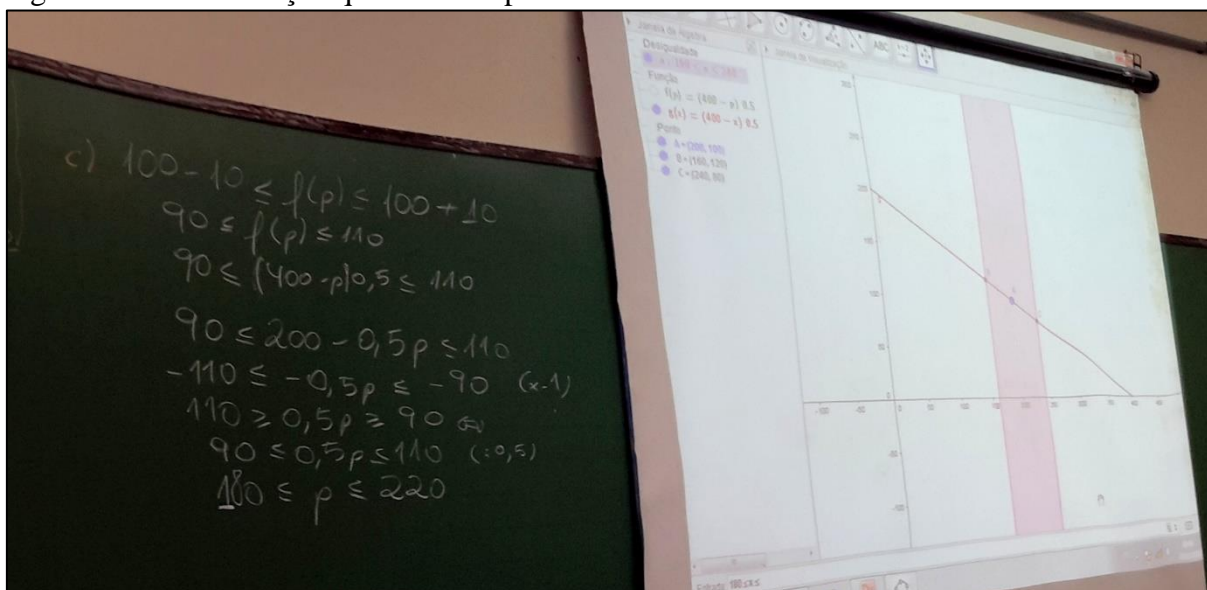
No geral, todos os grupos conseguiram responder as questões, apenas o G8 se confundiu em todas elas, não chegando a nenhuma resposta correta. Apesar de classificarmos como “grupo”, o G8 era composto apenas por um aluno, este que não quis permanecer na equipe que trabalhou nos problemas das aulas anteriores – os colegas o chamaram para ele se juntar novamente, mas ele disse que preferia ficar sozinho.

Apesar de todos os grupos entregarem suas resoluções, não deu tempo de realizar plenária e formalização na mesma aula, pois como já foi descrito, anteriormente a aplicação desse problema, a professora estava trabalhando com limites laterais. Assim, a discussão ficou para a aula posterior.

Na aula seguinte, estavam presentes alguns alunos que não tinham participado da aplicação do problema, para esses foi entregue a folha com o problema, e também, alguns alunos que tinham realizado o problema, não foram nessa aula. Solicitamos voluntários - alunos que tinham realizado o problema - para que fossem a frente comentar sobre o problema e explicar suas ideias e resoluções, nenhum aluno se manifestou, a professora e pesquisadora reforçaram novamente o pedido, porém ninguém se disponibilizou. Temos aqui então, uma dificuldade de os alunos socializarem suas ideias e estratégias de resolução. Desse modo, não foi insistido mais, e a professora iniciou, lembrando sobre o problema e mostrando como as questões poderiam ter sido resolvidas.

Como nas questões *b* e *c*, era para ser respondido o intervalo de potência desejada, a professora explicou para a turma que poderiam ter representado e resolvido utilizando inequações, ela também utilizou o GeoGebra para mostrar a representação gráfica desses intervalos, conforme Figura 49.

Figura 49 - Formalização questão c do problema 3



Fonte: Arquivo pessoal.

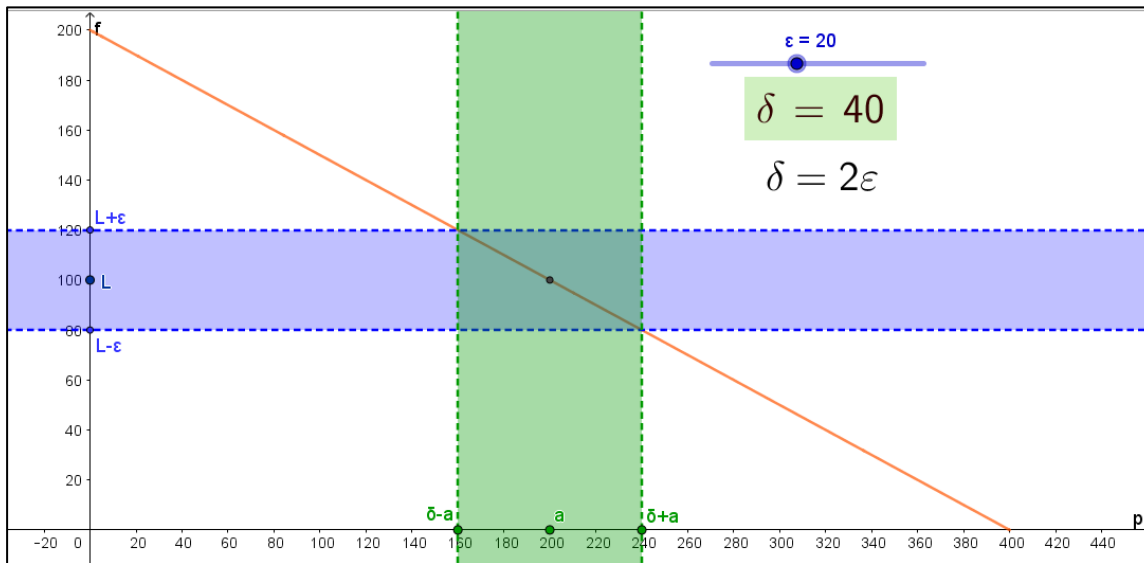
Na questão *d* a professora enfatizou sobre variável dependente e independente nos eixos, já que ela percebeu que alguns alunos estavam trocando durante a resolução do problema. Além disso, foi comentado sobre a delimitação da função, já que não teria fatura ou potência negativa gerada. Esse fato gerou discussão na turma, pois alguns alunos comentaram que poderia ter o crédito gerado para as faturas posteriores, caso a energia gerada pelo sistema fotovoltaico fosse superior a energia consumida naquele mês, por isso, alguns deixaram a função passando pelo eixo negativo.

Por intermédio da questão *e*, a professora construiu a definição formal do limite, inicialmente trabalhando com a variação de δ e ε , e utilizando o aplicativo³¹ (Figura 50) desenvolvido pela pesquisadora para mostrar visualmente essa relação.

Com o aplicativo, era possível movimentar o controle deslizante definido por ε , e automaticamente o software exibia qual seria o valor correspondente para δ , e também mostrava a variação desses intervalos no gráfico da função.

³¹ Disponível em: < <https://www.geogebra.org/m/fZyuzpmx#material/qk7RXnhk>>. Acesso em: 15 ago. 2018.

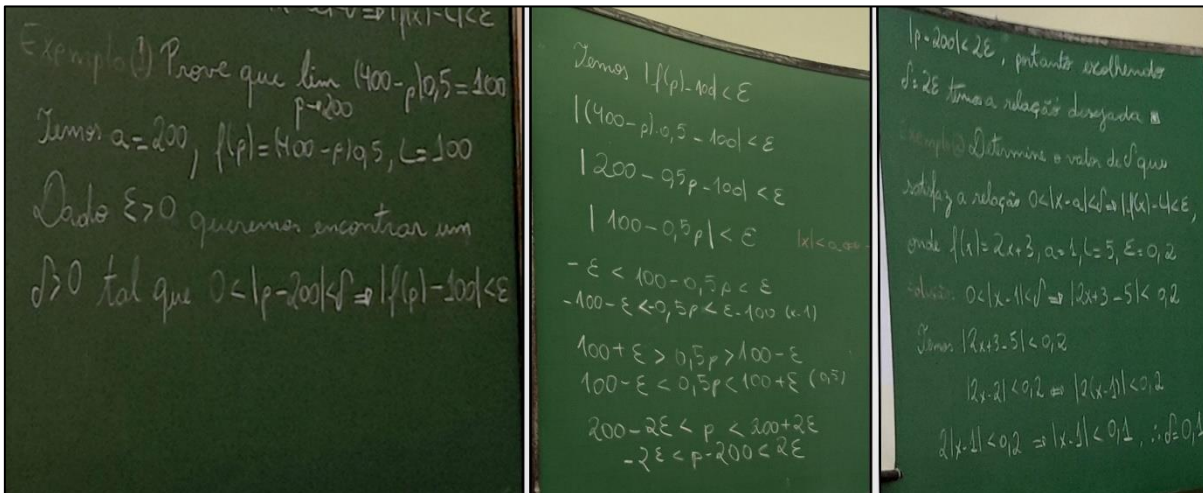
Figura 50 - Aplicativo desenvolvido para formalização do problema 3



Fonte: Produção própria.

A professora mostrou com as inequações como poderiam provar que a relação era dada por $\delta = 2\varepsilon$, e então passou a definição formal do limite e exemplificou como essa situação normalmente aparece em exercícios. Depois, passou mais exemplos utilizando a definição formal de limite. Na Figura 51 tem-se como foi passado em sala essas situações.

Figura 51 - Exemplos em sala sobre limite pela definição

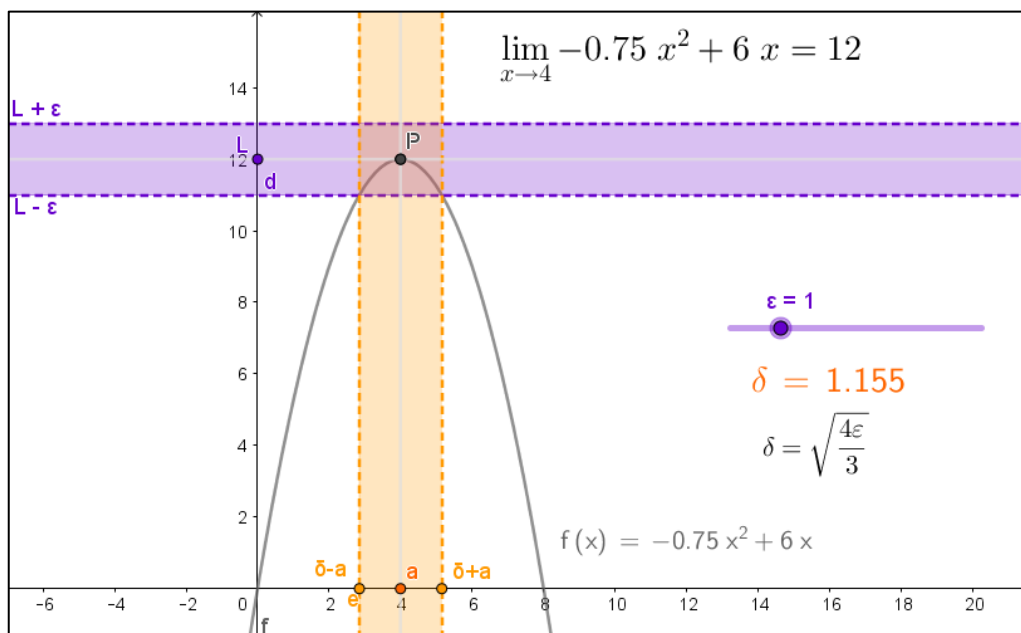


Fonte: Arquivo pessoal.

A professora também demonstrou através da definição, a prova do limite da função $h(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 6t$ que fazia parte do problema “Ideia intuitiva de limite” que a turma já tinha trabalhado. Isto, a pesquisadora tinha deixado como sugestão no produto educacional enviado, além disso, também foi utilizado o aplicativo³² (Figura 52) desenvolvido para demonstrar a relação entre δ e ε .

³² Disponível em: < <https://www.geogebra.org/m/fZyuzpmx#material/vdbPESjt>>. Acesso em: 15 ago. 2018.

Figura 52 - Aplicativo desenvolvido para formalizar o limite pela definição da função da parte 1 do problema 2



Fonte: Produção própria.

Neste aplicativo, agora com o gráfico da função da parte 1 do problema “Ideia intuitiva de limite”, assim como o aplicativo anterior, era possível manipular ϵ para obter o valor relacionado δ e os intervalos de variação.

No restante da aula, a professora passou mais alguns exemplos para turma trabalhando com o limite pela definição.

7.4 SITUAÇÃO-PROBLEMA 4: VIAGEM À LUA

A aplicação da última situação-problema ocorreu na sala da turma, neste dia estavam presentes vinte e seis alunos. Cinco alunos não quiseram ficar em grupos, mesmo assim, para facilitar a análise dos registros os nomeamos como grupos, assim, tivemos um total de doze grupos realizando o problema. A gravação de áudio foi feita nos grupos G1, G2, G3 e G4.

7.4.1 Apresentação da situação-problema

Este problema (Apêndice K) tinha como intuito explorar o que acontece com a espessura de um papel conforme ele é dobrado várias vezes ao meio; estimar a distância da Terra à Lua usando crescimento exponencial de uma função; trabalhar com limite no infinito; estabelecer

relação entre limite físico e matemático. No Quadro 42 temos a apresentação da situação-problema.

Quadro 42 - Ensino Superior – Problema 4

Dobre ao meio uma folha de papel A4. Depois dobre novamente, e siga dobrando ao meio enquanto puder.

a) Há um limite físico das dobras? Se sim, qual?

b) Suponha que pudéssemos pegar um papel tão comprido quando se queira de espessura de 0,1mm. Quantas vezes seria preciso dobrar o papel para que sua espessura final (altura) fosse maior que os 384 400 km que separam a Terra da Lua?

c) O que acontece com a função $f(n) = 2^n \cdot 10^{-4}$, onde n é dado pelo número de dobras e $f(n)$ pela distância em metros, quando o número de dobras tende a um número muito grande? Existe um limite?

Fonte: Produção própria.

Nesse problema foi possível trabalhar com crescimento exponencial, limite no infinito e com a propriedade de produto do limite.

7.4.2 Desenvolvimento da situação-problema

Para iniciar o desenvolvimento da situação-problema foi entregue uma folha A4 para cada aluno e solicitado que eles fossem dobrando ao meio, quantas vezes pudessem. Então, foi entregue a folha com o problema, após isso, os alunos se reuniram em grupos para resolução, porém alguns preferiram ficar sozinhos.

Na Figura 53 temos a ilustração de grupos durante a aplicação.

Figura 53 - Grupos trabalhando na resolução do problema 4



Fonte: Arquivo pessoal.

A resolução do problema 4, discussão e formalização foi realizada num mesmo dia, conforme será exposto no próximo item.

7.4.3 A Metodologia de ensino através da RP em prática e análise dos dados coletados

Para responder a primeira questão, os alunos deveriam manipular uma folha A4 e responder se haveria um limite de dobraduras e qual seria, caso ela fosse dobrada ao meio continuamente, a categorização das respostas dadas está no Quadro 43.

Quadro 43 - Respostas dos grupos na letra *a* do problema 4

Grupos	Categoria	Subcategoria
G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G9, G10, G11	Escreveram que teria um limite e colocaram qual seria.	Chegaram no limite de 6 dobras (G1, G2, G3, G6, G7, G9, G10, G11); Chegaram no limite de 7 dobras (G4, G5).
G8, G12	Escreveram que teria um limite, mas não indicaram o valor	Escreveram que quanto menor a área do papel mais difícil ficaria a dobrar a folha (G8); Escreveu o limite seria dado pelo tamanho da folha (G12).

Fonte: Dados da pesquisa.

Todos os grupos indicaram que haveria um limite de dobras, oito grupos chegaram à 6 e dois à 7 como máximo número possível de dobras, e dois grupos não colocaram seu cômputo.

Durante a plenária, a professora os questionou sobre a questão *a*, então alguns grupos comentaram que conseguiram dobrar 6 e outros 7 vezes a folha A4, os que conseguiram dobrar 7 vezes tiveram que ter mais força para fazer a última dobra – sendo que alguns não dobraram a folha por completo. Então, a professora perguntou se alguém queria testar a quantidade de dobras numa folha maior - A2 que estava na sala - um aluno fez a experiência, conseguindo fazer apenas 7 dobras. Assim, chegando à conclusão que havia sim um limite físico em realizar as dobras nessas folhas.

Na questão *b* os alunos deveriam estimar quantas dobras seriam necessárias realizar, considerando a espessura de uma folha A4, para chegar da Terra à Lua. Nessa questão, alguns grupos chamaram para perguntar sobre a função que estavam construindo, se estava correta, questionavam sobre a mudança das unidades e de como fazê-la também, como exemplo, o diálogo no G2:

Integrante 1: - Estaria certo assim, ou não?

Pesquisadora: - Deixa eu ver aqui o que vocês pensaram ...hum ... o 0,1 elevado a n ... mas olha só, se a gente for ver a folha ... se a gente for pegar essa folha aqui.

(Pesquisadora pegou a folha A4 que tinha dado para manipularem).

Pesquisadora: - Aqui a gente tem o 0,1, mas se a gente dobra ...

Integrante 2: - Ele dobra.

Pesquisadora: - Ele dobra. Se a gente fosse fazer usando essa função aqui, 0,1 elevado ... essa aqui é a primeira dobra né? 0,1 elevado a 1 daria certo...

Integrante 2: - Teria que ser dois elevado a 0,1 vezes n ... não faz sentido.

Pesquisadora: - Não, também não, porque a gente está dobrando, sempre está dobrando.

Integrante 2: - Uhum.

Pesquisadora: - Então a gente tem o dois elevado a n, porque é com o n que a gente está trabalhando.

Integrante 2: - Uhum.

Pesquisadora: - E aí multiplicado pelo 0,1. Só uma coisa que vocês têm que cuidar também, aqui está em quilômetros e aqui está em milímetros ...

Integrante 2: - Tem que converter.

Pesquisadora: - Para a gente trabalhar tem que estar tudo na mesma unidade de medida, tudo em quilômetros, ou tudo em milímetros, ou transforma os dois para metros, aí fica a critério de vocês.

Integrante 2: - Uhum, está bem, obrigado.

Nos grupos com mais dificuldade, foi incentivado a construir tabelas para tentarem perceber o comportamento da função. Foi notado que alguns não estavam deixando tudo na mesma unidade de medida, então era incitado a olharem melhor sua resolução com os dados do enunciado. Também, alguns estavam tendo dificuldade em isolar o n , aí era perguntado para os alunos qual propriedade eles poderiam utilizar para resolver isso – em todos os questionamentos feitos nesse sentido, algum componente do grupo lembrava do logaritmo, as vezes só foi necessário relembrar de qual propriedade poderiam utilizar, como na conversa a seguir com o G3:

Integrante 1: - Prof., a gente largou mão, assim. Estamos estressados, o nosso deu 3,844 vezes dez na doze igual a dois na x. A gente só não sabe fazer nada.

Pesquisadora: - Vocês não sabem como isolar o x?

Integrante 1: - A gente é burro.

Pesquisadora: - Não gente, olha só, vocês querem isolar o x certo?

Integrante 1: - Sim, aham.

Pesquisadora: - Como que a gente consegue isolar o x aqui?

Integrante 2: - Tinha que botar uma raiz?

Integrante 1: - Não.

Integrante 3: - Tinha que passar ele como raiz de x , daí depois tipo inverter o expoente, aí vai ficar em função de x .

Pesquisadora: - E o que a gente pode utilizar?

Integrante 2: - Logaritmo?

Pesquisadora: - Uhum, aplica o log dos dois lados. Porque daí, olha só, a gente vai ficar desse lado, log de dois elevado a x , qual é a propriedade de logaritmo do expoente? O que tá em cima, vai ...

Integrante 1: - Para frente.

Pesquisadora: - Para frente multiplicando, aí vocês já conseguem passar esse log para o outro lado dividindo ... certo? É só terminar.

A forma de isolar a variável na função da questão b estava gerando um obstáculo para os alunos continuarem sua resolução, assim, tanto a professora como a pesquisadora ajudaram os alunos a lembrarem das propriedades do logaritmo para os grupos darem continuidade na resolução, com relação a esse fato, Pinheiro (2012, p. 10) diz que: “Não se devem direcionar os pensamentos dos alunos e os modos de ação dos mesmos, apenas mediar a passagem por obstáculos que impeçam o prosseguimento do processo de resolução do problema. ”

No Quadro 44 temos as categorias das respostas apresentadas pelos grupos e as respectivas estratégias que utilizaram para chegar em tais resultados.

Quadro 44 - Respostas dos grupos na letra b do problema 4

Grupos	Categoria	Estratégias
G5, G6, G11, G12	Chegaram em 42 dobras.	Usaram processo de múltiplas divisões (G5); Usaram processo de múltiplas multiplicações (G6); Construíram a função e isolaram a variável (G11 e G12).
G3, G5	Chegaram em 41, 805...	Construíram a função e isolaram a variável.
G1	Chegaram em 20719, 86	Construíram uma função, mas esqueceram de levar em consideração a espessura da folha.
G4	Chegaram em $n > 18$, 552...	Tentaram resolver utilizando inequação.
G7	Chegaram em 131 dobras.	Construíram a função correta, mas não souberam trabalhar corretamente com as propriedades de logaritmo.
G8	Chegaram em 11 dobras.	Construíram a função correta, e trabalharam com atribuições de valores na função, mas não atribuíram valores maiores que 11 para perceber que iria chegar mais próximo de 384400km.
G10	Chegaram em 22 dobras.	Construíram uma função, mas não deixaram a espessura da folha e a distância da Terra à Lua na mesma unidade de medida.
G9	Não indicou uma resposta.	Estavam tentando construir uma função, mas não chegaram a uma conclusão.

Fonte: Dados da pesquisa.

Valores com vírgulas que apareceram não fariam sentido, pois não existiria neste caso uma “meia dobra”, o G3, apesar de deixar em sua resposta $41,805$, estavam discutindo que o resultado seria 42 dobras, mas não colocaram na folha entregue o valor arredondado, talvez isso

ocorreu, porque o grupo não estava acreditando que essa resposta estava correta, como mostra a discussão deles:

Integrante 3: - Não faz sentido, por que como que tu vai dobrar um papel 42 vezes e vai chegar na Lua?

Integrante 2: - Pois é.

Integrante 3: - Tipo, se a gente dobrou 7 e ficou desse tamanho, 42 vai ficar tipo...

Integrante 1: - Não. Nem ... pensa comigo, dobrou 7 ficou assim...

Integrante 2: - Cara, mas não vai dar essa distância, pode dar a de um prédio, mas não daqui até a Lua, né?

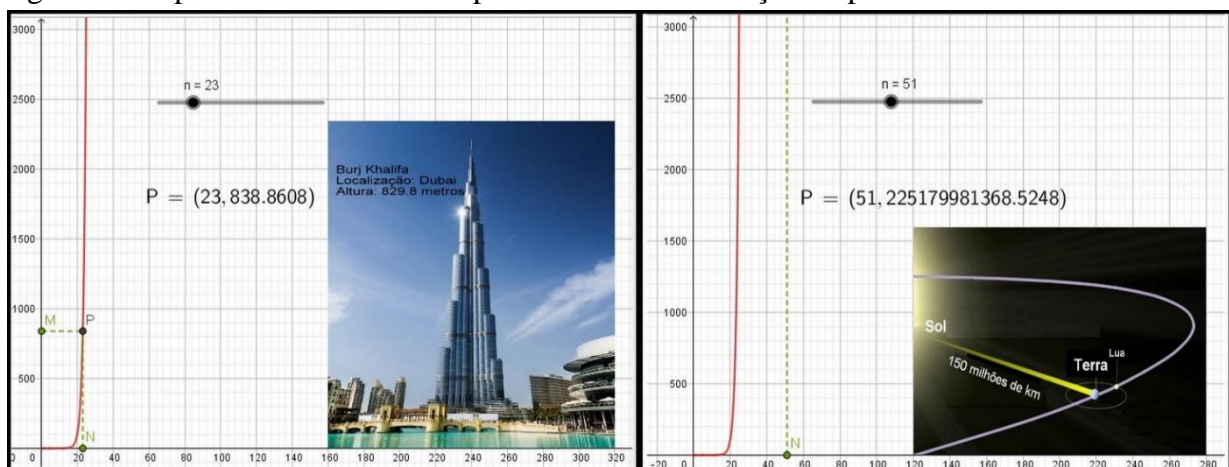
Integrante 1: - Dá gente. Eu acredito.

Risos

Na plenária foi possível perceber as diferentes formas de resolução, alguns comentaram que construíram a função, outros apenas utilizaram a calculadora científica e foram dividindo várias vezes o 384400 por 2 ou multiplicando. Quando alguns grupos mencionaram que chegaram ao valor de 42 dobras, um dos grupos, G1, se manifestou dizendo que essa resposta não poderia ser, pois esse valor era muito pequeno e não fazia sentido. Então a professora disse que era isso mesmo, e fez a resolução no quadro, resgatando as propriedades de logaritmo.

Após isso, a professora utilizou um aplicativo³³ desenvolvido para mostrar alguns exemplos de altura que se atingiria conforme o número de dobras aumentava. Esse aplicativo fornecia imagens de algumas construções ou distâncias para os alunos visualizarem melhor essas alturas, a Figura 54 mostra dois exemplos dessas distâncias, e o número de dobras (n) necessárias.

Figura 54 - Aplicativo desenvolvido para auxiliar visualização do problema 4



Fonte: Produção própria.

³³ Disponível em: < <https://www.geogebra.org/m/fZyuzpmx#material/yGyGx3N4>>. Acesso em: 15 ago. 2018.

Na questão c , os alunos deveriam responder o que acontecia com a função $f(n) = 2^n \cdot 10^{-4}$ quando n tendesse a um número muito grande (primeiro questionamento) e também responder se existiria um limite (segundo questionamento). Com relação ao primeiro questionamento dessa questão, tem-se a categorização das respostas dadas no Quadro 45.

Quadro 45 - Respostas dos grupos do primeiro questionamento da letra c do problema 4

Grupos	Categoria
G1, G3, G7, G8, G10, G12	Responderam que $f(n)$ tende ao infinito.
G6, G11	Responderam que a função tenderia também a um número muito grande.
G5	Responderam que se aproximaria de 384400km.
G2, G4, G9	Não responderam.

Fonte: Dados da pesquisa.

A maioria dos grupos percebeu que a função tenderia a um número muito grande, ou seja, tenderia ao infinito. O G5 que respondeu que $f(n)$ se aproximaria de 384400km, provavelmente relacionou à questão b , pois talvez pensaram que na questão c , o máximo que $f(n)$ poderia assumir seria o valor da distância entre a Terra e a Lua.

No Quadro 46 tem-se a categorização do segundo questionamento da questão c :

Quadro 46 - Respostas dos grupos do segundo questionamento da letra c do problema 4

Grupos	Categoria
G1, G5, G6, G8, G10	Responderam que não existiria um limite.
G2, G11, G12	Responderam que existiria um limite.
G4	Responderam que o limite seria igual a zero.
G3, G7, G9	Não responderam.

Fonte: Dados da pesquisa.

Cinco grupos responderam que de fato não existiria um limite para a função. Dos três grupos que responderam que existiria um limite, dois explicaram o porquê: o G2 escreveu que o limite seria o número de dobras; e o G11 que o limite seria o infinito positivo. Alguns alunos, conforme está nos quadros deixaram de responder um dos questionamentos, e o G9 foi o único que deixou a questão c totalmente em branco.

Apesar do G2 escrever que existiria um limite, inicialmente a conclusão do grupo não era essa, conforme áudio:

Integrante 2: - Tá o que você conseguiu compreender? Que quanto maior o número de dobras, maior é ...

Integrante 1: - É ... quanto maior o número de dobras ...

Integrante 2: - Maior a distância em metros.

Integrante 1: - É, maior a distância em metros.

Integrante 2: - Ele nunca vai ter um limite, né?

Integrante 1: - É, eu acho que nunca vai ter um limite.

E mais adiante, conversando novamente, falam:

Integrante 1: - Daí a pergunta é: quando o número de dobras tende a um número muito grande, existe um limite? Não.

Integrante 2: - Eu acho que não.

Integrante 1: - Ah, existe um limite em relação aquele valor né?

Integrante 2: - Uhum.

Integrante 1: - Em relação ao tanto de dobras, mas não de ...

Integrante 2: - Faz sentido.

Integrante 1: - Sim, existe um limite, tem que ter um limite ... vai colocar ali?

Integrante 2: - Só não sei de que forma. ... Por que existe um limite? Porque poderia dobrar infinitamente, não existiria nenhuma condição.

Integrante 1: - Será que poderia?

O G2 de certa forma tinha razão em sua justificativa, o que a professora discutiu com a turma também, pois pode ser analisado as condições físicas do problema, já que, existe uma área calculável para o Universo, essa que os especialistas chamam de Universo observável, que tem um diâmetro estimado em 93 bilhões de anos-luz. Desse modo, se a folha de papel de 0,1mm fosse dobrada ao meio mais de 103 vezes ela teria uma espessura tão grande que até mesmo ultrapassaria esse valor, ou seja, realmente existiria um limite de dobras possível de ser realizado.

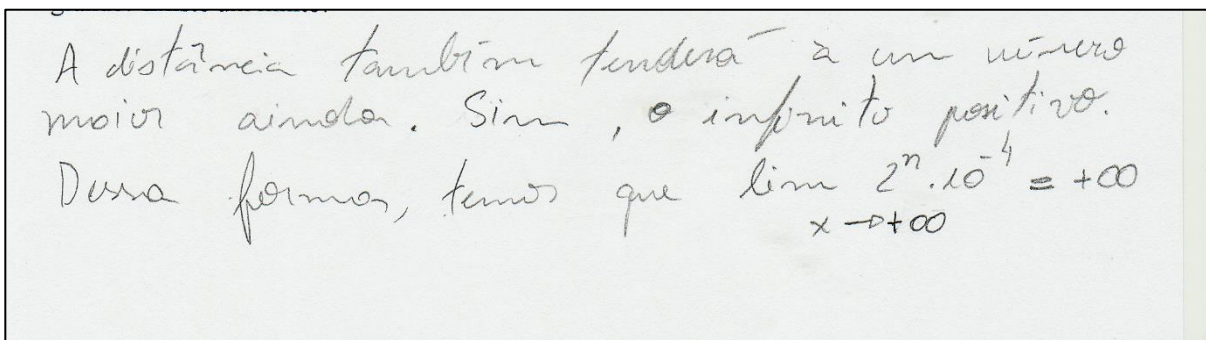
Para formalização da questão *c*, a professora inicialmente utilizou o GeoGebra para mostrar o comportamento da função e que ela não teria um limite. Destacou que esse resultado se devia ao fato da função ter um crescimento exponencial, ou seja, conforme o número de vezes que o papel fosse dobrado, a sua espessura (altura) iria crescer cada vez mais, tendendo ao infinito. O que então, simbolicamente, seria expresso como:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x \cdot 10^{-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} 10^{-4} = +\infty \text{ (Propriedade de limites: O}$$

limite de um produto de duas funções é igual ao produto dos limites destas funções). Assim, a professora mostrou utilizando uma das propriedades do limite, que a função tendia a mais infinito.

Nenhum grupo em seus registros demonstrou dessa forma, o G11 até expressou em termos de limite, como mostra a Figura 55, já colocando diretamente o mais infinito como resposta.

Figura 55 - Resposta do G11 na letra c do problema 4



Fonte: Produção dos alunos, 2018.

O G2 apesar de não usar a simbologia de limite na resolução, através do áudio em suas discussões, também chegou nessa conclusão:

Integrante 1: - Mas, como que a gente faria dois elevado ao infinito vezes dez na menos quatro?

Integrante 2: - Daria infinito.

Integrante 1: - Daria infinito?

Integrante 2: - É porque se o número está elevado ao infinito, independente do que tem multiplicando vai dar infinito igual ... Porque ele já está no infinito ...

O G11 por chegar a mais infinito, talvez acreditou que por calcular “um valor”, o infinito seria o valor do limite para a função.

Nessa aula, ainda a professora passou para a turma limites fundamentais e outras propriedades que são utilizadas para o cálculo de limites e também deu alguns exemplos.

7.5 PROPOSIÇÃO E RESOLUÇÃO DE NOVOS PROBLEMAS

Seguindo a Metodologia através da RP, após a formalização dos problemas em sala, foi proposto a resolução de novos problemas. Esses foram deixados como tarefa (Apêndice L), com prazo de dez dias para entrega, podendo ser resolvido e entregue fisicamente ou através da ferramenta Grupo na plataforma online do GeoGebra – ferramenta que permite que sejam postadas tarefas e disponibiliza espaço para resolução das mesmas. Como incentivo para os alunos entregarem pela plataforma, e para nós podermos analisar sua aplicabilidade, a professora disse que quem resolvesse os problemas na plataforma ganharia 0,5 pontos extras na composição da segunda nota da turma na disciplina.

Além disso, esses problemas também serviram como parte da nota. Foram propostos quatro problemas, cada um com peso de 0,5 pontos. Assim, a segunda nota foi composta por

20% como sendo os problemas resolvidos, somados com nota de avaliação escrita valendo 80%. A participação na resolução dos problemas em sala também foi levada em consideração pela professora para fechar essa nota.

Pelo fato dos problemas poderem ser resolvidos diretamente pela plataforma, e de cada aluno precisar fazer seu próprio login, os problemas deveriam ser entregues individualmente.

Vinte e nove alunos entregaram a lista, todos pela plataforma. Para análise das respostas, os nomeamos como “A1, A2, ... , A29”.

7.5.1 Apresentação dos problemas

Foram propostos quatro problemas, e na plataforma online do GeoGebra os alunos poderiam respondê-los escrevendo na plataforma ou mandando foto de sua resolução. A visualização de como fica a página do Grupo com as postagens pode ser vista na Figura 56.

Figura 56 - Ferramenta Grupo na plataforma do GeoGebra, com os problemas propostos



Fonte: Produção própria.

Como já mencionamos no tópico 3.4.1 da dissertação, cada Grupo é organizado em quatro guias, sendo elas: Postagens, Membros, Materiais e Feedback (para proprietário)/Tarefas (para membros). Na aba Postagens fica a página principal do Grupo e serve como uma forma de comunicação para os membros, na qual podem ser feitos comentários ou questionamentos sobre as postagens existentes. A aba Membros fornece uma lista de todos os membros do grupo, bem como a sua função dentro dele (proprietário, membro), e a guia Materiais apresenta a lista de todos os materiais compartilhados no Grupo. Já a guia Feedback, fornece informações sobre

todas as tarefas e só pode ser acessado pelo(s) proprietário(s), esse que pode acessar e enviar o feedback delas. E para membros, a última guia tem o nome de Tarefas, que apresenta a lista das tarefas definidas, ordenadas por seu status pendência ou conclusão, através dela o membro também pode verificar e adicionar comentários a elas e/ou ao feedback dado pelo proprietário.

Além dos problemas, nos Materiais foi deixado uma postagem com instruções, que explicavam como os alunos poderiam postar suas respostas; indicavam como funcionava a *Ferramenta de Texto* (apenas para texto), e ferramenta *Incluir Fórmula Matemática*, que servia para inserir símbolos e escrever estruturas matemáticas. E descrito que após finalizar cada problema, no final da página, o aluno deveria clicar em “Entregar” para que depois o problema estivesse postado para correção, e também escrito que caso tivessem dúvidas poderiam deixá-las nos comentários.

Em todos os problemas, os alunos tinham um aplicativo (applet) que poderiam manipular durante a resolução do problema.

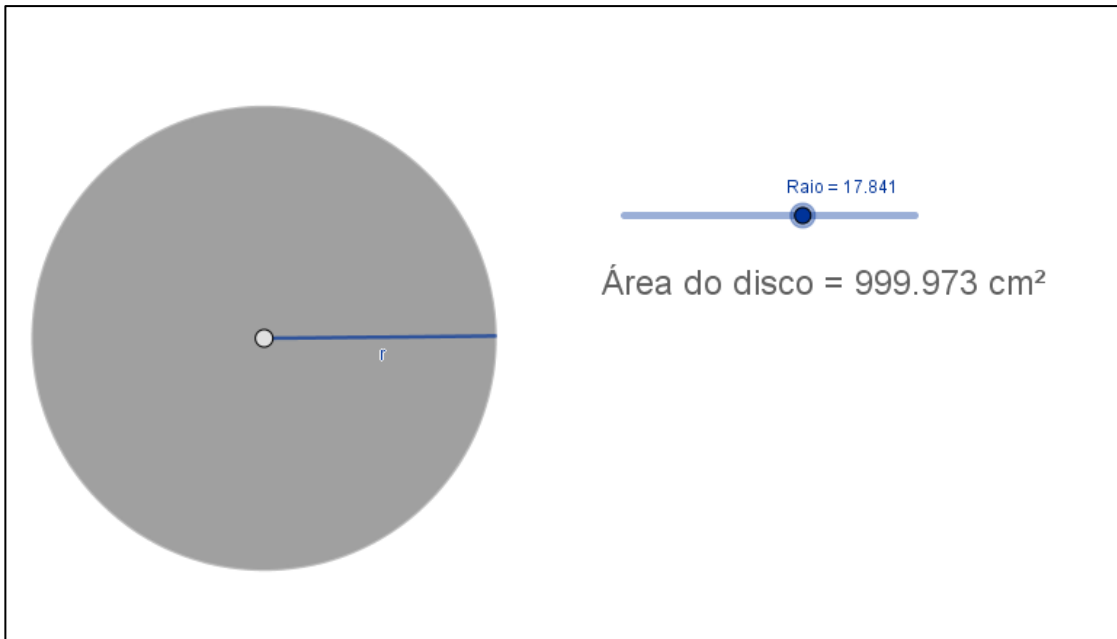
No primeiro problema, os alunos deveriam encontrar um intervalo ideal para o raio na fabricação de um disco de metal, o enunciado desse encontra-se no Quadro 47. E na Figura 57 tem-se a tela do aplicativo que poderia ser manipulado.

Quadro 47 - Ensino Superior – Tarefa: Enunciado Problema 1

Na fabricação de um disco circular de metal, é solicitado que se fabrique um disco com área de 1000cm^2 . Antes da produção do disco é necessário saber qual o erro que se pode aceitar em relação ao raio ideal de $r_0 = 17,841\text{cm}$. É permitido ao fabricante uma tolerância de erro de 5cm na área do disco dada por $A = \pi r^2$. Para que isto aconteça, é necessário procurar o intervalo no qual tem de manter r para fazer $|A - 1000| \leq 5$. Desse modo, qual intervalo de variação do raio é encontrado? Justifique a resposta.

Fonte: Produção própria.

Figura 57 - Ensino Superior – Tarefa: Aplicativo Problema 1



Fonte: Produção própria.

No aplicativo mostrado na Figura 57, alterando o controle deslizante para o raio do disco, o software mostrava o valor respectivo para a área, assim, o aluno poderia verificar ou até mesmo encontrar os valores para o intervalo do problema proposto.

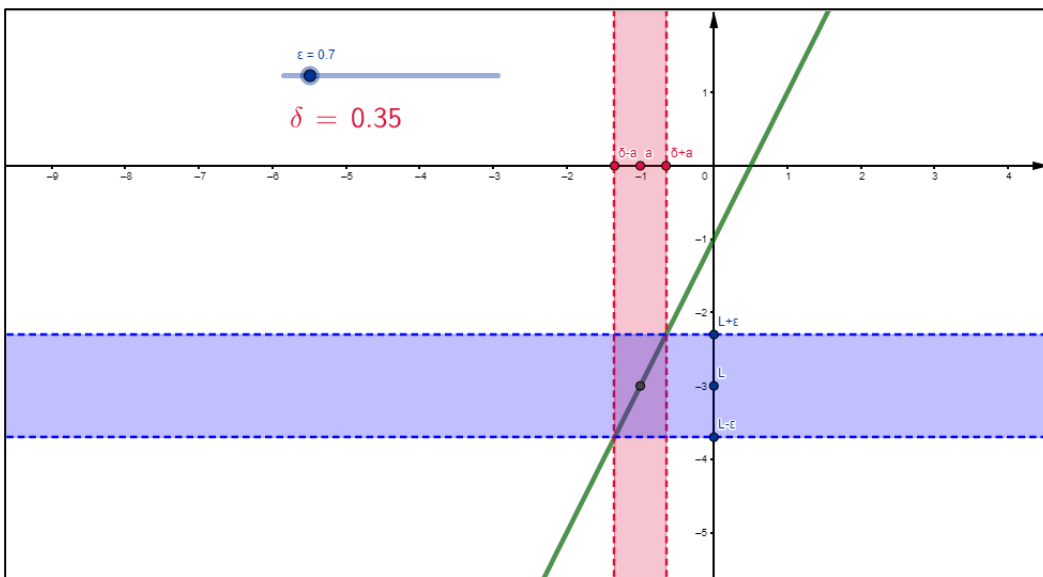
No segundo problema os alunos deveriam investigar o que acontecia com a relação entre δ e ε no limite de uma função através do aplicativo desenvolvido (Figura 58) e depois mostrar através da definição que o limite existia. No Quadro 48 temos o enunciado do problema 2.

Quadro 48 - Ensino Superior – Tarefa: Enunciado Problema 2

- a) Use o applet para verificar a relação entre δ e ε no $\lim_{x \rightarrow -1} (2x - 1) = -3$. Qual é essa relação?
- b) Use a definição de limite para mostrar que $\lim_{x \rightarrow -1} (2x - 1) = -3$.

Fonte: Produção própria.

Figura 58 - Ensino Superior – Tarefa: Aplicativo Problema 2



Fonte: Produção própria.

No problema 3 deveriam ser investigados o valor dos limites através do gráfico posto, conforme enunciado no Quadro 49 e aplicativo da Figura 59.

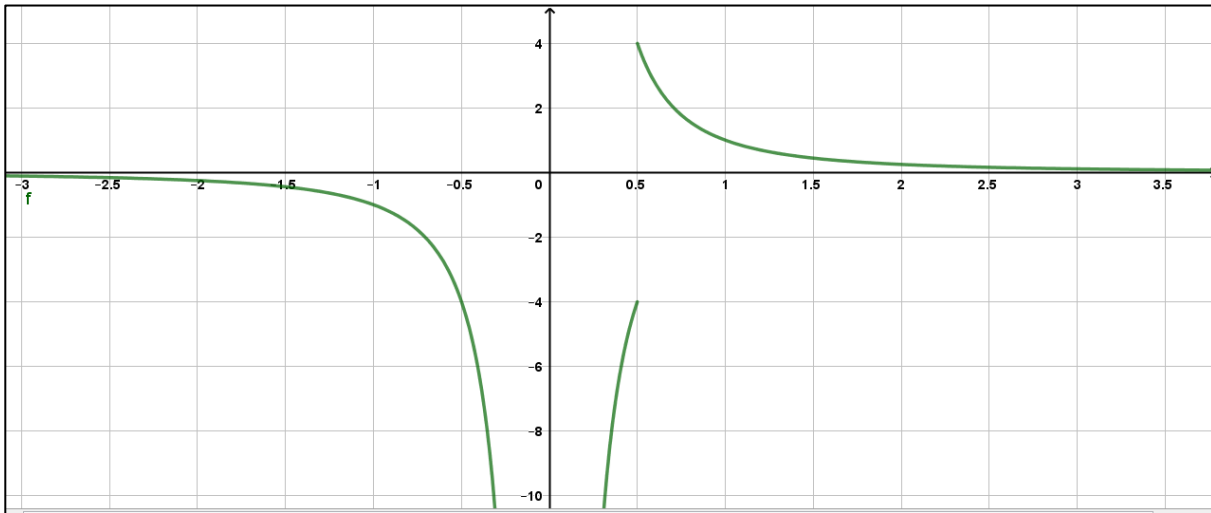
Quadro 49 - Ensino Superior – Tarefa: Enunciado Problema 3

Para a função $f(x)$ cujo gráfico é mostrado a seguir, determine o valor de cada limite, se existir:

- $\lim_{x \rightarrow 0,5^-} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow 0,5^+} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow 0,5} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

Fonte: Produção própria.

Figura 59 - Ensino Superior – Tarefa: Aplicativo Problema 3



Fonte: Produção própria.

No último problema, o objetivo era o desenvolvimento do cálculo de alguns limites (Quadro 50) utilizando propriedades passadas em sala. Para isso, os alunos poderiam verificar o comportamento das funções e resultado dos limites pelo aplicativo (Figura 60). Foi enfatizado que os alunos deveriam desenvolver o cálculo em cada uma das questões e não apresentarem apenas a resposta.

Quadro 50 - Ensino Superior – Tarefa: Enunciado Problema 4

Nos itens abaixo calcule os limites. Justifique as respostas encontradas.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^5 + 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 5x^3 + 8x^2}{5x^4 - 3x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{x^2 - 2x - 8}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

Fonte: Produção própria.

Figura 60 - Ensino Superior – Tarefa: Aplicativo Problema 4



Fonte: Produção própria.

Na postagem das resoluções, alguns alunos optaram por enviar foto com a resolução, e outros a escreveram na própria página, então, no próximo tópico iremos analisar como ficaram as respostas com relação a cada um dos problemas.

7.5.2 Análise dos dados coletados

No Quadro 51 temos a classificação das respostas enviadas pelos alunos do primeiro problema.

Quadro 51 - Respostas do problema 1 da tarefa

Alunos	Categoria	Subcategoria
A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A17, A18, A19, A20, A21, A22, A23, A24, A25, A26, A27, A28.	Encontraram um intervalo para variação do raio.	Chegaram ao seguinte intervalo: (17,796; 17,885) – (A2, A8, A10, A11, A12, A13, A21, A22, A24, A26); Chegaram ao seguinte intervalo: (17,801; 17,890) – (A7, A9, A23, A25, A27, A29); Chegaram ao seguinte intervalo: (17,8; 17,9) – (A16, A19, A20, A28); Chegaram ao seguinte intervalo: (17,79; 17,88) – (A1, A4); Chegaram ao seguinte intervalo: (17,8; 18,55) – (A6, A14); Chegaram ao seguinte intervalo: (17,841; 17,885) – (A5, A18); Chegou ao seguinte intervalo: (-17, 79; 17,88) – (A15); Chegou ao seguinte intervalo: (17,776; 17,885) – (A17).
A3	Não encontrou um intervalo para variação do raio.	Apesar de fazer a resolução utilizando inequações, não indicou o intervalo de variação do raio.

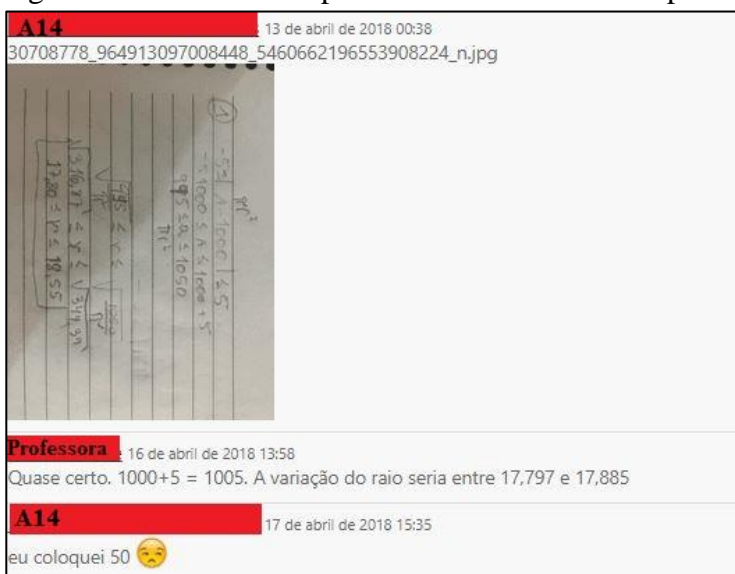
Fonte: Dados da pesquisa.

Com exceção do A3 que não indicou um intervalo de variação para o raio, os demais alunos chegaram a intervalos semelhantes, no geral, se diferiram na quantidade de casas decimais, porém, como no enunciado não solicitamos a quantidade desejada na resposta, a

maioria recebeu a pontuação completa para esse problema. O que estávamos esperando era a variação de (17,797; 17,885), já que o raio dado no problema estava com três casas decimais, assim no feedback dado aos alunos que usaram poucas casas decimais, a professora escreveu que eles poderiam ter utilizado mais casas em sua resolução e resposta.

Os alunos A6 e A14 que chegaram em 18,55 na variação superior do raio, erraram durante o cálculo, o A6 em uma das divisões e o A14 trocou 1005 por 1050, isso foi descrito depois para eles no feedback, o A14 até retornou o comentário da professora colocando um *emoticon* que pareceu que ele ficou descontente com erro cometido, conforme Figura 61.

Figura 61 - Feedback de professora e aluno A14 no problema 1 da tarefa



Fonte: Dados da pesquisa.

A respeito desse fato, Pironel e Vallilo (2017, p. 293) dizem que “ao participar de um processo de avaliação, é importante que o aluno esteja ciente quanto a seu aprendizado, refletindo sobre seus avanços e erros cometidos para que possa aperfeiçoar seu conhecimento.”

Os alunos A5 e A18 não consideraram a variação inferior do raio, assim no feedback foi descrito que eles teriam que considerar o erro para mais e para menos. Já o A15 chegou numa variação negativa para a variação inferior do raio, logo foi explicado que não faria sentido raio negativo.

No problema 1, alguns alunos optaram por enviar foto com a resolução, já outros escreveram na própria página, também teve alunos que fizeram ambos os casos, como o A22 ilustrado na Figura 62.

Figura 62 - Feedback de professora e aluno A22 no problema 1 da tarefa

Fonte: Produção dos alunos, 2018.

No segundo problema da lista, os alunos deveriam responder qual seria a variação entre δ e ε , e depois provar usando a definição que o limite existia. A categorização dessas respostas, encontram-se nos Quadros 52 e 53.

Quadro 52 - Respostas da questão a do problema 2 da tarefa

Alunos	Categoria
A2, A3, A4, A8, A15, A17, A19, A20	Colocaram que a relação seria dada por: $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.
A5, A10, A16, A18, A21, A24, A26	Colocaram que a relação seria dada por: $\varepsilon = 2\delta$.
A1, A6, A11, A12, A22, A25, A28	Colocaram que ε é sempre o dobro de δ .
A14, A27	Colocaram que δ é sempre metade de ε .
A7, A23	Escreveram que conforme ε aumenta, δ também aumenta, mas não especificaram a relação qual seria essa variação.
A29	Colocou que a relação seria dada por: $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.

Fonte: Dados da pesquisa.

Quadro 53 - Respostas da questão b do problema 2 da tarefa

Alunos	Categoria
A1, A2, A3, A4, A7, A8, A9, A11, A12, A14, A15, A17, A19, A20, A21, A22, A23, A24, A25	Provaram que escolhendo $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ a definição seria verificada.
A5, A18, A27, A28	Chegaram na relação de $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, mas faltou explicarem mais detalhadamente de onde tiraram esse resultado.
A6, A29	Confundiram-se com o sinal negativo em: $ f(x) - L = 2x - 1 - (-3) = 2x - 1 + 3 $; fizeram $ 2x - 1 - 3 $ então não encontraram uma relação correta.
A10, A16	Não provaram usando a definição, apenas substituí o $x = -1$ no limite.
A26	Usou valores do gráfico do applet, mas não generalizou o resultado.

Fonte: Dados da pesquisa.

A questão *a* do problema, o A9 não especificou sua resposta, e o A13 não apresentou nenhuma resolução para esse problema, por isso eles não estão em nas categorias dos quadros.

Apesar de diferentes classificações para a questão *a*, com exceção de A7, A23 e A29, o restante dos alunos encontraram a variação correta entre δ e ϵ . E na questão *b* cinco alunos (A6, A10, A16, A26, A29) não chegaram na relação desejada, quatro (A5, A18, A28, A28) apesar de encontrarem a relação, não souberam demonstrar isso detalhadamente, os demais provaram corretamente. Como ilustração, temos o A20 que escreveu na própria plataforma a resposta (Figura 63), e o A19 que enviou uma foto com suas resoluções (Figura 64).

Figura 63 - Resposta do A20 na questão *b* no problema 2 da tarefa

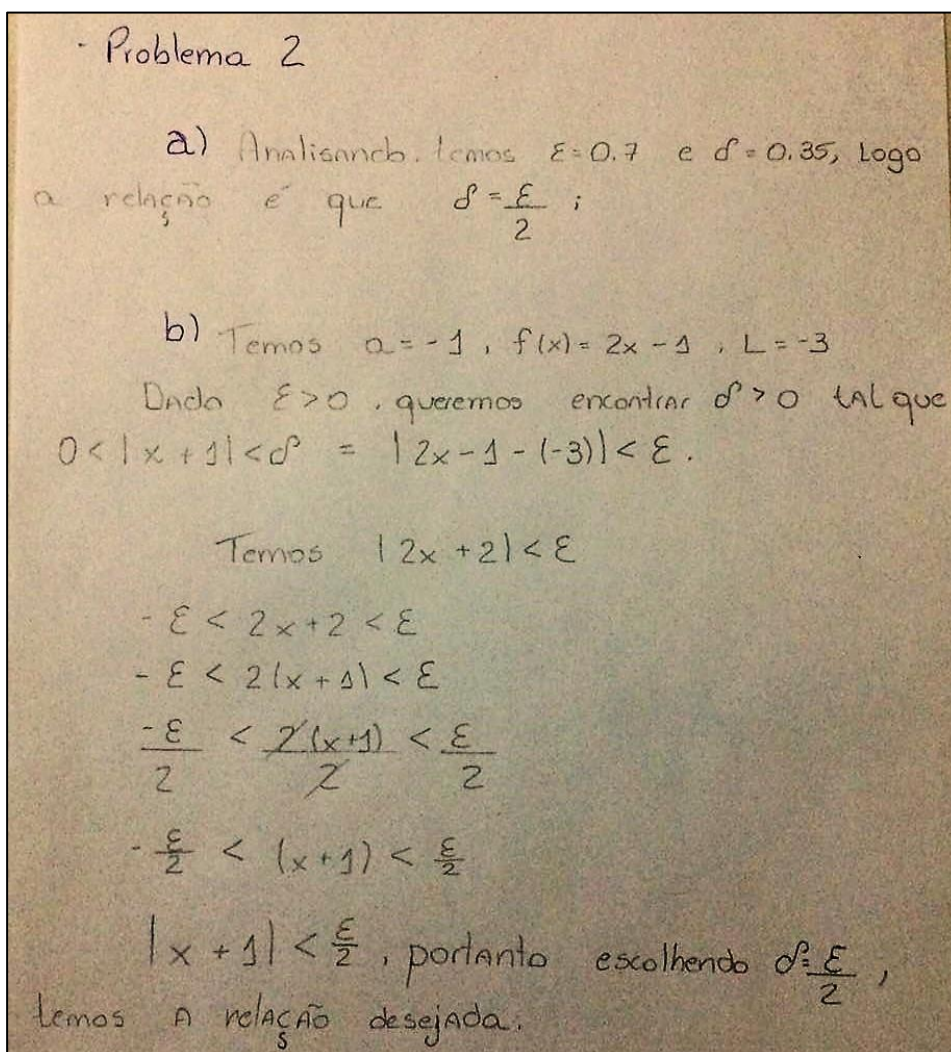
b) Use a definição de limite para mostrar que $\lim_{x \rightarrow -1} (2x - 1) = -3$.

A Temos $a = -1$; $f(x) = 2x - 1$ e $L = -3$
 Usando a definição dado um $\epsilon > 0$ buscaremos um $\delta > 0$

f_x Temos $0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$
 Temos então $0 < |x + 1| < \delta \implies |2x - 1 + 3| < \epsilon$ Se tivermos $|x + 1| < \delta$ isso significa que devemos manipular $|2x - 1 + 3| < \epsilon$ até chegarmos em um $|x + 1| < \epsilon$ para poder assim igualar δ e ϵ
 Temos então $|2x + 2| < \epsilon$ pela propriedade de módulos temos que isso é igual à $-\epsilon < 2x + 2 < \epsilon$
 Colocando o 2 em evidência temos $-\epsilon < 2(x + 1) < \epsilon$
 Agora dividimos tudo por 2 $-\frac{\epsilon}{2} < \frac{2(x + 1)}{2} < \frac{\epsilon}{2}$ podemos simplificar $-\frac{\epsilon}{2} < (x + 1) < \frac{\epsilon}{2}$ e utilizando a propriedade de módulo novamente temos $|x + 1| < \frac{\epsilon}{2}$
 Sendo assim temos $|x + 1| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|x + 1| < \delta$ então podemos dizer que $\delta = \frac{\epsilon}{2}$

Fonte: Produção dos alunos, 2018.

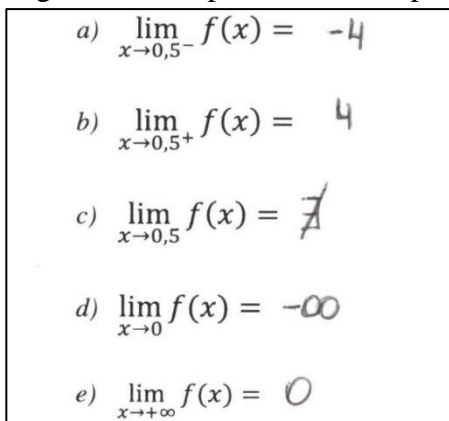
Figura 64 - Resposta do A19 no problema 2 da tarefa



Fonte: Produção dos alunos, 2018.

A respeito do problema 3, que era para analisar o valor dos limites pelo gráfico dado de uma função $f(x)$, dos vinte e oito alunos que apresentaram suas respostas (A13 não apresentou), vinte acertaram as cinco alternativas, como ilustração a resolução enviada por foto pelo A2 na Figura 65.

Figura 65 - Resposta do A2 no problema 3 da tarefa



Fonte: Produção dos alunos, 2018.

Seis alunos erraram uma questão no problema 3, e dois erraram duas questões. Esses erros foram distintos, e podem ter ocorrido por falta de atenção na análise do gráfico.

Assim como no problema 3, no problema 4 também não fizemos classificação das respostas, pois quase todos os alunos chegaram aos valores corretos para os limites, a Figura 66 ilustra um exemplo disso.

Figura 66 - Resposta do A10 no problema 4 da tarefa

Problema 4:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^5 + 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5 =$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left(\frac{-3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{3}{x^4} + \frac{8}{x^5} - \frac{5}{x^5} \right) = -\infty(-3) = +\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 5x^3 + 2x^2}{5x^4 - 3x^2} =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(\frac{3}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right)}{x^4 \left(\frac{5}{x^0} - \frac{3}{x^2} \right)} = \frac{3}{5}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4-x}{x^2-2x-8} =$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4-x}{(4-x)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-x-2} = \frac{1}{-4-2} = -\frac{1}{6}$$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} =$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+4} &= u \\ x+4 &= u^2 \\ x &= u^2-4 \\ \text{se } x &= 0 \\ u &= 2 \end{aligned} \quad \lim_{u \rightarrow 2} \frac{u-2}{u^2-4} = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{u-2}{(u+2)(u-2)} =$$

$$\lim_{u \rightarrow 2} \frac{1}{u+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

Fonte: Produção dos alunos, 2018.

Treze dos vinte e oito alunos que entregaram o problema, erraram alguma das alternativas, desses, dez erraram o limite da letra a. E o erro foi o mesmo, pois os alunos chegaram a “menos infinito” para a resposta, dessa forma, foi dado o retorno para esses alunos, conforme Figura 67.

Figura 67 - Feedback de professora e aluno A26 na questão *a* do problema 4 da tarefa

The screenshot shows a chat interface with a student named A26 and a teacher. A26 has posted a photo of their handwritten work for question 4a. The work shows the limit calculation for the function $f(x) = -5x^3 + 3x^2 + 4x - 3$ as x approaches infinity. The student's work includes the following steps:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-5x^3 + 3x^2 + 4x - 3) = -\infty + \infty - \infty + \infty = \text{IND}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(-3 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{4}{x^4} - \frac{3}{x^5} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-3 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{4}{x^4} - \frac{3}{x^5} \right)$$

$$-\infty \cdot (-3 + 0 + 0 - 0 + 0 - 0) = -\infty \cdot -3 = -\infty$$

The teacher's response is: "Menos com menos dá mais. (mais infinito)".

Fonte: Produção dos alunos, 2018.

Com a ferramenta Grupo do GeoGebra a professora realizou a correção online dos problemas, dando automaticamente o feedback para cada aluno, assim em concordância com o que Kenski (2003, p. 7) descreve sobre ambientes virtuais de aprendizagem “As características de interatividade existentes nesses espaços garantem a interação (síncrona e assíncrona) permanente entre os seus usuários.”

Cabe ressaltar que no Grupo é possível alterar um membro para “proprietário”, este que tem acesso a todas as respostas dos alunos e também postar e corrigir as atividades, assim, a pesquisadora deixou a professora também como “proprietária” do Grupo.

Durante a correção, a pesquisadora estava presente com a professora, dando auxílio na correção e anotando alguns pontos que foram observados na utilização da ferramenta Grupo. Por exemplo, a professora comentou que sentiu falta de uma ferramenta para digitar equações nos comentários para retornar o feedback aos alunos, pois algumas vezes ela queria escrever como ficaria correta a questão e não tinha como inserir os símbolos e as letras gregas que gostaria. Outro caso, é a respeito do sinal “<”, quando digitava ele aparecia, porém, ao enviar o retorno ao aluno, o sinal desaparecia. A professora também falou que alguns alunos mencionaram que quando digitavam apenas o “0” como resposta (questão *e* do problema 3), quando enviavam ele sumia, assim, era preciso eles editarem, colocando um ponto final “0.” ou “=0”, e outros também optaram por escrever por extenso “zero”.

Outro fato, é que alguns alunos esqueceram de clicar em “entregar” no final da página de cada problema, assim não aparecia o símbolo “✓” que o GeoGebra retorna quando é

entregue. Mesmo assim, era possível entrar na folha de trabalho do aluno e ver sua resolução. Na Figura 68 é ilustrado como fica o retorno dado pela ferramenta.

Figura 68 - Feedback dado pelo GeoGebra com relação a entrega de problemas



Fonte: Produção própria.

Temos como exemplo o A11, que fez o problema, mas não clicou em “entregar”. Já o A13, não entregou o problema, e o A14 entregou, mas não até a data estipulada, por isso, aparece “atrasado”. Para esses alunos que entregaram atrasados, a professora descontou alguns décimos da pontuação total das questões.

7.6 QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO

A pesquisadora deixou com a professora da turma o questionário de avaliação dos problemas (Apêndice M), para que ela deixasse os alunos responderem num momento mais propício de sua aula, com a intenção de não prejudicar seu planejamento.

Os alunos responderam o questionário, após terem enviado suas resoluções da lista dos problemas e de fazerem a avaliação escrita que iria compor a segunda nota da disciplina

O questionário era semelhante ao que foi aplicado no Ensino Médio, apenas retiramos uma das questões que consistia em saber se os alunos já conheciam o software GeoGebra. No caso dos alunos do Ensino Superior já sabíamos que eles conheciam, pois já tinha sido observado a aula com a professora utilizando o software.

No dia que a professora aplicou o questionário estavam presente vinte alunos, assim em nossa análise os classificamos como “A1, A2, ... , A20”.

Na primeira questão, os alunos deveriam escolher uma ou mais opções para classificarem as aulas que ocorreram a aplicação dos problemas e também teriam que justificar o porquê de suas escolhas, a classificação das respostas encontra-se no Quadro 54.

Quadro 54 - Classificação das respostas da questão 1 do Questionário aplicado no Ensino Superior

Alunos	Opção escolhida	Justificativas
A6, A10, A12, A17.	Muito interessante	Ajudaram muito a entender limites de uma forma diferente; A maneira com que foi abordado os itens.
A1, A2, A3, A4, A11, A13, A14, A15, A16, A19, A20.	Interessante	Foi apresentado uma metodologia diferente; Formas novas de ver o problema; Boas para explicação; Um método bom para discutir com os colegas; Ajudou a entender o princípio de limite; Ajudou a compreender os conceitos básicos; Melhor noção da matéria.
A7.	Pouco interessante	-
A5.	Chatas	-
A1, A2, A4, A6, A10, A11, A20.	Desafiadoras	Exercícios tinham um bom grau de dificuldade;
A8, A9, A18.	Monótonas	Muitos exercícios básicos; Exercícios básicos e ao mesmo tempo complexos.
A1, A8, A9, A11, A16.	Repetitivas	Questões repetitivas; Muito iguais.
A6, A7, A10, A12, A14, A17, A19, A20.	Estimulantes	As atividades estimularam a pensar no princípio do conceito; Buscar informações para resolução dos problemas.

Fonte: Dados da pesquisa.

As opções mais escolhidas na primeira questão foram “interessante” e “estimulantes”, e relacionaram isso, por exemplo, ao fato de ser uma Metodologia diferente do que estão acostumados, poderem discutir com os colegas, e os estimular a buscar informações para resolver os problemas, além de os ajudar a entender o limite e seus princípios.

Um aluno colocou as aulas como sendo “pouco interessantes” e outro como “chatas”, porém, não justificaram o porquê dessas escolhas. Três alunos citaram as aulas como sendo monótonas por abordarem exercícios básicos, e outro disse que apesar de serem básicos eles eram complexos. Alguns alunos também descreveram que acharam as questões repetitivas.

Na segunda questão, o objetivo era investigar o que os alunos acharam da contribuição do GeoGebra durante a aplicação, das três opções de escolha que os alunos deveriam optar, a opção “nada” não foi escolhida por nenhum aluno. Todos colocaram que ou o GeoGebra contribui “muito” ou “um pouco” para visualização dos problemas. A classificação com as respectivas justificas do motivo da opção selecionada, encontram-se no Quadro 55.

Quadro 55 - Classificação das respostas da questão 2 do Questionário aplicado no Ensino Superior

Alunos	Opção escolhida	Justificativas
A1, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A15, A16, A17, A18, A19, A20.	Muito	Ótimo para visualização; Ferramenta auxilia e desenvolve a visão de forma gráfica das atividades; Sempre ajuda na visualização dos conteúdos; Facilitou na compreensão de conceitos fundamentais; Dava para ter uma noção mais fácil do limite; Tornou os problemas mais visuais; Analisar o problema com outra visão; Consegue ver os detalhes dos gráficos; Deixa o conteúdo abstrato mais visual.
A2, A3, A14.	Um pouco	Meio abstrato, pois não é 100% completo o entendimento das coisas pelos gráficos; As atividades não eram tão difíceis de se visualizar mentalmente.
-	Nada	-

Fonte: Dados da pesquisa.

Com as justificativas apresentadas, percebe-se que os alunos classificaram o GeoGebra como uma ferramenta potencial na visualização dos conteúdos, para Borba, Silva e Gadani (2014, p. 40) a visualização “oferece meios para que conexões entre representações possam acontecer. Assim, a visualização é protagonista na produção de sentidos e na aprendizagem matemática.”

Na terceira questão queríamos verificar se a forma que os problemas foram abordados, contribuiu para o entendimento dos conceitos. Apenas três alunos escreveram que não, os demais responderam que sim, e o A18 deixou essa questão em branco. As justificativas dadas pela escolha de suas respostas encontram no Quadro 56.

Quadro 56 - Classificação das respostas da questão 3 do Questionário aplicado no Ensino Superior

Alunos	Opção escolhida	Justificativas
A1, A3, A4, A5, A6, A7, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A17, A19, A20.	Sim	Abordados aspectos geométricos do conteúdo dando a entender como funciona limites; As apresentações dos alunos mostraram outros meios de resolução; Foi possível visualizar a aplicação direta do conteúdo de limites; Assunto abordado era bem absorvido; Contribuiu para o que era limite; Foi mais fácil entender; Mostrou aplicações práticas do conteúdo;

		Tanto explicações dadas pelos alunos quanto das professoras; Boa interação; Notamos como o conteúdo pode ser aplicado no dia a dia; Conteúdos alinhados com a proposta das atividades; Os problemas ficaram mais fáceis de serem visualizados; Principalmente com a utilização do GeoGebra.
A2, A8, A9.	Não	Preferia que todo assunto fosse explicado pelo professor, sem interação com os alunos; Abordagem totalmente diferente do conteúdo cobrado; Não ajudou nas contas cobradas em provas.

Fonte: Dados da pesquisa.

Um aluno justificou que não achou que a Metodologia contribuiu para o entendimento do conteúdo, porque preferia que tudo fosse explicado pelo professor e que não tivesse interação com os colegas. Dois alunos comentaram que a abordagem foi diferente da cobrada em prova.

Com relação a este último tópico levantado por dois alunos, a pesquisadora teve acesso a prova escrita feita pela professora, na prova foi abordado o conteúdo de limites e continuidade de funções. Com relação ao limite, a professora cobrou limite pela definição, limites laterais e cálculo de limites utilizando propriedades, tudo isso foi abordado nos problemas propostos e também explicado em sala pela professora com outros exemplos e exercícios. Além disso, parte da nota da avaliação consistiu dos problemas resolvidos pelos alunos. Talvez, o que esses dois alunos quiseram dizer, é que na prova, as questões não estavam contextualizadas, como nos problemas que foram aplicados durante as aulas.

Apesar dos alunos ainda não terem visto os demais assuntos tratados dentro do Cálculo, no início do semestre eles são apresentados ao plano de ensino da disciplina, que contém os conteúdos que serão abordados durante o semestre. Assim, na quarta questão, desejávamos saber se eles teriam interesse em ter outros conteúdos do Cálculo utilizando a Metodologia de RP. Alguns responderam que sim, e outros que não. Nem todos os alunos deixaram suas sugestões, mas os que deixaram, as apresentamos no Quadro 57.

Quadro 57 - Classificação das respostas da questão 4 do Questionário aplicado no Ensino Superior

Alunos	Categoria	Sugestões
A1, A3, A4, A5, A6, A7, A9, A10, A11, A12, A13, A16, A17, A19, A20.	Sim	Função (A12, A13, A16); Derivadas (A4, A5, A12); Aplicações de derivadas (A3, A5, A11); Integral (A17, A20); Método ser aplicado em um período extraclasse (A7).
A2, A8, A9, A14, A15.	Não	Não em Cálculo, mas na disciplina de Geometria Analítica (A14).
A18.	Em branco	-

Fonte: Dados da pesquisa.

O A9 respondeu está nas categorias “sim” e “não”, porque escreveu da seguinte forma: “sim e não, é legal para uma primeira aula, mas para o resto prefiro o método tradicional”. O

A2, disse que: “tem muitos assuntos de cálculo que se aprende mais exercícios de cálculo em si do que contextualizado”. Já o A14 escreveu que não acharia interessante trabalhar nos conteúdos de Cálculo com a Metodologia, mas sim na disciplina de Geometria Analítica.

Assim, como o A7 que respondeu que gostaria de ter outros conteúdos do Cálculo trabalhado com a Metodologia, porém em um horário extraclasse, o A15 utilizou uma justificativa semelhante do porque achava que não deveria ser trabalhado assim em sala de aula: “esse tipo de atividade requer um tempo maior, acredito que nossa grade horária não permite a execução de mais atividades”.

Na quinta questão, a finalidade era de examinar onde ocorreram as maiores dificuldades durante todo o desenvolvimento dos problemas. A partir das dificuldades citadas pelos alunos, elaboramos o Quadro 58:

Quadro 58 - Classificação das respostas da questão 5 do Questionário aplicado no Ensino Superior

Alunos	Categoria da Dificuldade	Justificativas
A2, A8, A9, A13, A19	Interpretação geral dos problemas.	Dificuldade em interpretar o enunciado de todos os problemas que estavam contextualizados; Dificuldade em conseguir assimilar que se tratavam de limites.
A1, A16	Especificamente do Problema 3.	Entender o significado de tolerância e desenhar o gráfico da função; Na definição de limites que se misturou com a parte da energia
A6, A7, A8	Elaboração das respostas.	Entendia o problema, mas não sabia como formalizá-lo na folha; Transferir as ideias para termos matemáticos e por escrito.
A10, A16, A20	Visualização de funções.	Dificuldade em visualizar as equações (funções) dos problemas; Na parte de montar os gráficos da função, pois sempre teve dificuldades em achar pontos necessários.
A11	Utilizar o limite.	Saber como utilizar o limite para resolver os problemas.
A17	Utilização do GeoGebra.	Escrever as fórmulas.
A5, A12, A14, A15	Não apresentaram dificuldades.	
A4, A18	Em branco.	

Fonte: Dados da pesquisa.

Através do Quadro 58 constata-se que alguns alunos tiveram algum obstáculo específico, por exemplo, cinco alunos citaram que tiveram dificuldades na interpretação geral dos problemas, dois comentaram que acharam complicado entender o problema 3, e três alunos citaram que apesar de entenderem o problema, não sabiam como expor suas ideias em linguagem matemática.

Ainda, três alunos descreveram que tiveram dificuldades em esboçar os gráficos das funções, e um deles até comentou que é uma dificuldade constante que tem. Apesar de não solicitarmos que os alunos expressarem suas respostas utilizando o limite, um aluno colocou como empecilho o fato de não saber como utilizar o limite para resolver os problemas. E, um dos alunos comentou que teve dificuldades para escrever as fórmulas no GeoGebra.

Na sexta e última questão, os alunos poderiam deixar suas sugestões de mudança na aplicação, três alunos apresentaram suas opiniões, conforme Figura 69.

Figura 69 - Sugestões dadas por alunos no Questionário aplicado no Ensino Superior

Uma maior frequência de atividades em casa.	A3
A proposta é boa para uma introdução, mas não como método de aprendizagem.	A8
Acho o método legal para aulas de introdução e não para explicação contínua do conteúdo.	A9

Fonte: Produção dos alunos, 2018.

Também, alguns alunos justificaram o porquê de não sugerirem mudanças ou acréscimos, a título de exemplo, a Figura 70 apresenta três respostas.

Figura 70 - Exemplos de respostas da questão 6 no Questionário aplicado no Ensino Superior

Não, para mim, como estudante leal de atenção, fico ótimo a forma das atividades. Embora dê para buscar métodos diferentes sempre.	A6
Não. Achei bem eficiente e prático da maneira que ela foi aplicada.	A14
Não, para mim foi suficiente o método apresentado.	A20

Fonte: Produção dos alunos, 2018.

Reiteramos que nem todos os alunos que participaram da aplicação dos problemas, estavam presentes no dia que foi aplicado o questionário de avaliação dos problemas, então, não tivemos o feedback de todos.

7.7 CONSIDERAÇÕES PARCIAIS

Antes de serem implementados em sala, os problemas e aplicativos foram enviados para professora da turma, que indicou algumas mudanças, essas que foram implementadas anteriormente a aplicação.

Com a aplicação das situações-problema em sala, e análise dos registros escritos e de áudio, foi possível observar as concepções dos alunos, suas dificuldades e principais dúvidas com relação aos problemas.

Na análise do Problema 1, percebemos que o aplicativo desenvolvido no GeoGebra ajudou os alunos a visualizarem o Método da Exaustão e chegarem na fórmula da área do círculo.

Ao mesmo tempo que o software ajudou no problema 1, pode ter influenciado os alunos a não esboçarem corretamente na folha entregue o gráfico solicitado no Problema 2, pois apenas dois grupos perceberam a descontinuidade na função. Ainda no Problema 2, os alunos tiveram dificuldades em entender o $0/0$ que aparecia quando se substituía x por 4 na função da segunda parte do problema. Os grupos a princípio também estavam achando que o limite da função não poderia ser 8 , pois ela não estava definida para $x=4$. Mas, com auxílio da professora e pesquisadora, que circulavam entre os grupos tirando suas dúvidas, a maioria chegou na conclusão correta.

No Problema 3 os alunos tiveram mais dificuldades em representar graficamente as questões resolvidas, contudo, conseguiram chegar numa relação para δ e ε , que era o objetivo principal do problema. Assim, mesmo sem terem sido apresentados anteriormente a definição formal do limite, encontraram uma relação para o mesmo. Um ponto desfavorável no desenvolvimento desse problema, é que os alunos não quiseram participar da plenária.

No Problema 4, os grupos que construíram uma função na letra b , estavam tendo dúvidas em como isolar a variável, dessa forma, foi necessário lembrar os alunos sobre as propriedades de logaritmos.

Durante a resolução em sala dos problemas, a professora e pesquisadora observavam e estimulavam o trabalho dos alunos, os auxiliavam a superar obstáculos durante o entendimento ou resolução das questões. Segundo Pironel e Vallilo (2017),

Durante o percurso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, o professor tem a oportunidade de levantar questões pertinentes ao desenvolvimento do problema, a fim de conduzir seus alunos ao aprendizado. (PIRONEL; VALLILO, 2017, p. 283).

Com relação a essa citação, através dos diálogos apresentados que ocorreram entre os alunos e a professora ou pesquisadora, percebe-se que isso foi realizado, pois eram feitos questionamentos aos grupos com a intenção de que realmente chegassem a compreensão do que estava sendo proposto.

A respeito da gravação dos áudios, além de verificar a interação dos alunos e professor, foi possível identificar as interações entre os integrantes, suas discussões e estratégias de resolução, isso certificou o que Van de Walle (2009, p. 59) fala sobre a resolução de problemas no ensino: “Cada estudante consegue dar significado à tarefa usando suas próprias ideias. Além disso, eles expandem essas ideias e desenvolvem sua compreensão enquanto ouvem e refletem sobre as estratégias de solução dos outros.” No entanto, alguns alunos não quiseram trabalhar em grupos, e outros que estavam reunidos, não estavam discutindo entre eles as questões – estavam fazendo cada um por conta – talvez, por não terem proximidade com os colegas. Até por isso, que em algumas gravações realizadas em certos grupos, não foi possível apresentar algum exemplo de diálogo nas análises. Damiani (2008) argumenta em seu trabalho a favor do desenvolvimento de atividades colaborativas entre estudantes, segundo a autora,

A revisão das investigações acerca do trabalho colaborativo – em suas diferentes formas – assim como o entendimento do processo que o sustenta sugerem que esse tipo de atividade apresenta potencial para auxiliar no enfrentamento dos sérios desafios propostos pela escola atual em nosso país. (DAMIANI, 2008, p. 224).

Por isto, acreditamos ser necessário incentivar os alunos a trabalharem mais em grupos em todos os níveis de ensino, já que, o trabalho colaborativo possibilita “o resgate de valores como o compartilhamento e a solidariedade – que se foram perdendo ao longo do caminho trilhado por nossa sociedade, extremamente competitiva e individualista.” (DAMIANI, 2008, p. 224).

Pelas respostas dos alunos no questionário, vemos que a utilização do GeoGebra como mediador na RP foi positiva, pois mencionaram que ele foi ótimo para visualização, contribuiu na compreensão de conceitos, fornecendo uma melhor noção do limite. E durante a aplicação, pudemos observar algumas mudanças que seriam necessárias nos aplicativos para apresentação do produto educacional, como a escala do applet do problema 2 que estava confundindo os

alunos, e também modificar algumas cores que não ficaram boas na projeção, como o azul escuro.

A maioria dos alunos colocaram no questionário que o desenvolvimento dos problemas através da RP contribuiu para o entendimento do conteúdo, pois por meio dela foi possível visualizar aplicações do limite, abordar aspectos geométricos do assunto, e verificar outros meios de resolução dos problemas apresentado pelos colegas e pelas explicações da professora. Segundo Kenski (2003, p. 9) essas propostas de ensino colaborativo “(...) encaminham os participantes para novos conhecimentos, comportamentos e atitudes, requeridas pelo novo estágio de desenvolvimento da sociedade”. Ademais,

Buscam o desenvolvimento de competências pessoais e grupais valorizadas socialmente como: participação coletiva, autonomia e interdependência, flexibilidade, o desafio de lidar com pensamentos divergentes, a superação em conjunto de problemas postos, a vivência de diferenciados estilos de coordenação, a avaliação permanente e a análise dos processos e dos procedimentos utilizados individual e coletivamente para alcançar os resultados. (KENSKI, 2003, p. 9).

Acerca do conceito de limite, foi observado que durante a resolução dos problemas, os alunos perpassaram por alguns dos obstáculos presentes no referencial exposto sobre o limite, como o obstáculo lógico e obstáculo do símbolo descrito por Sierpiska (1985). Contudo, esses fatos foram discutidos durante a plenária e formalização dos problemas, assim, sendo promovido que os alunos refletissem sobre o que tinham descrito e possivelmente pudessem superar tais obstáculos.

Quanto a ferramenta do Grupo da plataforma online do GeoGebra, achamos bem interessante sua utilização, visto que ela proporcionou que a professora fizesse a correção e desse o feedback imediato aos alunos.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Na presente pesquisa, conforme referencial teórico construído, apresentamos alguns aspectos relacionados ao ensino do CDI no Brasil, tecemos algumas considerações a respeito das conexões possíveis do Cálculo no Ensino Médio, e elencamos obstáculos na aprendizagem do conceito de limite. Também descrevemos a respeito das TD, que de acordo com os referenciais, há um enfoque positivo que associa o uso delas nos ambientes de aprendizagem.

Com as características dos softwares educacionais expostos, temos que o software GeoGebra contém os aspectos básicos que devem ser considerados no processo de escolha de um software para uso na Educação, conforme orienta um dos documentos da coleção “Informática para a mudança na Educação” fornecido pelo MEC.

Também apresentamos as concepções que a Resolução de Problemas assume, mostrando os motivos de escolha da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problema, que foi base para construção e aplicação das situações-problema em sala de aula. Além disso, com nossa pesquisa foi possível perceber que há estudos relacionando conceitos de CDI com a RP, e estudos que abordam conceitos de CDI mediados pelas TD, trazendo motivos positivos para se trabalhar com essas estratégias. Porém, quando se trata do conceito de limite abordado através da RP mediada pelo software GeoGebra, não foram encontradas pesquisas, portanto, acreditamos que essa dissertação possa trazer alguns resultados importantes nessas perspectivas.

Buscando responder à questão “Como a Metodologia de ensino através da Resolução de Problemas mediada pelo GeoGebra pode contribuir no ensino e aprendizado do conceito de limite?”, que suscitou essa pesquisa, procuraremos agora fazer uma reflexão, em linhas gerais, das aplicações que ocorreram no Ensino Médio e Ensino Superior, visto que, algumas conclusões parciais já foram expostas nos capítulos 6 e 7, respectivamente.

No Ensino Médio foram propostos problemas semelhantes à maneira como os gregos manipulavam a soma de infinitos termos de uma sequência na antiguidade, com intuito de mostrar para os alunos que a Matemática é uma forma histórica de resolver problemas humanos, e desafiá-los a desmistificar paradoxos descritos por Zenão de Eleia (c. 450 a.C.). Com o desenvolvimento desses problemas foi possível introduzir o conceito de limite, que é necessário para definir a soma dos infinitos termos de uma PG – conteúdo que estava sendo trabalhado. Ou seja, assim como propõem Ávila (2010), Machado (2015), Smole e Diniz (2013) optamos por uma abordagem na qual o conceito de limite apareceu quando foi necessário para resolução de um problema, desse modo, fazendo uma apresentação simples e intuitiva do conceito, o que

foi suficiente para a turma perceber a importância dele, em vista que, o limite é essencial para a fórmula da soma dos infinitos termos de uma PG.

No Ensino Superior, os problemas foram propostos de forma a atender a matriz curricular no ensino de limites, sendo assim, com o desenvolvimento dos problemas, foi trabalhado em sala de aula, o conceito geométrico e intuitivo de limite, limites laterais, definição de limite, propriedades e cálculo de limites. Eles também foram elaborados com a intenção de construir conceitos e conteúdos novos a partir de conhecimentos prévios, posto que, na Metodologia trabalhada, os problemas são propostos aos alunos antes mesmo de ser apresentado formalmente o conteúdo. Outrossim, é que

Para a maioria dos conceitos matemáticos, o ensino não começa em território virgem. No caso de limites, antes de qualquer ensino sobre o assunto, o aluno já tem um certo número de ideias, intuições, imagens, conhecimentos, que vêm de sua experiência cotidiana, como o significado coloquial dos termos utilizados. (CORNU, 2002, p. 154, tradução nossa).

Consideramos que as aplicações tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior foram bem interessantes, pois com elas foi possível observar as concepções dos alunos, suas dificuldades e principais dúvidas com relação aos problemas, assim como, analisar as estratégias e procedimentos utilizados nas resoluções. Logo, conforme afirmam Smole e Diniz (2013, p. 325) ao se priorizar a resolução de problemas, tratando de situações diversificadas, “oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, de construir estratégias de resolução e argumentações, de relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, de perseverar na busca da solução.” Ademais, a cooperação entre os alunos, suas exposições de ideias e a análise das questões feitas posteriormente a aplicação, foram importantes para promover uma reflexão de uma nova possibilidade para trabalhar conteúdos de Matemática. Portanto, realizando as etapas propostas na Metodologia através da RP, como a plenária com a turma, e a formalização do conteúdo – utilizando as resoluções dos alunos – foi possível desenvolver uma aprendizagem de modo colaborativo em sala de aula (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011; ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

Um ponto a se evidenciar, é que no Ensino Superior, alguns alunos não quiseram se unir a algum dos grupos para resolver a situação-problema proposta, um desses até mencionou no questionário de avaliação, que gostaria que não houvesse interação com os colegas, e apenas o professor explicasse o conteúdo, assim, este disse que não achou que a Metodologia contribuiu para o entendimento do conteúdo. Outro fato, ainda no Ensino Superior, foi a dificuldade encontrada para os alunos socializarem suas respostas com a turma na etapa da plenária, conseqüentemente, defasando a busca do consenso (etapa 8) - onde em um esforço conjunto, professor e alunos tentam chegar a um consenso sobre o resultado correto das questões. Em

vista disso, achamos importante destacar tais desafios que tivemos ao implementar a Metodologia em sala de aula. Kilpatrick (2014, p. 7), em uma entrevista, comentou que com relação a RP, “os alunos precisam de muitas, muitas oportunidades, tanto para ver as perguntas e sugestões heurísticas utilizadas na resolução de problemas desafiantes, como para praticar usando, eles próprios, essas perguntas e sugestões.” Por conseguinte, acreditamos ser importante proporcionar mais oportunidades para os alunos praticarem a RP e se adaptarem a essa forma de trabalho, e isso pode ser feito desde o Ensino Básico.

Cabe lembrar que a Metodologia sempre esteve atrelada pela mediação do software GeoGebra. E com relação ao GeoGebra podemos afirmar que ele auxiliou tanto na resolução dos problemas, quanto na formalização destes, feita pela pesquisadora no Ensino Médio e pela professora no Ensino Superior.

Também salientamos que o desenvolvimento e aplicação dos problemas através da RP com a mediação do GeoGebra apresentou alguns obstáculos, como exemplo, é que na escola em que foi realizada a implementação no Ensino Médio, não possuía laboratório de informática que possibilitasse a manipulação do software, por isso, foi necessário levar tablets fornecidos pela UDESC para os alunos manipularem o aplicativo desenvolvido. Ao mesmo tempo, na UDESC, em uma das aulas não havia laboratório disponível para realizar a implementação, sendo necessário solicitar aos alunos que levassem seus dispositivos (notebooks/tablets), e mesmo em um dos laboratórios em que foi feita a aplicação, não foi possível instalar o software para ser utilizado offline, assim, os alunos o acessaram através da plataforma online. Portanto, implementar aulas com TD é um desafio, pois demanda tempo para preparação, organização e planejamento, além disto, exige uma infraestrutura adequada. Nesse contexto,

Dentre os muitos desafios faz-se necessário novos investimentos em infraestrutura e organização pedagógica como uma forma de acompanhar a velocidade com que a tecnologia muda. Tais investimentos abarcam a renovação constante de equipamentos, oferta e acesso e meios para que a aprendizagem ocorra, contratação e formação de profissionais especializados para manutenção e operacionalização dos equipamentos e de professores. Superação das limitações que ainda dificultam a união das tecnologias à educação, entre muitos outros. (FRIZON; MAIER; RICHIT, 2014, p. 658).

Apesar dos desafios, constatamos vários aspectos positivos na aprendizagem de limites, ao ser trabalhado com a Metodologia e o software em sala, como ilustração, foi o feedback dado pelos alunos no questionário de avaliação, por exemplo, no Ensino Médio citaram que a aplicação saiu do padrão das aulas que estão acostumados a ter, já que elas foram práticas e dinâmicas, o que os estimulou a pensar no contexto das atividades e também os desafiou na interpretação dos paradoxos. Alguns alunos também mencionaram que não tiveram dificuldades em nenhum momento da aplicação, e uma das justificativas dadas por eles, foi que

em grupos conseguiram solucionar as dúvidas que surgiam. Já no Ensino Superior, mencionaram que a aplicação proporcionou novas formas de ver cada problema, estimulou a pensar no princípio dos conceitos, conseqüentemente contribuindo no entendimento de limites.

Reiteramos que os resultados obtidos nessa pesquisa são decorrentes da aplicação em apenas uma turma no Ensino Médio e uma turma no Ensino Superior, ou seja, apesar de nossa pesquisa ser de cunho qualitativo, consideramos nosso campo amostral pequeno para ter inferências generalizada a respeito da utilização da Metodologia com a mediação do GeoGebra no ensino e aprendizado de limites. Por isso, incentivamos que professores/pesquisadores também desenvolvam a proposta em suas turmas.

Com esse intuito, disponibilizamos o produto educacional resultante da pesquisa através do GeoGebraBook na plataforma do GeoGebra. Nessa ferramenta, os recursos ficam disponíveis para que o professor possa utilizá-los durante suas aulas e/ou como material de apoio. E pelo fato de não ser algo fechado, a versão online do produto educacional poderá passar por melhorias provenientes de nossas práticas futuras ou de práticas de outros professores que poderão nos mandar sugestões e comentários, ou até mesmo ser modificado por atualizações do próprio GeoGebra.

Finalizamos nossas considerações, apontando algumas sugestões para estudos futuros, que foram oriundas das sugestões dadas pelos alunos. No Ensino Médio sugere-se que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problema mediada pelo software possa ser trabalhada também com os conteúdos de estatística, matemática financeira e progressões. No Ensino Superior, dentro de CDI, os alunos sugeriam o trabalho com funções, derivadas e integrais, e para além do Cálculo, poderiam ser desenvolvidas pesquisas nesse contexto com conteúdo da disciplina de Geometria Analítica. Além disso, uma proposta colocada, é o desenvolvimento da aplicação em horário extraclasse.

REFERÊNCIAS

- ABAR, Celina Aparecida Almeida Pereira. Proposta de Construções de Problemas no GeoGebra. In: 7º Congresso Uruguayo de Educación Matemática. **Actas del CUREM 7**. Motevidéu, Uruguai, v. 7, p. 99-105, 2017.
- ABAR, Celina Aparecida Almeida Pereira; ALMEIDA, Marcio Vieira de. Geogebra como organizador de recursos tecnológicos para o ensino e aprendizagem da matemática em uma formação de professores. **Ensino da Matemática em Debate**, São Paulo, v. 4, n. 2 p. 136–144, 2017.
- ABDELMALACK, Andrea. **O Ensino-Aprendizagem-Avaliação da Derivada para o Curso de Engenharia Através da Resolução de Problemas**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2011.
- ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2005.
- ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de matemática; porque através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; JUSTULIN, Andressa Maria (Org.). **Resolução de problemas: teoria e prática**. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35-52.
- ALVES, Davis Oliveira. **Ensino de funções, limites e continuidade em ambientes educacionais informatizados: uma proposta para cursos de introdução ao cálculo**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Ouro Preto, 2010.
- ALVES-MAZZOTTI, Alda Judith. O Método nas Ciências Sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, Alda Judith; GEWANDSZNAJDER, Fernando (Org.). **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa**. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 1998.
- AMORIM, Frank Victor. **Experiência de atividades para o cálculo diferencial e integral com o software GeoGebra**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.
- ARCAVI, Abraham. The role of visual representations in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands, v. 52, p. 215-241, 2003.
- ÁVILA, Geraldo. **Várias faces da matemática: tópicos para licenciatura e leitura geral**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.
- BARBOSA, Sandra Malta. **Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia**. Tese (Doutorado em Educação Matemática.) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2009.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Tradução: Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70, 1977.

BARUFI, Maria Cristina Bonomi. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. 184 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BELTRÃO, Maria Eli Puga. **Ensino de Cálculo pela Modelagem Matemática e Aplicações: teoria e prática**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. Investigação qualitativa em Educação: fundamentos, métodos e técnicas. In: **Investigação qualitativa em educação**. Portugal: Porto Editora, p. 15-80, 1994.

BORBA, Marcelo de Carvalho.; VILLARREAL, Mónica Ester. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation**. v. 39, New York: Springer, 2005.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia R.; GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BOYER, Carl Benjamin. **The history of the calculus and its conceptual development**. New York: Dover, 1949.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BOZ, Nihat. Dynamic visualization and software environments. **The Turkish Online Journal of Educational Technology**. v. 4, p. 26-32, jan. 2005.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, 2002.

BROUSSEAU, Guy. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In: Willy Vanhamme e Jacqueline Vanhamme (Ed.). **La problématique et l'enseignement de la mathématique. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques**. França: Louvain-la-neuve, p.101-117, 1976.

BÜYÜKKÖROGLU, Taner et al. The effect of computers on teaching the limit concept. **International Journal for Mathematics Teaching and Learning**. Disponível em: <<http://www.cimt.org.uk/journal/>>. Acesso em: 30 ago. 2017.

CARVALHO, Flávio de Paula Soares; CIVARDI, Jaqueline Araújo. Novas tecnologias, velhas atitudes, práticas antigas. In: II Congresso Internacional TIC e Educação. **Anais...** Lisboa, Portugal: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2012. p. 720-736.

CELESTINO, Marcos Roberto. **Concepções sobre limite:** imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do ensino superior. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2008.

CHUEKE, Gabriel Vouga; LIMA, Manolita Correia. Pesquisa Qualitativa: evolução e critérios. **Revista espaço acadêmico**. n. 128, p. 63-69, jan. 2012.

CORNU, Bernard. Limits. In: David Tall (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking**. v.11. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

CRUZ NETO, Otávio. O trabalho de campo como descoberta e criação. In: MINAYO, Maria Cecília de Souza (Org.). **Pesquisa Social:** teoria, método e criatividade. 18 ed. Petrópolis: Vozes, 2001, p. 51-66.

D'AMBROSIO, Beatriz Silva. O professor-pesquisador diante da produção escrita dos alunos. In: ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; LEAL JUNIOR, Luiz Carlos; PIRONEL, Márcio (Org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 109-129.

DAMIANI, Magda Floriana. Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios. **Educar em revista**, n. 31, p. 213-230, 2008.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática** (Ensino Médio). v. único. 1. ed. São Paulo: Ática, 2005.

DOMENICO, Luiz Carlos. **Matemática 3 em 1**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 19__.

DUARTE, Rosália. Pesquisa qualitativa: reflexões sobre o trabalho de campo. **Cadernos de Pesquisa**. n. 115, p. 139-154, mar. 2002.

ESPINOSA, Fernando Hitt. Researching a problem of convergence with Mathematica: history and visualization of a mathematical idea. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**. v. 28, n. 5, p. 697-706, 1997.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Higino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Unicamp, 2011.

FARIA, Jairo Rocha de; FREIRE, Emerson Souza. O conceito de derivada de uma função: uma construção alternativa ao conceito de limites. In: Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia. **Anais...** Juiz de Fora, 2014. p. 1-12.

FRIZON, Vanessa; MAIER, Lidiane Tania Ronsoni; RICHIT, Adriana. Tecnologias Digitais e Ambientes de Aprendizagem Formal e Informal: possibilidades e desafios. In: III Congresso Internacional TIC e Educação. **Anais...** Lisboa, Portugal: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p. 653- 659.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GOLDENBERG, Mirian. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

GOMES, Romeu. A análise de dados em pesquisa qualitativa. In: MINAYO, Maria Cecília de Souza (Org.). **Pesquisa Social: teoria, método e criatividade**. 18 ed. Petrópolis: Vozes, 2001, p. 67-80.

GONÇALVES, Daniele Cristina. **Aplicações de derivadas em Cálculo I: atividades investigativas utilizando o GeoGebra**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Ouro Preto, 2012.

GRAY, Eddie; TALL, David. Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. **The Journal for Research in Mathematics Education**, 26 (2), p. 115-141, 1994.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. v. 1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTZ, 2013.

GUZMÁN, Miguel. The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis. In: **Proceedings of 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level**. Hersonissos: University of Crete, p. 1-24, 2002.

JUSTULIN, Andressa Maria; NOGUTI, Fabiane Cristina Höpner. Formação de professores e resolução de problemas: um estudo a partir de teses e dissertações brasileiras. In: ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; LEAL JUNIOR, Luiz Carlos; PIRONEL, Márcio (Org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 21-53.

KENSKI, Vani. Aprendizagem Mediada Pela Tecnologia. **Revista Diálogo Educacional**, v. 4, n. 10, p. 1-10, 2003.

KILPATRICK, Jeremy. Como vamos de resolução de problemas? Uma conversa escrita com Jeremy Kilpatrick. **Revista Educação e Matemática**. Lisboa, n. 130, p. 3-9, nov./dez. 2014.

KING, James; SCHATTSCHEIDER, Doris. **Geometry Turned on: dynamic software in learning, teaching, and research**. n. 41, Cambridge University Press, 1997.

KUMSA, Abraham; PETTERSSON, Kerstin; ANDREWS, Paul. Obstacles to students' understanding of the limit concept. In: **10º Congress of European Research in Mathematical Education**. 2017. Disponível em: <https://keynote.conference-services.net/resources/444/5118/pdf/CERME10_0231.pdf>. Acesso em: 25 jan. 2017.

LIMA, Gabriel Loureiro de. **A disciplina de Cálculo I do curso de Matemática da Universidade de São Paulo: um estudo de seu desenvolvimento, de 1934 a 1994**. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

LIMA, Gabriel Loureiro. O ensino do cálculo no Brasil: breve retrospectiva e perspectivas atuais. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática. **Anais...** Curitiba, 2013a. p. 1-15.

LIMA, Gabriel Loureiro. A implantação e o desenvolvimento da disciplina de cálculo no Brasil: o modelo difundido pela USP. In: VII Congresso Iberoamericano de Educação Matemática. **Anais ...** Montevideu, Uruguai, 2013b. p. 1742-1749.

LUZ, Valéria Moura. **Introdução ao cálculo**: uma proposta associando pesquisa e intervenção. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro, 2011.

MACHADO, Rosa Maria. **A visualização na resolução de problemas de cálculo diferencial e integral no ambiente computacional MPP**. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

MACHADO, Nílson José. Cálculo no ensino médio: já passou da hora. **Revista eletrônica {Puro Imaginário}**. 28 out. 2015. Disponível em: <<https://imaginariopuro.wordpress.com/2015/10/28/calculo-no-ensino-medio-ja-passou-da-hora/>>. Acesso em 11 jun. 2018.

MELO, Felipe Guilherme; AMORIM, José Adeildo de; BARROS, Bruna Rosa de. Abordagens educacionais e desenvolvimento de recursos educativos digitais para o ensino da matemática. In: II Congresso Internacional TIC e Educação. **Anais...** Lisboa, Portugal: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2012. p. 216-236.

MENINO, Fernanda dos Santos; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. O problema da calha e o uso da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas nos cursos de engenharia. In: ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; LEAL JUNIOR, Luiz Carlos; PIRONEL, Márcio (Org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 221-246.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. Ciência, técnica e arte: o desafio da pesquisa social. In: _____. **Pesquisa Social: teoria, método e criatividade**. 18. ed. Petrópolis: Vozes, 2001, p. 9-31.

MIRANDA, Weverton. Erros e obstáculos: os conteúdos matemáticos do ensino fundamental no processo de avaliação. **Revista Margens Interdisciplinar**, v. 7, n. 8, p. 155-171, 2013.

MOLON, Jaqueline. **Cálculo no ensino médio**: uma abordagem possível e necessária com auxílio do software GeoGebra. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Santa Maria, 2013.

MORAES, Mônica Suelen Ferreira. **Um estudo sobre as implicações dos obstáculos epistemológicos de limite de função em seu ensino e aprendizagem**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Belém, 2013.

MORAES, Mariza Silva De. Tecnologias Digitais e Informática Educativa: ponderações históricas e teóricas. **Revista EaD & Tecnologias Digitais na Educação** v. 3, n. 2, p. 8-19, 2014.

NASCIMENTO, Jorge Costa. **O conceito de limite em cálculo**: obstáculos e dificuldades de aprendizagem no contexto do ensino superior de matemática. Tese (Doutorado em Psicologia) - Universidade Federal de Pernambuco, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Recife, 2003.

NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa et al. GGBOOK: uma plataforma que integra o software de geometria dinâmica GeoGebra com ambientes de texto. In: VI Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática. In: **Anais...** UFSCar, São Carlos, jul. 2013. p. 1-21.

NUNES, Célia Barros. **O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas:** perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2010.

NUNES, Célia Barros; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Espaço e forma. In: ALLEVATO Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; JUSTULIN, Andressa Maria (Org.). **Resolução de problemas:** teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

OECD. **Results:** Creative Problem Solving: Students' Skills in Tackling Real-Life Problems. v. 5, PISA (2012), OECD Publishing (2014). Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1787/9789264208070-en>>. Acesso em: 06 mar. 2017.

OLIVEIRA, Celina Couto de; COSTA, José Wilson da; MOREIRA, Mercia. **Ambientes informatizados de aprendizagem:** produção e avaliação de software educativo. Campinas: Papirus, 2001.

OLIVEIRA, Daniel Gustavo de. **Explorando o conceito de derivada em sala de aula, a partir de suas aplicações e sob uma perspectiva histórica.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática.** São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-220.

ONUCHIC, Lourdes De La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. As Diferentes “Personalidades” do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas. **Bolema**, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 79-102, jan. 2008.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. In: **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

PAGANI, Érica Marlúcia Leite. ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral: um mapeamento de algumas teses e dissertações produzidas no Brasil. **VIDYA**, Santa Maria, v. 34, n. 2, p. 61-74, jul./dez., 2014.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática:** uma Análise da Influência Francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PEREIRA, Vinicius Mendes Couto. **Cálculo no ensino médio:** uma proposta para o problema da variabilidade. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro, 2009.

PESCADOR, Cristina Maria. **Educação e Tecnologias Digitais: cartografia do letramento digital em uma escola do campo.** Tese (Doutorado em Informática na Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias Na Educação, Porto Alegre, 2016.

PINHEIRO, José Milton Lopes. Matemática, resolução de problemas e sala de aula: a aprendizagem em questão. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática. **Anais...** Curitiba, 2013. p. 1-10.

PINTO, Gisele Teixeira Dias Costa. **Limite de função real no ensino médio: uma proposta para o seu ensino e aprendizagem.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010a.

PINTO, Silvia Prietsch Wendt. **Ensino e aprendizagem de derivada na educação matemática a distância por meio da metodologia da resolução de problemas.** Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) - Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2010b.

PIRONEL, Márcio. **A avaliação integrada no processo de ensino-aprendizagem da matemática.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2002.

PIRONEL, Márcio; VALLILO, Sabrina Aparecida Martins. O papel da avaliação na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas. In: ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; LEAL JUNIOR, Luiz Carlos; PIRONEL, Márcio (Org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 279- 304.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.** Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PRESMEG, Norma; BERGSTEN, Christer. Preference for Visual Methods: an International Study. **Proceedings of the Psychology of Mathematics Education**, Recife, v. 3, n.19, p. 58-65, 1995.

RASMUSSEN, Chris, et al. Research on calculus: what do we know and where do we need to go? **ZDM - The International Journal on Mathematics Education**, v. 46, n. 4, p. 507-515, ago. 2014.

REZENDE, Wanderley Moura. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica.** Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, Faculdade de Educação, 2003.

RIBEIRO, Marcos Vinícius. **O ensino do conceito de integral, em sala de aula, com recursos da história da matemática e da resolução de problemas.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2010.

RICHT, Andriceli. **Aspectos Conceituais e Instrumentais do Conhecimento da Prática do Professor de Cálculo Diferencial e Integral no Contexto das**

Tecnologias Digitais. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2010.

RICHIT, Andriceli, et al. Contribuições do software GeoGebra no estudo de cálculo diferencial e integral: uma experiência com alunos do curso de geologia. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 90-99, 2012.

RICHIT, Andriceli; FARIAS, Maria Margarete do Rosário. Cálculo Diferencial e Integral e Tecnologias Digitais: Perspectivas de Exploração no Software GeoGebra. In: I Congresso de Educación Matemática de América Central y El Caribe. **Anais...** República Dominicana, 2013. p. 1-9.

RILHO, Bênia Costa. **Uma experiência em ensino e aprendizagem:** modelos de investimento e as derivadas. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2005.

ROSSI, Maria Ilíria. **A aprendizagem das aplicações das integrais indefinidas em equações diferenciadas através da resolução de problemas.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2012.

SANGOI, Elio. **Contribuições da resolução de problemas e do software *Maple* para a aprendizagem significativa dos conceitos e propriedades da derivada.** Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) - Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2010.

SANTOS, Maria Bethânia Sardeiro. **Um olhar para o conceito de limite:** constituição, apresentação e percepção de professores e alunos sobre o seu ensino e aprendizado. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

SARVESTANI, Andisheh Kamali. **Contemplating problems taken from the history of limits as a way to improve students' understanding of the limit concept.** Dissertation, Universiteit van Amsterdam, 2011.

SBEM. A formação do professor de Matemática nos cursos de licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária. **Boletim Informativo**, n. 21, 2013.

SCHROEDER, Thomas L.; LESTER JR, Frank K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). **New Directions for Elementary School Mathematics.** Reston: NCTM, p. 31-42, 1989.

SETTE, Sonia Schechtman; AGUIAR, Márcia Angela; SETTE, José Sérgio Antunes. Formação de professores em informática na educação: um caminho para mudanças. **Coleção Informática para a Mudança na Educação. Brasília: MEC/SED**, 1999.

SIERPINSKA, Anna. Humanities students and epistemological obstacles related to limits. **Educational Studies in Mathematics**, n. 18, p. 371–397, 1987.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática Ensino Médio.** v. 3, 8. ed., São Paulo: Saraiva, 2013.

SOUZA, Helena Tavares. **Um estudo com professores do ensino médio sobre função modular por meio de resolução de problemas utilizando o software GeoGebra como estratégia pedagógica.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

SPINA, Catharina de Oliveira Corcoll. **Modelagem matemática no processo ensino aprendizagem do cálculo diferencial e integral para o ensino médio.** Dissertação (Mestrado Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2002.

STEWART, James. **Cálculo.** Tradução: Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins. v. 1, 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2012a.

STEWART, James. **Cálculo.** Tradução: Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins. v. 2, 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2012b.

SWINYARD, Craig; LARSEN, Sean. Coming to understand the formal definition of limit: Insights gained from engaging students in reinvention. **Journal for Research in Mathematics Education**, 43(4), p. 465-493, 2012.

TALL, David; VINNER, Shlomo. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, n. 12, p. 151-169, 1981.

TALL, David. Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus. In: S. Cunningham e W. S. Zimmermann (Ed.) **Visualization in teaching and learning mathematics.** Mathematical Association of America, Washington, 1991. p. 105-119.

THOMAS, George B. **Cálculo.** v. 1, 11. ed. São Paulo: Addison Wesley/Pearson, 2009.

TORRES, Terezinha Ione Martins; GIRAFFA, Lucia Maria Martins. O Ensino do Cálculo numa perspectiva histórica: da régua de calcular ao MOODLE. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**, UFSC, v. 4.1, p. 18-25, 2009.

VALE, Isabel. Resolução de problemas um tema em contínua discussão: vantagens das resoluções visuais. In: ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; LEAL JUNIOR, Luiz Carlos; PIRONEL, Márcio (Org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 131-162.

VALENTE, José Armando. Análise dos Diferentes Tipos de Software usados na Educação. In: _____. **O Computador na Sociedade do Conhecimento.** Campinas: NIED/Unicamp, 1999.

VAN DE WALLE, John. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VIEIRA, Aldo Freitas. **Ensino do Cálculo Diferencial e Integral:** das técnicas ao *humans-with-media*. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

VILLARREAL, Mónica Ester. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas.** Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 1999.

VOGADO, Gilberto Emanuel Reis. **O ensino e a aprendizagem das ideias preliminares envolvidas no conceito de integral, por meio da resolução de problemas.** Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

ZUCHI, Ivanete. **A abordagem do conceito de limite via sequencia didática: do ambiente lápis e papel ao ambiente computacional.** Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) - Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas, Florianópolis, 2005.

ZUFFI, Edna Maura; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. O ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas e os processos cognitivos superiores. **Revista Ibero-americana de Edición Matemática**, n. 11, p. 79-89, set. 2007.

WEIGAND, Hans-Georg. A discrete approach to the concept of derivative. **ZDM - The International Journal on Mathematics Education**, v. 46, n. 4, p. 603-619, ago. 2014.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Termo de consentimento Ensino Médio

**TERMO DE CONSENTIMENTO**

O(a) seu(ua) filho(a)/dependente está sendo convidado a participar de uma pesquisa de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias da Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC, intitulada: *Conceito de limite sob a perspectiva da resolução de problemas aliada ao GeoGebra: um produto educacional*, da acadêmica *Jéssica Meyer Sabatke*, tendo como objetivo analisar as soluções apresentadas nas atividades de Progressão Geométrica Infinita aplicadas nas aulas de Matemática, sob concordância da professora de Matemática Ana Paula da Silva Gueiros Duarte professora dele(a), e também da direção da EEB Professor Gustavo Augusto Gonzaga.

O(a) seu(ua) filho(a)/dependente não terá despesas e nem será remunerado pela participação na pesquisa. Os riscos destes procedimentos são mínimos, havendo a possibilidade de cansaço para responder as atividades. Para minimizar estes riscos, as atividades serão realizadas em grupo em horário regular de aula.

A identidade do(a) seu(ua) filho(a)/dependente será preservada pois cada indivíduo será identificado por um número.

Os benefícios e vantagens em participar deste estudo serão teóricos e empíricos, pois permitirão conhecer e analisar os desafios encontrados nas estratégias de resolução de problemas das atividades de Progressão Geométrica Infinita, podendo substanciar ações de melhorias no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

As pessoas que estarão acompanhando os procedimentos serão a estudante de mestrado *Jéssica Meyer Sabatke*, e as professoras orientadoras *Ivanete Zuchi Siple* e *Elisandra Bar de Figueiredo*.

Solicitamos a sua autorização para o uso dos dados de do(a) seu(ua) filho(a)/dependente, como as resolução das atividades e da transcrição de áudios que serão/foram realizados em sala de aula para a produção de uma Dissertação de Mestrado. A privacidade do(a) seu(ua) filho(a)/dependente será mantida através da não-identificação do nome. O(a) senhor(a) poderá solicitar o não uso das transcrições dos áudios e resoluções das atividades do(a) seu(ua) filho(a)/dependente do estudo a qualquer momento, sem qualquer tipo de constrangimento.

Este termo de consentimento livre e esclarecido é feito em duas vias, sendo que uma delas ficará em poder do pesquisador e outra com o sujeito participante da pesquisa.

Mestranda *Jéssica Meyer Sabatke*
 Telefone: (47) 999240406
 Endereço: Rua Rua Paulo Malschitzki, 200
 Campus Universitário Prof. Avelino Marcante,
 Bairro Zona Industrial Norte - Joinville - SC

Professora *Ivanete Zuchi Siple*
 Telefone: (47) 40097836
 Endereço: Rua Paulo Malschitzki, 200
 Campus Universitário Prof. Avelino Marcante,
 Bairro Zona Industrial Norte - Joinville - SC

TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e, que recebi de forma clara e objetiva todas as explicações pertinentes ao projeto e, que todos os dados a respeito do meu(minha) filho(a)/dependente serão sigilosos. E ainda, fui informado que posso retirar meu(minha) filho(a)/dependente do estudo a qualquer momento.

Nome do aluno: _____

Nome do responsável por extenso: _____

Assinatura _____ Local: _____ Data: ____/____/____.

APÊNDICE B – Ensino Médio, Problema 1: Paradoxo dos passos

Alunos: _____

Problema 1: O paradoxo dos passos**Siga as instruções:**

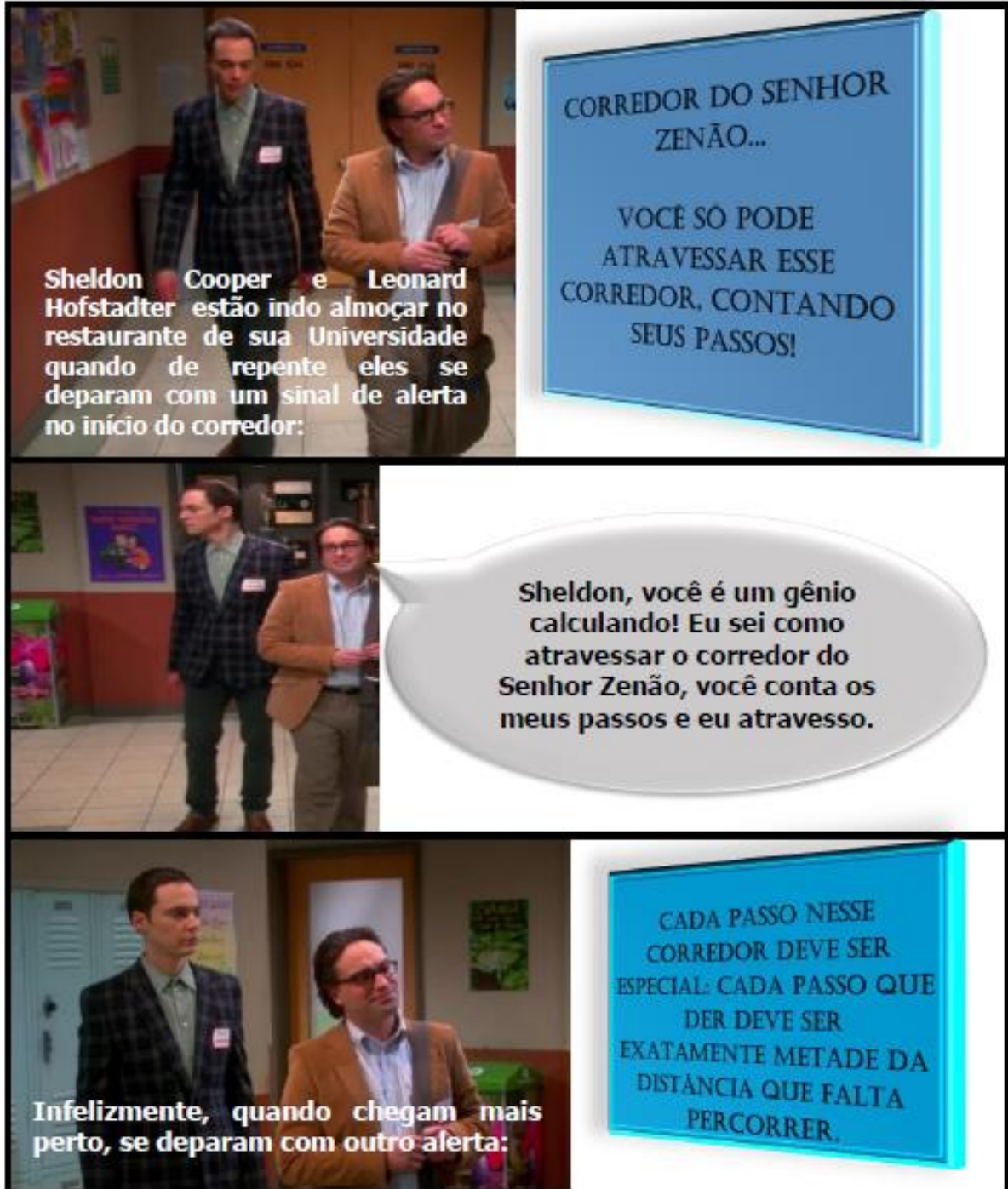
- I. Com seu grupo, encontre um ponto (A) à cerca de 6 metros de uma parede.
- II. A partir do ponto (A), mova-se em direção a parede da seguinte forma: cada passo que der deve ser a metade da distância que há entre você e a parede. (Peça para um membro do grupo registrar a quantidade de passos dados).
- III. Continue a dar passos, seguindo a instrução II, até não conseguir mais.
- IV. Assim que estiver pronto, sente-se com seu grupo e respondam às seguintes perguntas:

1. Quantos passos conseguiram dar?

2. Poderiam ter dado mais passos? Se sim, quantos passos a mais poderiam ter dado? Se não, explique por que o número de passos é o máximo

APÊNDICE C – Ensino Médio, Problema 2: Paradoxo do Corredor

TIRINHA



Alunos: _____

Problema 2: O paradoxo do corredor

Suponha que o corredor que temos na tirinha é semelhante a um dos corredores da nossa escola.

1. Inicialmente, utilizando os instrumentos de medida, meça quantos metros tem o corredor.

2. Quantos passos você imagina que Leonard teria que dar a fim de atravessar esse corredor, levando em consideração as instruções de Zenão? Explique sua estimativa.

3. Considerando o ponto A como início do corredor, e utilizando a medida que foi encontrada para o comprimento do corredor, responda:

a) Qual a distância que Leonard percorre do ponto A até seu primeiro passo? _____

b) Qual a distância que Leonard percorre do ponto A até o seu segundo passo? _____

c) Qual a distância que Leonard percorre do ponto A até o seu terceiro passo? _____

4. Seja $\{d_n\}$ a sequência em que o n ésimo termo (n) corresponde à distância que Leonard percorreu após seu n ésimo passo. Escreva os seis primeiros termos desta sequência. (Lembrando que d_1 , d_2 e d_3 já foram calculados na questão 3):

$d_1 =$ _____

$d_2 =$ _____

$d_3 =$ _____

$d_4 =$ _____

$d_5 =$ _____

$d_6 =$ _____

...

Escreva o que você imagina que seria o d_n ?

5. Você deve ter notado que a distância que Leonard tem percorrido parece estar ajudando-o a atravessar o corredor. Agora, suponha que você seja o Sheldon, então descreva o comportamento dos passos dados por Leonard e como ele continuaria sua jornada até o final do corredor. (A resposta pode ser representada utilizando estimativa; fórmula; desenho; texto, etc.)

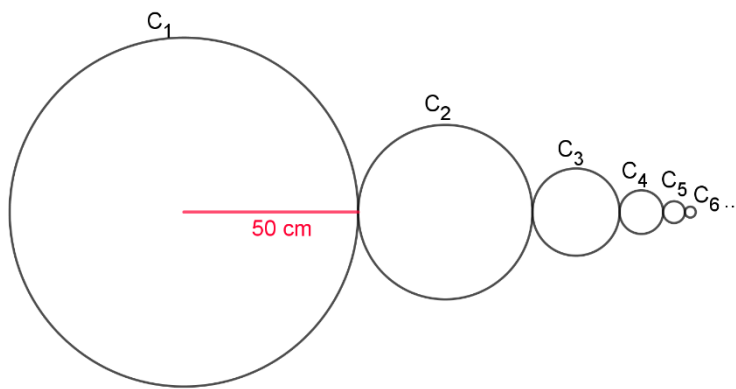
APÊNDICE D – Ensino Médio, Lista de problemas como tarefa

Alunos: _____

Problemas

1) Seja a sequência C_1, C_2, C_3, \dots de infinitas circunferências, conforme Figura 1. Se o raio da circunferência C_1 é 50cm e, a partir da segunda circunferência o raio é metade do raio da circunferência anterior, calcule a **soma dos diâmetros** das infinitas circunferências.

Figura 1:

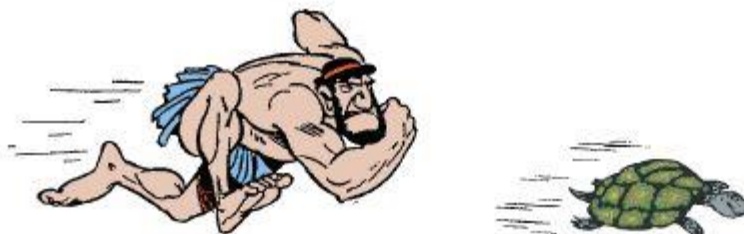


2) (VUNESP-Adaptada) Considere um triângulo equilátero cuja medida do lado é 4cm . Um segundo triângulo equilátero é construído, unindo-se os pontos médios dos lados do triângulo original. Novamente, unindo-se os pontos médios dos lados do segundo triângulo, obtém-se um terceiro triângulo equilátero, e assim por diante, infinitas vezes.

a) Represente geometricamente a situação dada.

b) Determine se soma dos perímetros da infinidade de triângulos formados na sequência, incluindo o triângulo original é finita ou infinita. Justifique.

3) (UFF-Adaptada) Com o objetivo de criticar os processos infinitos, utilizados em demonstrações matemáticas de sua época, o filósofo Zenão de Eleia (século V a.C.) propôs o paradoxo de Aquiles e a tartaruga, um dos paradoxos mais famosos do mundo matemático.



Fonte: <http://culturaclassica.blogspot.com/2008/05/aquiles-ainda-corre-os-paradoxos-de.html>

Existem vários enunciados do paradoxo de Zenão. O escritor argentino Jorge Luis Borges o apresenta da seguinte maneira:

Aquiles, símbolo de rapidez, tem de alcançar a tartaruga, símbolo de morosidade. Aquiles corre dez vezes mais rápido que a tartaruga e lhe dá dez metros de vantagem. Aquiles corre esses dez metros, a tartaruga corre um; Aquiles corre esse metro, a tartaruga corre um décimo; Aquiles corre esse décimo, a tartaruga corre um centímetro; Aquiles corre esse centímetro, a tartaruga um milímetro; Aquiles corre esse milímetro, a tartaruga um décimo de milímetro, e assim infinitamente, de modo que Aquiles pode correr para sempre, sem alcançá-la.

Fazendo a conversão para metros, a distância percorrida por Aquiles nessa fábula é igual a

$$d = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots$$

a) Explique o que significa, relacionando com o texto do problema, cada um dos termos da distância.

b) Essa distância d , também pode ser representada como:

$$d = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots = 10 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

Responda:

i) O que significa o símbolo $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$?

ii) Quantos elementos tem nessa soma?

iii) Identifique a PG dando o primeiro termo e a razão.

iv) Determine a distância percorrida por Aquiles.

v) Aquiles alcança a tartaruga? Justifique.

APÊNDICE E – Questionário Final de avaliação de atividades do Ensino Médio

Aluno(a) (identificação opcional) : _____

Questionário de Avaliação da Atividade

1. As atividades realizadas foram (pode marcar mais do que uma alternativa)

- muito interessantes interessantes pouco interessantes chatas
 desafiadoras monótonas repetitivas estimulantes

Explique:

2. Você já tinha utilizado o software GeoGebra? Em caso positivo, comente como.

3. Na atividade proposta, a utilização do software GeoGebra contribuiu para visualização dos problemas?

- muito um pouco nada

Justifique.

4. A forma como abordado o problema contribui para o entendimento do conteúdo? Justifique.

5. Você acharia interessante outros conteúdos da Matemática serem abordados dessa forma? Poderia citar um tópico específico?

6. Na realização das atividades, em quais etapas ocorreram suas maiores dificuldades? Explique!

7. Você tem alguma sugestão de mudança ou acréscimo em alguma das atividades propostas ou na sua forma de realização? Descreva.

APÊNDICE F – Questionário Inicial Ensino Superior

Questionário Inicial

Este questionário faz parte da metodologia de uma pesquisa de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias da Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC, intitulada “Conceito de limite sob a perspectiva da resolução de problemas mediada pelo software GeoGebra” e visa identificar o perfil do público selecionado para a aplicação do produto educacional. Esperamos contar com sua contribuição, a qual será muito importante.

1. Qual é o seu curso? _____

2. Já cursou esta disciplina (CDI-I)?
() não () sim quantas vezes _____

3. Quantas horas semanais de estudo você dedica a essa disciplina? _____

4. Quando você não compreende o conteúdo você procura sanar suas dúvidas com:
() professor () monitor () colegas () outros _____

5. Qual a sua idade? _____

6. Atualmente você está trabalhando?
() não () sim

APÊNDICE G – Termo de consentimento Ensino Superior



UDESC
UNIVERSIDADE
DO ESTADO DE
SANTA CATARINA

JOINVILLE
CENTRO DE CIÊNCIAS
TECNOLÓGICAS

TERMO DE CONSENTIMENTO

Você está sendo convidado a participar de uma pesquisa de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias da Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC, intitulada: *Conceito de limite sob a perspectiva da resolução de problemas mediado pelo software GeoGebra*, da acadêmica *Jéssica Meyer Sabatke*. Essa pesquisa tem como objetivo analisar o desenvolvimento da aplicação de atividades que visam introduzir o conteúdo de limites, aplicadas nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral I, sob concordância da professora Raiane Lemke

Você não terá despesas e nem será remunerado pela participação na pesquisa, sua identidade será preservada pois cada indivíduo será identificado por um número.

Os benefícios e vantagens em participar deste estudo serão teóricos e empíricos, pois permitirão conhecer e analisar os desafios encontrados nas estratégias de resolução de problemas das atividades de limite, podendo substanciar ações de melhorias nos processos de ensino e aprendizagem do Cálculo.

As pessoas que estarão acompanhando os procedimentos serão a estudante de mestrado *Jéssica Meyer Sabatke*, e as professoras orientadoras *Ivanete Zuchi Siple* e *Elisandra Bar de Figueiredo*.

Solicitamos a sua autorização para o uso de dados, como as resoluções das atividades, fotografias, e a transcrição de áudios que serão/foram realizados em sala de aula para a produção de uma Dissertação de Mestrado. Sua privacidade será mantida através da não-identificação do nome. Você poderá solicitar o não uso das transcrições dos áudios, fotografias, e resoluções das atividades do estudo a qualquer momento, sem qualquer tipo de constrangimento.

Este termo de consentimento livre e esclarecido é feito em duas vias, sendo que uma delas ficará em poder do pesquisador e outra com o sujeito participante da pesquisa.

Mestranda *Jéssica Meyer Sabatke*
Telefone: (47) 999240406
Endereço: Rua Paulo Malschitzki, 200
Campus Universitário Prof. Avelino Marcante,
Bairro Zona Industrial Norte - Joinville - SC

Professora *Ivanete Zuchi Siple*
Telefone: (47) 40097836
Endereço: Rua Paulo Malschitzki, 200
Campus Universitário Prof. Avelino Marcante,
Bairro Zona Industrial Norte - Joinville - SC

TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e, que recebi de forma clara e objetiva todas as explicações pertinentes ao projeto e, que todos os dados a meu respeito serão sigilosos. E ainda, fui informado que posso me retirar do estudo a qualquer momento.

Nome por extenso: _____

Assinatura _____ Local: _____ Data: ____/____/____.

APÊNDICE H – Ensino Superior, Problema 1: Área do Círculo

Alunos: _____

Problema 1: Área do Círculo

As primeiras ideias do Cálculo surgiram na Grécia antiga, naquela época os gregos já sabiam calcular a área de qualquer região poligonal, dividindo-a em triângulos e somando as áreas obtidas.

Para o cálculo de áreas de regiões planas limitadas por curvas, eles usavam o chamado *Método da Exaustão*. Esse método consistia em inscrever e circunscrever a figura com uma sequência de polígonos. Aumentando o número de lados dos polígonos, eles conseguiam chegar a valores bem próximos do valor real da área.

Utilizando a ideia do Método da Exaustão, calcule a área A de um círculo. (Você pode utilizar que o comprimento de uma circunferência é dado por $2\pi r$).

Para resolver o problema, utilize o aplicativo do GeoGebra e responda:

a) Altere o raio do círculo (controle deslizante r). O que essa alteração provoca no círculo?

b) Habilite “Mostrar Polígono Inscrito”, e movimente o controle deslizante “ n ”. Que conjecturas podem ser estabelecidas sobre a área e o perímetro do círculo conforme a variação de “ n ”?

c) Desabilite “Mostrar Polígono Inscrito” e habilite “Mostrar Polígono Circunscrito”, e movimente o controle deslizante “ n ”. Que conjecturas podem ser estabelecidas sobre a área e o perímetro do círculo conforme a variação de “ n ”?

d) Habilite “Exibir Triângulo” e deixe um valor fixo para o raio (r), o que acontece com a área do triângulo quando se movimenta o controle deslizante “ n ”?

e) Para $r = 3$ e $n = 3$, qual a diferença entre a área do polígono circunscrito e do polígono inscrito? E qual a diferença entre o perímetro do polígono circunscrito e do inscrito?

f) Conforme “n” aumenta, o que acontece com a diferença entre a área do polígono circunscrito e do polígono inscrito? E com a diferença entre o perímetro do polígono circunscrito e do inscrito?

g) O que acontece com as áreas dos polígonos circunscrito e inscrito em relação a área do círculo, conforme aumenta-se o número de lados do polígono (n)?

Utilize essa folha para expressar o desenvolvimento do cálculo da área A de um círculo, utilizando a ideia do Método da Exaustão.

APÊNDICE I – Ensino Superior, Problema 2: Ideia intuitiva de limite

Alunos: _____

Problema 2: Ideia intuitiva de limite**Parte 1:**

Uma bola que é colocada no chão e chutada para o alto, percorre uma trajetória descrita por $h(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 6t$ ($t \geq 0$), onde t é o tempo medido em segundos e $h(t)$ é a altura em metros da bola no instante t . Responda:

- a) Quanto tempo a bola leva para voltar ao solo?

- b) O que acontece quando o tempo se aproxima de 4 segundos?

- c) Qual é a altura máxima que a bola atinge?

- d) Qual o valor de L na expressão: $L = \lim_{t \rightarrow 4} h(t)$?

Parte 2:

Considere a função $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$.

- a) O que acontece com os valores de f quando x está próximo de valores à esquerda de 4?

- b) O que acontece com os valores de f quando x está próximo de valores à direita de 4?

- c) Desenhe o gráfico da função $f(x)$.

- d) Qual o valor de $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$?

APÊNDICE J – Ensino Superior, Problema 3: Fatura de Energia

Alunos: _____

Problema 3: Fatura Energia

Considerando a tarifa convencional de energia de R\$ 0,50 por kwh, uma residência com 4 moradores, tem um gasto mensal de R\$ 200,00, ou seja, consome 400kwh mensais. Os moradores desejam fazer uma economia de 50%. Uma consultoria foi contratada visando diminuir a fatura, e a melhor opção fornecida foi a instalação de painéis solares fotovoltaicos. Os moradores aderiram a esse novo sistema de geração de energia, e desse modo, o valor da nova fatura será dado pela multiplicação valor do kwh da tarifa convencional pela diferença entre a quantidade de consumo mensal de energia convencional e a gerada pelo sistema fotovoltaico. Responda:



- a) Se a fatura de energia elétrica mensal for R\$ 100,00, qual a potência em kwh total que deve ser gerada pelos painéis solares?
- b) Suponha que os moradores tenham uma tolerância de R\$ 20,00 da fatura que desejam pagar, qual a faixa de potência que os painéis solares devem gerar?
- c) Refaça a questão (b), supondo que esses moradores admitam uma tolerância de R\$ 10,00.
- d) Represente graficamente as situações dos itens (a, b, c) e responda: O que acontece com a variação de potência gerada quando a fatura está numa faixa cada vez mais estreita em torno de R\$ 100,00?
- e) Agora, suponha que esses moradores desejem pagar mensalmente, em torno de R\$ 100,00 pela fatura de energia com tolerância muito pequena, que você pode denotar por ϵ . Qual a relação entre a tolerância e a variação em torno de 200kwh? Você pode denotar a variação da potência por δ .

APÊNDICE K – Ensino Superior, Problema 4: Viagem à Lua

Alunos: _____

Problema 4: Viagem à Lua

Dobre ao meio uma folha de papel A4. Depois dobre novamente, e siga dobrando ao meio enquanto puder.

- a) Há um limite físico das dobras? Se sim, qual?
- b) Suponha que pudéssemos pegar um papel tão comprido quando se queira de espessura de 0,1mm. Quantas vezes seria preciso dobrar o papel para que sua espessura final (altura) fosse maior que os 384 400 km que separam a Terra da Lua?
- c) O que acontece com a função $f(n) = 2^n \cdot 10^{-4}$, onde n é dado pelo número de dobras e $f(n)$ pela distância em metros, quando o número de dobras tende a um número muito grande? Existe um limite?

APÊNDICE L – Ensino Superior, Lista de problemas como tarefa

Professora: Raiane Lemke

Nome: _____

Lista de Problemas sobre Limite – CDI I – 2018/01

Data de entrega: 13/04/2018 até 23h59min.

Peso: 2,0 pontos se for entregue impressa ou manuscrita, e mais 0,5 pontos se a entrega for feita apenas pela ferramenta de Grupo do GeoGebra conforme instrução abaixo:

Entre com (código) em www.geogebra.org/groups para ter acesso ao grupo e poder manipular os aplicativos.

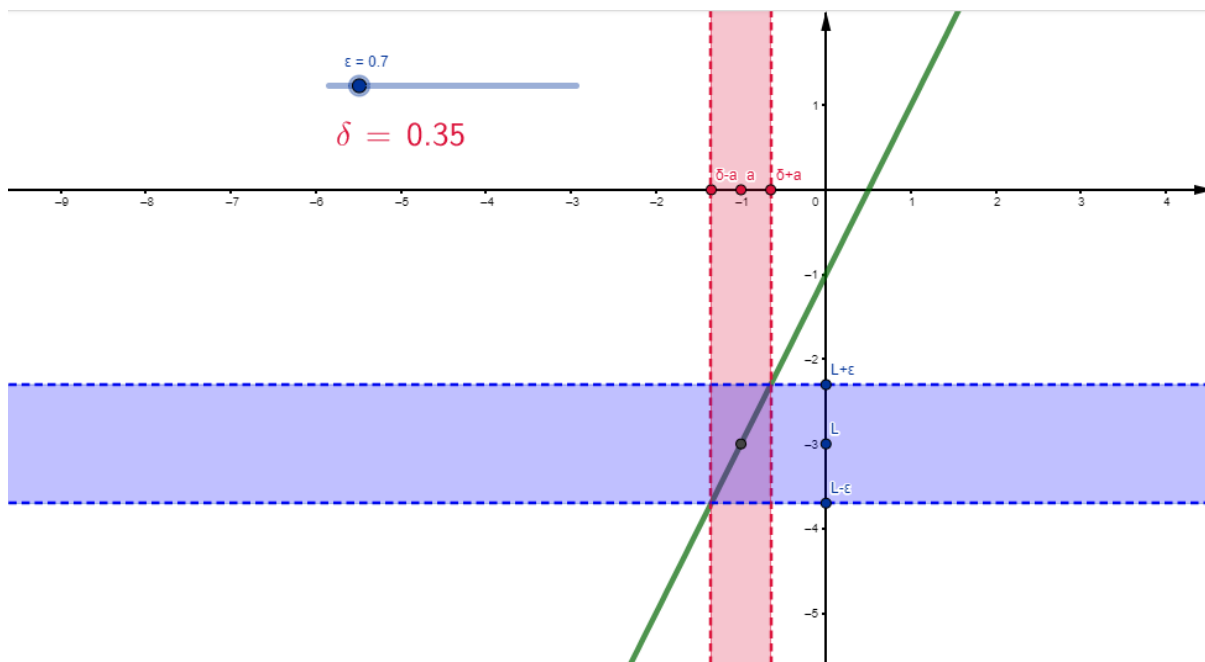
Caso a entrega for feita pela ferramenta do grupo do GeoGebra não será necessário entregar fisicamente a lista.

Problema 1:

Na fabricação de um disco circular de metal, é solicitado que se fabrique um disco com área de 1000cm^2 . Antes da produção do disco é necessário saber qual o erro que se pode aceitar em relação ao raio ideal de $r_0 = 17,841\text{cm}$. É permitido ao fabricante uma tolerância de erro de 5cm na área do disco dada por $A = \pi r^2$. Para que isto aconteça, é necessário procurar o intervalo no qual tem de manter r para fazer $|A - 1000| \leq 5$. Desse modo, qual intervalo de variação do raio é encontrado? Justifique a resposta.

Problema 2:

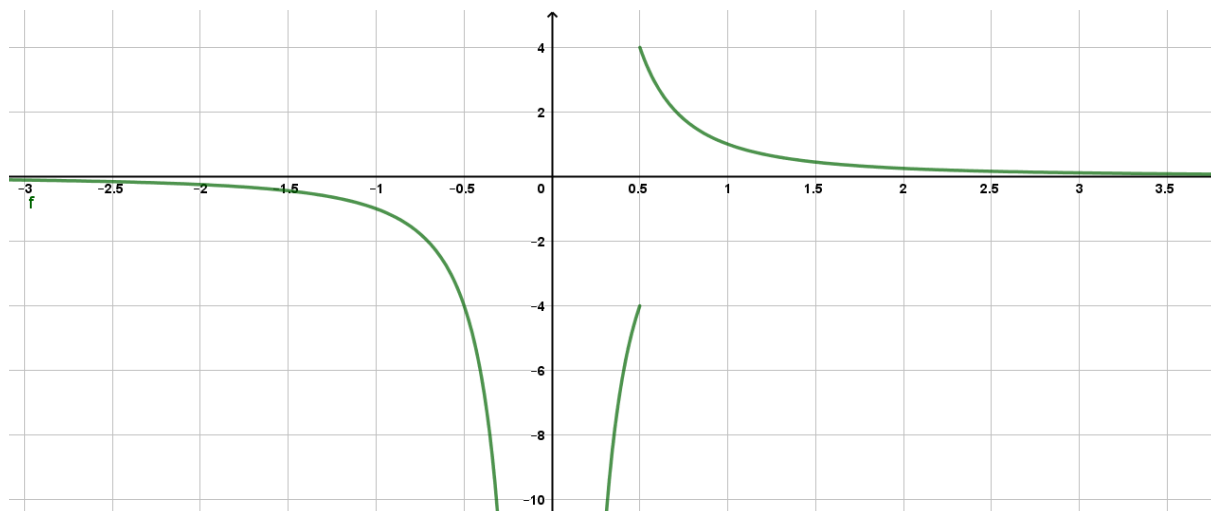
- a) Use o applet para verificar a relação entre δ e ε no $\lim_{x \rightarrow -1} (2x - 1) = -3$. Qual é essa relação?



- b) Use a definição de limite para mostrar que $\lim_{x \rightarrow -1} (2x - 1) = -3$.

Problema 3:

Para a função $f(x)$ cujo gráfico é mostrado a seguir, determine o valor de cada limite, se existir:



a) $\lim_{x \rightarrow 0,5^-} f(x) =$

b) $\lim_{x \rightarrow 0,5^+} f(x) =$

c) $\lim_{x \rightarrow 0,5} f(x) =$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

Problema 4:

Nos itens abaixo calcule os limites. Justifique as respostas encontradas.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^5 + 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 5x^3 + 8x^2}{5x^4 - 3x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{x^2 - 2x - 8}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

O aplicativo pode ser utilizado para encontrar $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$:

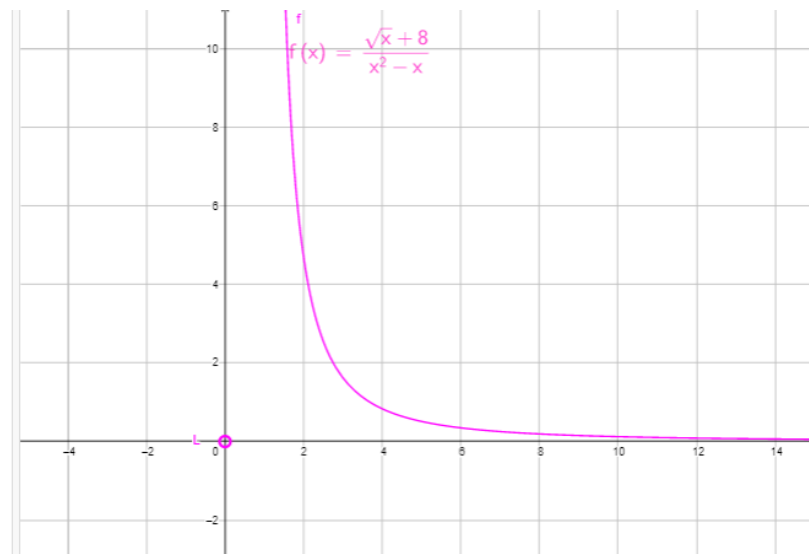
Determine $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Dados :

$$f(x) = (\sqrt{x} + 8) / (x^2 - x)$$

$a = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + 8}{x^2 - x} = 0$$



Obs: As atividades que foram feitas em sala sobre limites, complementarão a nota desse trabalho.

APÊNDICE M – Questionário Final de avaliação de atividades do Ensino Superior

Aluno(a) (identificação opcional): _____

Questionário de Avaliação das Atividades**1.** As atividades realizadas foram (pode marcar mais do que uma alternativa)

- muito interessantes interessantes pouco interessantes chatas
 desafiadoras monótonas repetitivas estimulantes

Explique:

2. Nas atividades propostas, a utilização do software GeoGebra contribuiu para visualização dos problemas?

- muito um pouco nada

Justifique.

3. A forma como foram abordados os problemas contribuiu para o entendimento do conteúdo?

Justifique.

4. Você acharia interessante outros conteúdos do Cálculo serem abordados dessa forma? Poderia citar um tópico específico?

5. Na realização das atividades, em quais etapas ocorreram suas maiores dificuldades? Explique.

6. Você tem alguma sugestão de mudança ou acréscimo em alguma das atividades propostas ou na sua forma de realização? Descreva.
