UNIVERSIDADE REGIONAL DE BLUMENAU – FURB
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA

SUELEN SASSE STEIN

ENSINO DE FRAÇÃO SOB A PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

BLUMENAU
2021

SUELEN SASSE STEIN

ENSINO DE FRAÇÃO SOB A PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática do Centro de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Regional de Blumenau como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

Orientadora: Profª. Drª Janaína Poffo Possamai

BLUMENAU

2021

Ficha catalográfica elaborada por Fernanda Felipini – CRB 14/1310
Biblioteca Universitária da FURB

S819

Stein, Suelen Sasse, 1997-
Ensino de fração sob a perspectiva da resolução de problemas / Suelen Sasse Stein. - Blumenau, 2021.
122 f. : il.

Orientadora: Janaína Poffo Possamai.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau.
Bibliografia: f. 117-122.

1. Matemática. 2. Matemática – estudo e ensino. 3. Prática de ensino. 4. Frações. I. Possamai, Janaína Poffo, 1985-. II. Stein, Suelen Sasse, 1997-. III. Universidade Regional de Blumenau. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. IV. Título.

CDD 510.7

SUELEN SASSE STEIN

ENSINO DE FRAÇÃO SOB A PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática do Centro de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Regional de Blumenau como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

Orientadora: Profª. Drª Janaína Poffo Possamai

Aprovado em: 14/08/2021

Presidente: Profª. Janaína Poffo Possamai, Drª - Orientadora, Universidade Regional de Blumenau

Membro: Profª. Viviane Clotilde da Silva, Drª, Universidade Regional de Blumenau

Membro: Prof. Gilberto Vieira, Dr, Centro Universitário São Lucas

Dedico esse trabalho a minha família que sempre me apoiou nessa caminhada!

AGRADECIMENTOS

"Tudo o que fizerem, seja em palavra ou em ação, façam-no em nome do Senhor Jesus, *dando por meio dele graças a Deus Pai."* – **Colossenses 3:17**

Se cheguei até aqui foi porque Deus permitiu e me concedeu esse privilégio. A palavra que posso definir é GRATIDÃO por tudo que vivi e aprendi.

Agradeço a Deus porque Ele permitiu que eu chegasse aqui, dando saúde, proteção e cuidando de tudo para que esse sonho se tornasse realidade.

Aos meus pais Renato e Marcia que me incentivam e me apoiaram, não mediram esforços para que eu concluísse mais essa etapa. Vocês foram as pessoas que mais acreditaram em mim, até quando eu mesma não acreditei. Serei eternamente grata a vocês por todo apoio, incentivo e oração!

Ao meu marido Gustavo que teve um papel fundamental nesse processo e sempre com muita paciência, amor, apoio e compreendeu os momentos de ausência. Sem você, isso tudo não teria sido possível.

A minha irmã Gabrielle que sempre me apoiou o e torceu por mim. Você foi muito importante nesse processo.

A minha querida orientadora Drª Janaína Poffo Possamai que com muita paciência, sabedoria e dedicação me orientou no desenvolvimento dessa dissertação. Foi um enorme prazer ter você como minha orientadora!

Aos Professores Drª Viviane Clotilde da Silva e Dr. Gilberto Vieira, pelas valiosas contribuições na banca de qualificação e por participarem como membros da banca de defesa, pela leitura cuidadosa e carinhosa e pelas sugestões e considerações que vieram a ampliar as reflexões acerca desta pesquisa.

Aos colegas e professores do PPGECIM da turma 2019/2020 por cada momento e conhecimento compartilhado. A minha amiga Tatiane Avancini Schwarzrock companheira de viagem e de turma, gratidão pela amizade, pelos momentos compartilhados e por cada palavra de motivação. Aos colegas de grupo de pesquisa Cíntia Poffo e Vilmar Ibanor Bertotti Junior pela parceria durante esta caminhada.

Ao Programa UNIEDU/FUMDES Pós-Graduação pela concessão da bolsa de pesquisa e à Universidade Regional de Blumenau por realizadas meus estudos junto ao PPGECIM.

Por fim, a todos aqueles que de forma direta ou indiretamente contribuíram com esse trabalho, o meu muito obrigada!

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.”

[FREIRE, 2003]

RESUMO

O estudo "Ensino de Fração sob a perspectiva da Resolução de Problemas" foi desenvolvido na linha de pesquisa "Formação e Práticas Docentes em contextos de Ensino de Ciências Naturais e Matemática", pertencente ao Programa de Pós-Graduação Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática (PPGECIM), da Universidade Regional de Blumenau. Nesta pesquisa articulamos o Ensino da Matemática com uma abordagem na metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas no 6º ano do Ensino Fundamental para construção de conceitos de fração. A partir disso, a pergunta mobilizadora é quais implicações do uso da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas para a aprendizagem de frações? Para responder desenvolveu-se uma pesquisa de natureza qualitativa e quanto ao procedimento do tipo investigação-ação, cujo aporte teórico aborda as concepções de problema, tipos de problemas, diferentes abordagens de ensino relacionadas com a Resolução de Problemas e a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas no contexto do ensino da Matemática, para na sequência apresentar a revisão da literatura frente ao ensino e aprendizagem de frações. Com base nesses estudos desenvolve-se uma sequência didática que envolve o ensino de frações, desde o desenvolvimento do senso fracionário até as operações de adição e subtração, bem como estabeleceu-se critérios de análise para avaliar sua implementação. Do conjunto de seis atividades desenvolvidas, duas foram aplicadas com estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental, em uma escola pública de Rio do Sul/SC, em aulas presenciais, possibilitando que a coleta de dados envolvesse gravações em áudio, registro das resoluções dos estudantes e registro em diário de campo. Um Produto Educacional foi desenvolvido com os problemas em cada atividade da sequência didática, bem como com orientações e discussões sobre a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, de modo que outros professores possam ressignificar a prática realizada em diferentes contextos de ensino. Os resultados indicam que os estudantes conseguem progredir no desenvolvimento do senso fracionário, atuando enquanto protagonistas na construção do seu conhecimento, avançando gradualmente da linguagem informal, relacionada com o conceito de fração, até a representação fracionária.

Palavras-chave: Resolução de Problema. Frações. Ensino de Matemática. Prática Educativa.

ABSTRACT

The study “Fraction Teaching under the perspective of Problems Resolution” was developed within the research line “Teacher’s practices and training in the context of Natural Science and Mathematics teaching”, belonging to the Natural Science and Mathematics Teaching Master Program (PPGECIM), of Regional University of Blumenau. In this research we have articulated the mathematics teaching process using the teaching-learning-assessment methodology approach through mathematical problems resolutions for the 6th grade Elementary School students aiming to build fraction concepts. Starting there, the mobilizing question is what are the implications of the Teaching-Learning-Assessment methodology used through the mathematical problems resolutions aiming at fraction learning? To answer this question one has developed a qualitative research along with the investigation-action type procedure, in which the theoretical contribution addresses the problem conceptions, problem types, different teaching approaches related with Problems Resolution and with the Teaching-Learning-Assessment methodology through Problems Resolution in the context of Mathematical teaching, to in sequence present the literature review regarding fraction’s teaching and learning. Based on the previously mentioned studies, a didactic sequence involving the fractions teaching is developing, from the fractional sense developing to addition and subtraction operations, as well as analysis criteria has been established to evaluate its implementation. From the set of six developed activities, two were applied to a 6th grade Elementary School students from a public school in Rio do Sul – SC, through in-person class, enabling that the data collection could have covered audio, students’ resolutions and field diary recording. An Educational Product was developed based on the problems in each didactical sequence activity, as well as with guidelines and discussions about Teaching-Learning-Assessment mathematics methodology through Problems Resolution, in a way that other teachers may resignify the practice that has been applied in different teaching contexts. The results show that students can get improvements in the development of fractional sense, acting as protagonists on the construction of their own knowledge, gradually moving from the informal language, related to the concept of fraction, to the fractional representation.

Key-words: Problem Solving. Fractions. Mathematical teaching. Educational Practice.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

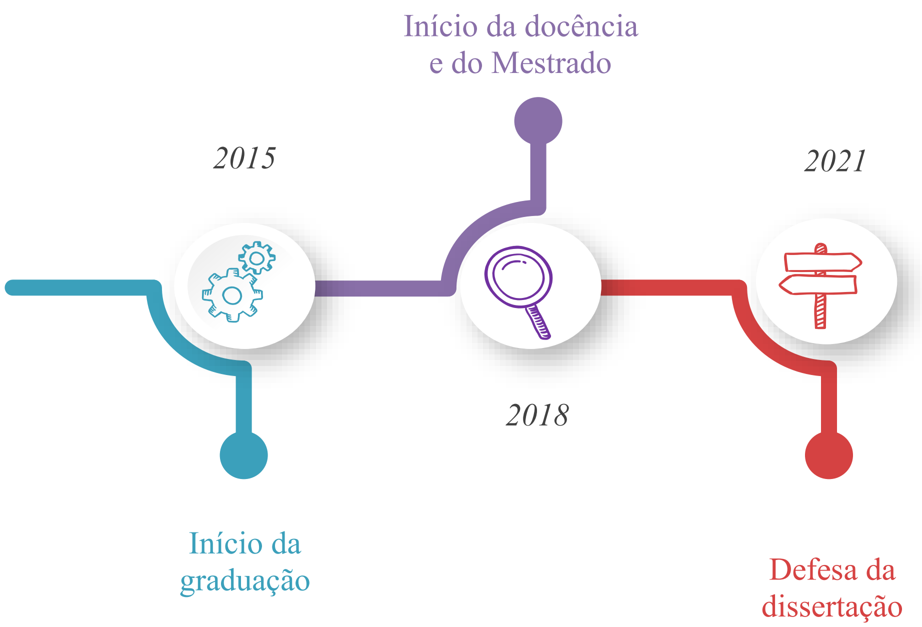
LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FUMDES	Fundo de Apoio à Manutenção e ao Desenvolvimento da Educação Superior
PPGECIM	Programa de Pós-Graduação Ensino de Ciências Naturais e Matemática
BDTD	Biblioteca Digital de Teses e Dissertações
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
PNLD	Programa Nacional do Livro e do Material Didático
GTERP	Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas
FURB	Universidade Regional de Blumenau
AT1	Atividade 1 do Produto Educacional
AT2	Atividade 2 do Produto Educacional

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO



No ano de 2000, com 3 anos de idade, comecei a frequentar o Jardim da Escola Municipal do Centro Educacional Ruth Schroeder Off, onde permaneci até o 4° ano; cursei o Ensino Fundamental e Ensino Médio no Colégio Sinodal Ruy Barbosa com bolsa integral. Todas as escolas ficam na cidade de Rio do Sul/SC.

A minha escolha pela docência foi inspirada em uma professora do Ensino Médio, a Araceli Gonçalves. Foi assim que decidi ingressar no Curso de Licenciatura em Matemática, no Instituto Federal Catarinense, campus de Rio do Sul/SC. Esses 4 anos contribuíram muito para a minha docência e aprendi valores fundamentais. Durante a graduação participei de um projeto de extensão, escrevi capítulo de um livro, participei de congressos, tudo contribuiu para aquisição de experiências e construção de conhecimentos.

No ano de 2019, ingressei no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Regional de Blumenau/ SC, com bolsa FUNDES desde agosto de 2019. Neste ano, iniciei à docência no Centro de Educação Adolfo Hedel, Escola Municipal de Agrolândia, na qual leciono para turmas de 6° ano ao 9° ano do Ensino Fundamental.

A escolha pelo ingresso no Programa de Pós-Graduação, deu-se pelo incentivo da Professora Fátima Peres Zago de Oliveira e pela vontade de buscar novas alternativas e conhecimentos a fim de melhorar a minha prática como docente. Sempre amei ler e pesquisar e essa experiência que estou vivendo está sendo incrível.

Chegando ao final do mestrado, percebo que consigo enxergar com outros olhos o processo de ensino e aprendizagem por compreensão da Matemática, sendo que o estudante é o centro e o protagonista da aprendizagem, e o professor é mediador deste processo.

2 INTRODUÇÃO

Por qual motivo os estudantes entendem os números naturais, mas têm dificuldades com frações?

Em geral, os estudantes têm compreensão de números naturais, sabendo compará-los e operar com eles, enquanto as frações são reduzidas a processos mecanizados e com pouca ou nenhuma significação. Essa compreensão dos números naturais deve-se ao fato de que um tempo escolar importante é dedicado para o seu entendimento, além de as situações com números naturais serem mais comuns no dia a dia dos que as que envolvem frações (MACK, 1995; SMITH, 2002).

A importância de se desenvolver compreensão acerca dos números racionais leva em conta os seguintes elementos:

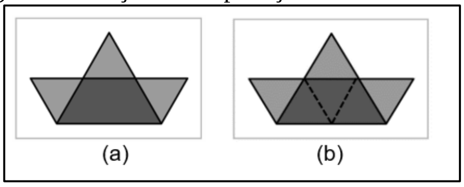
> [...] (a) de uma perspectiva prática, a habilidade de lidar efetivamente com esses conceitos melhora amplamente a habilidade de entender e lidar com situações e problemas no mundo real; (b) de uma perspectiva psicológica, os números racionais fornecem uma arena rica na qual as crianças podem desenvolver e expandir as estruturas mentais necessárias para o desenvolvimento intelectual contínuo; e (c) de uma perspectiva matemática, a compreensão dos números racionais fornece a base sobre a qual as operações algébricas elementares podem ser baseadas posteriormente. (BEHR *et al*., 1983, p. 91, tradução nossa)

A falta de entendimento de frações vem acompanhada de equívocos os quais são gerados em decorrência de processos que envolvem exclusivamente a mecanização e a repetição de regras. Van de Walle *et al.* (2014) discute os equívocos mais comuns:

Equívoco 1. Os estudantes pensam o numerador e o denominador em termos de números naturais, analisando cada valor separadamente e têm dificuldade em vê-los como um valor único.

Equívoco 2. Os estudantes têm dificuldades em relacionar as frações com um todo dividido em partes de mesmo tamanho. Por exemplo, os estudantes podem pensar que a forma apresentada na Figura 1 (a) representa a fração $\frac{3}{4}$, relacionando a ideia do todo dividido em quatro partes, das quais três são pintadas em cinza claro, sem levar em conta o tamanho das partes. Se forem desenhadas todas as partições (b), de modo que as partes tenham igual tamanho, obtém-se corretamente a fração $\frac{3}{6}$ que representa metade, é equivalente a $\frac{1}{2}$.

Figura 1 - Frações com partições não desenhadas



Fonte: (Adaptado por Van de Walle *et al.* 2014)

Equívoco 3. Os estudantes relacionam os denominadores com a ideia que possuem de números naturais, levando-os a indicar que $\frac{1}{5}$ é menor que $\frac{1}{10}$, pois 5 é menor que 10. Nessas situações, normalmente, uma regra é informada a eles, indicando que para as frações a ideia é inversa, ou seja, quanto maior o denominador, menor é a fração. Porém, fornecer regras separadas da compreensão, pode levá-los a generalizar a ideia e indicar que $\frac{7}{8}$ é menor que $\frac{1}{4}$.

Equívoco 4. Os estudantes utilizam as ideias de números naturais para operarem com frações, aceitando $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ como $\frac{2}{4}$.

Estes equívocos estão relacionados com os conhecimentos prévios dos estudantes, que são fortemente enraizados na compreensão de números naturais. Sendo assim, o ensino de frações, que prioriza técnicas, regras e memorização, deixa pouco espaço para a compreensão e construção de significados, favorecendo que erros sejam cometidos.

Polya (1985) traz que a Matemática não pode ser apreciada e aprendida sem compreensão, de modo que o princípio mais importante de que os professores precisam entender é que ensinar Matemática requer ensinar a estabelecer conexões. Segundo Van de Walle *et al*. (2014, p. 1, tradução nossa), compreender

> É mais do que poder seguir os passos de um procedimento. Uma característica da compreensão matemática é de que um estudante tenha a capacidade de justificar porque uma determina afirmação ou resposta matemática é verdadeira ou porque uma regra matemática faz sentido.

Assim como tocar notas em um piano não é fazer música, no ensino tradicional oferece-se pouca oportunidade para se fazer Matemática, pois isto está vinculado à aprendizagem de regras e à construção de conhecimentos fragmentados.

> Embora os estudantes possam conhecer as regras de uma multiplicação e dar respostas rápidas a perguntas sobre essas regras, eles podem não entender multiplicação. Eles podem não ser capazes de justificarem suas respostas ou fornecerem um exemplo de quando faz sentido usarem essas regras. (VAN DE WALLE *et al*., 2014, p. 1, tradução nossa)

Quando as listas de exercícios prevalecem nas aulas, não é surpresa que tantas pessoas não gostem de Matemática, pois prioriza-se a memorização e a repetição, deixando pouco espaço para a compreensão e, possivelmente, pouco se desafia os estudantes a aprenderem. Com isso, a Matemática verdadeira está em tornar o estudante reflexivo:

> Uma coisa é dizer, 'Eu quero que meus estudantes sejam reflexivos' e outra totalmente diferente é articular o que isso significa. Para começar, o pensamento reflexivo certamente envolve alguma forma de atividade mental. É um esforço ativo e não uma atitude passiva. Envolve tentar compreender algo ou conectar ideias que pareçam estar relacionadas. Ocorre quando os estudantes tentam dar sentido às explicações de outros, quando eles fazem perguntas, e quando eles apresentam explicações ou justificam suas próprias ideias (VAN DE WALLE, 2009, p. 49).

Ensinar por compreensão, requer um esforço ativo, não uma atitude passiva de transmissão de informações, assim o estudante passa a ser o centro da atividade Matemática, argumentando, justificando, questionando suas ideias e as dos colegas. Neste sentido, um dos caminhos para propiciar aos estudantes o desenvolvimento e a compreensão Matemática, buscando e questionando soluções pelos seus próprios caminhos, permitindo que se tornem sujeitos problematizadores de suas aprendizagens é a Resolução de Problemas[1].

A resolução de problemas tem sido reconhecida desde a antiguidade, em todas as áreas do conhecimento e há uma infinidade de pesquisas já realizadas sobre Resolução de Problemas na Educação Matemática, indicando a importância que ela ocupa nos currículos escolares e a relevância para a aprendizagem. A partir da compreensão de que a Matemática deve ser ensinada por meio da Resolução de Problemas, pode-se organizar o processo de ensino e aprendizagem em problemas, de modo que a aprendizagem ocorre como um resultado. (ONUCHIC, 2013).

Ao ensinar por meio da Resolução de Problemas, são propostos problemas geradores que permitem estabelecer conexões entre as ideias novas e as já existentes, fazendo com que os estudantes ativamente procurem essas relações, avaliando os caminhos que dão certo ou não, verificando as soluções dos colegas, fazendo assim matemática. Dessa forma, o foco está mais no estudante do que no professor. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2019).

Neste contexto, Allevato (2005, p. 39) afirma que "o termo 'problema' é bastante presente no dia a dia de pessoas que trabalham com Matemática, ou com seu ensino e aprendizagem, entretanto nem sempre seu uso é acompanhado de um consciente

---

[1] Nessa dissertação é assumido ao utilizar resolução de problemas (letras minúsculas) e Resolução de Problemas (letras maiúsculas) que: "A expressão resolução de problemas refere-se ao ato de resolver problemas ou situações-problemas, algo que pode ser esporádico ou momentâneo, uma atividade de cunho recognitivo e puramente heurístico, que vise à exploração pontual de problemas matemáticos. Já a expressão Resolução de Problemas diz de uma prática institucionalizada ou um movimento educacional, algo que acontece em atividades e perpassa todo um movimento educacional e, por sua vez, ultrapassa os limites impostos pelo tempo e pelo espaço, *extravasando* as paredes da escola, problematizando a vida de alguma forma. (LEAL JUNIOR, ONUCHIC, 2019, p. 99, grifo do autor)

posicionamento sobre o seu significado”.

> Problemas com enunciados ou palavras freqüentemente vêm à mente em uma discussão sobre resolução de problemas. No entanto, essa concepção de resolução de problemas é limitada. Alguns ‘problemas com enunciados’ não são suficientemente problemáticos para os estudantes e, portanto, deveriam ser considerados apenas como exercícios para os alunos realizarem. [...] Em geral, quando os pesquisadores utilizam a expressão *resolução de problemas* eles estão se referindo a tarefas matemáticas que têm o potencial de proporcionar desafios intelectuais que podem melhorar o desenvolvimento matemático dos alunos. (CAI; LESTER, 2012, p. 148, grifo do autor)

Assim, quando os problemas são o ponto de partida da aprendizagem Matemática e possibilitam aos estudantes o desenvolvimento de conceitos/procedimentos durante a busca de argumentos e respostas razoáveis sobre suas escolhas, tem-se uma aula com os preceitos os quais norteiam a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

> Na abordagem de Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, o aluno tanto aprende matemática resolvendo problemas como aprende matemática para resolver problemas. O ensino de resolução de problemas não é mais um processo isolado. Nessa metodologia o ensino é fruto de um processo mais amplo, um ensino que se faz por meio da resolução de problemas. (ONUCHIC, 1999, p. 210-211)

A palavra *através* no nome dessa metodologia, segundo Onuchic (1999), significa “ao longo de”, pois durante o processo da resolução do problema é que são construídas as ideias novas, os procedimentos, conceitos ou algoritmos almejados no planejamento do professor.

Assim, diante das dificuldades encontradas pelos estudantes na aprendizagem de conceitos e operações relativos à fração, acredita-se na necessidade da construção de propostas metodológicas para que ocorra uma aprendizagem por compreensão. Diante disso, a pergunta que norteia essa pesquisa é: *‘Quais implicações do uso da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas para a aprendizagem de frações por estudantes do Ensino Fundamental?’.*

2.1 OBJETIVOS

A seguir são apresentados o Objetivo Geral e Objetivos Específicos que conduzem essa pesquisa.

2.1.1 Objetivo Geral

Avaliar implicações do uso da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas para a aprendizagem de frações por estudantes do Ensino Fundamental.

2.1.2 Objetivos Específicos

A fim de atender este objetivo geral, têm-se os seguintes objetivos específicos:

a) Estruturar referentes teóricos relacionados ao ensino de fração e a Resolução de Problemas.
b) Elaborar sequências didáticas baseadas na metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas para o ensino de fração.
c) Investigar a compreensão dos estudantes como resultado na aplicação das sequências didáticas construída em uma turma do 6° ano do Ensino Fundamental.
d) Construir um produto educacional como resultado da pesquisa no formato de livro para o ensino de fração com base na metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

2.2 RELEVÂNCIA DO TEMA E CONTRIBUIÇÕES

Com a finalidade de localizar este trabalho dentre as pesquisas científicas, na área de ensino de fração *através* da Resolução de Problemas, buscou-se a construção do Estado da Questão com pesquisas disponíveis *online* até março de 2019, na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD) com as palavras-chave "*Resolução de Problemas + fração*", o que resultou um total de 45 trabalhos. Nesse aspecto cabe ressaltar que a intenção do Estado da Questão "é de levar o pesquisador a registrar, a partir de um rigoroso levantamento bibliográfico, como se encontra o tema ou o objeto de sua investigação no estado atual da ciência ao seu alcance. Trata-se do momento por excelência que resulta na definição do objeto específico da investigação, dos objetivos da pesquisa, em suma, da delimitação do problema específico de pesquisa" (NÓBREGA-THERRIEN; THERRIEN, 2004, p. 3)

Dessas pesquisas consultadas foram analisados os resumos, o referencial teórico e a análise de dados e, então, selecionadas 12 pesquisas cujas áreas de atuação mais se assemelhavam a este trabalho no ensino de fração, para analisar a abordagem utilizada, as atividades desenvolvidas e os resultados obtidos. Esses levantamentos estão representados no Quadro 1 a seguir.

Quadro 1 - Análise de Teses e Dissertações Correlatas a essa Pesquisa Brasil –2001 – 2018

Referência	**Abordagem**	**Atividade desenvolvida**	**Análise dos Resultados**
BEZERRA (2001)	Investigou o ensino dos números fracionários, em que se pretendeu estudar a aquisição do conceito e suas representações com base em situações-problema que fossem significativas e desafiadoras para o aluno, com base na concepção sociointeracionista.	Uma sequência de ensino com várias atividades buscando situações-problema que proporcionem reflexão, desafio e um significado à criança de o porquê de aprender um novo campo numérico.	O autor retrata que, durante a realização da sequência, alguns alunos apresentaram resultados satisfatórios, mas outros não conseguiram percorrer um caminho próprio para a compreensão, necessitando de um tempo maior para assimilação.
CRUZ (2003)	Investigou crianças que ainda não foram formalmente instruídas sobre frações, proporcionou tarefas sobre adições de frações através de estimativas, tendo por base dois pontos de referência: metade e inteiro. Alunos da 2° série e da 3° série do Ensino Fundamental.	Cada criança foi solicitada a resolver 4 tarefas envolvendo adição de fração.	O autor concluiu que: (1) crianças, mesmo antes da instrução formal sobre frações, foram capazes de resolver operações com frações através de estimativas e do uso de referenciais como metade e inteiro; (2) o referencial de metade, como ocorre em relação a outros conceitos relacionais, é uma ferramenta importante na resolução de adições de fração; (3) as crianças de ambas as séries apresentaram um mesmo nível de conhecimento intuitivo sobre frações.
SANTOS (2005)	Verificou as concepções dos professores que atuam nos 1º e 2º ciclos (polivalentes) e no 3º ciclo (especialistas) do Ensino Fundamental, no que diz respeito ao conceito de fração	A pesquisa de campo contou com dois momentos: o primeiro solicitou aos professores a elaboração de seis problemas, envolvendo o conceito de fração, e o segundo momento, pediu para que resolvessem os próprios problemas elaborados.	O autor afirmou que os resultados obtidos mostram uma tendência, tanto entre os professores polivalentes, como especialistas, em valorizar a fração com o significado operador multiplicativo na elaboração dos problemas. Quanto à resolução dos problemas há uma valorização dos aspectos procedimentais - aplicação de um conjunto de técnicas e regras (algoritmo).

MERLINI (2005)	Analisou as estratégias de resolução que os alunos de 5ª e 6ª séries utilizam frente a problemas que abordam o conceito de fração, no que diz respeito aos cinco diferentes significados da fração: número, parte-todo, quociente, medida e operador multiplicativo.	Utilizou-se um questionário, que os alunos responderam individualmente, envolvendo o conceito de fração; no segundo momento, foram feitas entrevistas clínicas.	O autor constatou que não houve, em nenhuma das duas séries pesquisadas, um desempenho equitativo entre os cinco significados da fração. Quanto às estratégias de resolução dos problemas não aconteceu uma regularidade. Estes resultados levaram o autor a concluir que a abordagem que se faz do conceito de fração, não garante que o aluno construa o conhecimento desse conceito.
MOUTINHO (2005)	Avaliou as concepções que são possíveis de se identificar com relação aos cinco diferentes significados da fração (Número, Parte-todo, Quociente, Medida e Operador Multiplicativo), a partir da aplicação de um estudo diagnóstico, com alunos das 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental.	A pesquisa foi pautada na elaboração de um instrumento diagnóstico, o qual foi aplicado e distribuído em duas escolas. Observou-se o desempenho e as estratégias utilizadas pelos alunos, quando resolveram de forma equivocada as questões propostas.	O autor concluiu que existe a necessidade de ocupar-se com um trabalho mais amplo do campo conceitual da fração, com base no uso de diferentes situações, abordando os distintos significados da fração propostos por Nunes *et al*. (2003), na busca de um melhor aprendizado desse conceito ao longo das séries do Ensino Fundamental.
VASCONCELOS (2007)	Comparou as estratégias cognitivas utilizadas por alunos com bom desempenho em Matemática com as estratégias cognitivas utilizadas por alunos que apresentam baixo desempenho escolar em Matemática, durante o processo de aquisição dos diferentes significados dos números fracionários: parte-todo, quociente e operador multiplicativo.	Fez-se uso de entrevista individual e de sete problemas que envolveram situações com números fracionários, solicitando a explicação da resolução.	Segundo o autor, a pesquisa apostou na necessidade de explorar a aquisição dos números fracionários em várias situações e em diferentes contextos, repensando o ensino de fração na escola. Tal ensino deve levar em consideração os conhecimentos informais, valorizando as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos, proporcionando interações e diversidades de ensino a fim de conseguir uma reflexão sobre as estratégias utilizadas. Dessa forma, possibilita-se um avanço para um processo mais eficiente e econômico.

SANTOS (2010)	Verificou as possíveis contribuições do material concreto, aliado à metodologia de resolução de problemas, para o ensino de frações com alunos de 5ª quinta série segundo os passos de Polya (1978) e as concepções de Onuchic (1999).	Utilizou material concreto (blocos) com três sequências de situação-problema.	O autor destacou que a abordagem que se faz do conceito de fração e seus significados, não garante que o aluno construa o conhecimento desse conceito mesmo utilizando o material concreto. Com isso, ressaltou a maior interatividade de conceitos com as situações-problema que lhes foram oferecidos. Fazendo com isso um intercâmbio entre ensinar e apreender (ensinagem).
MORAIS (2010)	Investigou o conhecimento e as dificuldades no que emergem no fazer ensinar-aprender das professoras que ensinam matemática no Ensino Fundamental ao tema fração.	Realizou-se uma investigação com professoras que participaram de um curso de especialização em Educação em Ciências e Matemáticas para séries Iniciais.	Segundo o autor, os resultados apontaram conhecimentos e dificuldades no fazer ensinar-aprender das professoras em relação ao tema frações. Relatou algumas dificuldades identificadas: 1) fazer comparações entre frações; 2) fazer a representação esquemática de frações. O conhecimento que identificou: 1) a construção de equação linear como resultado da leitura e interpretação de problemas com aplicação de frações; 2) a resolução algébrica de problemas envolvendo frações. Entretanto, destacou que essas professoras, conscientes de possuírem tais dificuldades, mostraram-se motivadas a superá-las.
SCHULZ (2017)	Analisou as contribuições da metodologia do Ensino Híbrido para a aprendizagem dos Números Racionais, com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.	Aplicou-se atividades com estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental, com aplicação do Ensino Híbrido seguindo o Modelo de Rotação por Estações, essas atividades foram elaboradas com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.	O autor afirmou que os resultados sinalizam que a metodologia de ensino utilizada proporcionou o desenvolvimento pessoal desses estudantes em relação à autonomia, interesse pelo estudo, cooperação e participação, atitudes centrais que contribuíram para a construção do conhecimento. Verificou-se, também, que houve um avanço significativo da aprendizagem do conteúdo em questão.

SANTOS (2017)	Investigou e sistematizou um movimento conceitual de fração a partir dos fundamentos da lógica dialética para a resolução do problema desencadeador da História Virtual Cordasmil.	Desenvolveu resolução de problema desencadeador, no que verificou as manifestações do movimento do pensamento teórico (redução e ascensão), desde a primeira ação de estudo até a terceira. Em seguida, elaborou um conjunto de tarefas particulares, que constituiu em situações que podem ser resolvidas pelo modelo universal ou a partir das transformações do modelo. Esse movimento foi alicerçado nos fundamentos da lógica dialética.	O autor concluiu que os dados captados na primeira ação de estudo foram, elevados no plano mental, formando o conceito teórico que é o reflexo das múltiplas abstrações na relação objetal. Na segunda ação de estudo, ocorreu a revelação da relação universal do conceito de fração, e ela representa o Conjunto dos Números Racionais. Na terceira ação, ocorreu a transformação do modelo universal para, na quarta ação, resolver diversas situações singulares. Portanto, destacou que é nesse processo que se revelam as particularidades e as inter-relações dos objetos singulares.
SILVA (2018)	Verificou as contribuições da teoria do ensino desenvolvimental para a formação do conceito de fração, por estudantes do curso de licenciatura em Pedagogia; apreenderam no decorrer do processo de ensino-aprendizagem do conceito de fração, elementos que indicaram mudanças qualitativas e quantitativas no desenvolvimento do pensamento do estudante; o que apontaram as peculiaridades da teoria do ensino desenvolvimental para organização do ensino do conceito de fração, considerando o contexto da formação dos estudantes do curso de Pedagogia.	Utilizou um experimento de ensino, baseado nos pressupostos de Davydov, em uma turma do curso de licenciatura em Pedagogia. Foram analisadas as resoluções de situações-problema envolvendo frações.	O autor afirmou que a análise dos dados revelou que a principal contribuição dessa pesquisa consistiu em mostrar um caminho alternativo de organização do ensino de matemática, especificamente do conceito de fração, pois o experimento permitiu verificar que, em média, 70,53% (setenta vírgula cinquenta e três por cento) dos estudantes tiveram mudanças qualitativas no modo de pensar a matemática e o conceito de fração.
VALLILO (2018)	Investigou como que a Linguagem Vernácula e a Linguagem Matemática contribuíram no trabalho com números racionais quando se faz uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Esta pesquisa foi desenvolvida seguindo a Metodologia Científica de Romberg-Onuchic apresentada por Onuchic e Noguti (2014).	Elaborou um Projeto e sua aplicação foi em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual da rede pública de ensino.	A autora percebeu que o trabalho do professor de incentivar os alunos a entenderem os significados das palavras presentes nos enunciados dos problemas que envolveram números racionais, possibilitou que eles compreendam e escrevam usando da linguagem vernácula para que possam dominar a linguagem matemática corretamente.

Fonte: Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD).

Verificando as pesquisas apresentadas no Quadro 1, percebe-se que diversas abordagens são utilizadas para retratar o conceito de fração, mas apenas duas dessas doze pesquisas são pautadas na Resolução de Problemas (SANTOS, 2010; VALLILA, 2018).

O foco principal de Santos (2010) foi investigar as contribuições do material concreto para o ensino de fração aliado com a metodologia Resolução de Problemas, que foi seguido pelos passos de Polya (1978), com aproximação de algumas concepções e discussões de Onuchic (1999). Já a autora Vallila (2018) faz uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, mas foi desenvolvida seguindo a Metodologia Científica de Romberg-Onuchic apresentada por Onuchic e Noguti (2014) investigando como a Linguagem Vernácula e a Linguagem Matemática contribuem no trabalho com números racionais. Nas outras pesquisas inventariadas não foi possível identificar a metodologia de ensino de Resolução de Problemas.

Com relação ao conteúdo de estudo das pesquisas, percebe-se que o conceito de fração é retratado na maioria das análises acima, e as atividades desenvolvidas apresentam situações que enfatizam a elaboração de situações-problema de fração, porém a maioria desses problemas não estão entendidos na concepção de ensinar *através* da Resolução de Problemas, sistematizado por Onuchic e Allevato (2011) e Allevato e Onuchic (2009; 2014).

Apenas duas pesquisas tratam do ensino e do aprender dos professores sobre fração (MORAIS, 2010; SANTOS, 2005), o que investiga as dificuldades que os professores enfrentam ao ensinar fração na Matemática.

Sendo assim, todas essas pesquisas contribuíram para a melhoria do processo de ensino aprendizagem de fração. Com isso, este trabalho tem uma contribuição incremental em relação aos demais, por tratar do ensino de fração sob a perspectiva da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática *através* da Resolução de Problemas.

Na metodologia de ensino de Resolução de Problemas discutida neste trabalho, o docente assume o papel de mediador e o estudante é o protagonista da construção do conhecimento. Os problemas serão propostos, conforme os passos indicados por Allevato e Onuchic (2014), em que o estudante busca uma solução a partir de discussões coletivas, utilizando-se de seus conhecimentos prévios. Assim, o entendimento dos conceitos de fração e sua representação serão resultantes da resolução do problema.

2.3 ESTRUTURA DA PESQUISA

Esta pesquisa está estruturada em sete capítulos. O primeiro deles traz uma breve apresentação da autora. O segundo capítulo traz uma introdução sobre a pesquisa apresentando o objetivo geral e objetivos específicos, relevância do tema e contribuições. O terceiro capítulo traz a discussão acerca da Resolução de Problemas, apresentando aspectos históricos, as concepções de problema e exercício e a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. O quarto capítulo refere-se ao ensino de frações, apresentando as concepções que norteiam a organização de uma aula a qual tem como finalidade o aprendizado de números racionais na forma fracionária.

O quinto capítulo apresenta o enfoque da pesquisa, indicando os caminhos que permitiram a aplicação das atividades as quais foram elaboradas e que compõem parte do Produto Educacional, são apresentados os sujeitos da pesquisa, os instrumentos de coleta de dados, os critérios de análise e se retrata o Produto Educacional. No sexto capítulo, apresenta-se um relato da aplicação bem como a análise com base nos critérios elencados. Por fim, no sétimo capítulo são retomados os objetivos da pesquisa para discussão das considerações finais e recomendações para trabalhos futuros.

3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

> A História da Matemática está repleta de exemplos da força motivadora que alguns problemas podem ter, de modo que podemos afirmar: a Matemática não é infalível ou inquestionável; não está pronta e totalmente estruturada. Ela se desenvolve pela prática da crítica e da dúvida e move-se a partir de conhecimentos anteriores, em busca de novos conhecimentos necessários à solução de novos ou antigos, mas não resolvidos, problemas (ALLEVATO, 2005, p. 38).

3.1 ASPECTO HISTÓRICO

Ao passar de uma sociedade que poucos precisam conhecer a Matemática para uma sociedade do conhecimento que necessita de saber muita Matemática, é natural que se busque maneiras de ensinar e de aprender Matemática (ONUCHIC, 1999). Com isso, pode-se perceber que utilizar problemas está presente na história da Matemática desde a antiguidade, visto que "registros de problemas matemáticos são encontrados na história egípcia, chinesa e grega, e são, ainda, encontrados problemas em livros-textos de Matemática dos séculos XIX e XX" (ONUCHIC, 1999, p. 199).

Desde o século XX, que foi marcado pela repetição daquilo que o professor passava, o ensino de Matemática era definido num processo em que "o professor falava, o aluno recebia a informação, escrevia, memorizava e repetia. Repetia exercícios feitos em sala de aula e treinava em casa" (ONUCHIC, 1999, p. 201). O conhecimento do aluno era medido pela repetição, ou seja, se o aluno fosse bem na prova, subtendia-se que entendeu todo o assunto.

Alguns anos mais tarde, ainda marcado pelo século XX, começou a preocupação de que os alunos deveriam entender a Matemática estudada. Segundo Onuchic (1999, p. 21)

> O aluno devia 'entender' o que fazia. Mas, o professor falava, o aluno escutava e repetia, não participava da construção de seu conhecimento. O professor não havia sido preparado para seguir e trabalhar as idéias novas que queriam implementar. O trabalho se resumia a um treinamento de técnica operatórias que seriam utilizadas na resolução de problemas-padrão ou para aprender algum conteúdo novo.

Começou-se então a pensar em aprender Matemática resolvendo problemas. Sendo que os primeiros estudos se referem a obra de Polya, com o livro *How to Solve It* (escrito em 1944, publicado em 1945 e traduzido em português como *A arte de resolver problemas* em 1978, com segunda reimpressão em 1995), considerado o pai da Resolução de Problemas.

Nas décadas de 1960 a 1970, teve um movimento de renovação conhecido como Matemática Moderna. A preocupação nessa época era sobre os conceitos e uma linguagem

Matemática global. Sem conseguir dar significado à Matemática da sala para a Matemática fora da sala de aula, esse ensino passou a gerar preocupações. (ONUCHIC, 1999)

Apenas nos anos 1970 que os educadores matemáticos começam a dar importância a Resolução de Problemas como prática de ensino e essa tendência começou a ser pesquisada por conta da influência de Polya nos anos 60. (ONUCHIC, 1999)

Em 1980, nos Estados Unidos, é publicada pelo National Council of Teachers of Mathematics – NCTM o documento *An Agenda for Action: Recomendations for School Mathematics of the 1980's* (Uma agenda para ação: recomendações para a Matemática escolar de 1980) que buscava melhorar a educação Matemática a favor de todos. Esse e outros documentos publicados pelo NCTM, influenciaram (e influenciam) reformas educacionais em diversos países, inclusive no Brasil.

A primeira recomendação do documento "Uma agenda para ação", indica que "a resolução de problemas deve ser o foco da matemática escolar nos anos 80" e que a resolução de problemas deveria orientar os esforços de educadores matemáticos nas próximas décadas (NCTM, 1980, p. 2, tradução nossa).

As ações recomendadas pelo NCTM (1980) enfatizam que:

- A resolução de problemas deve estar presente no currículo de matemática;
- A Matemática deve incluir estratégias para a aplicação matemática sob a resolução de problemas;
- Os professores de Matemática devem utilizar a resolução de problemas como forma de ensinar Matemática;
- Os materiais que auxiliem ensinar a Matemática sobre a resolução de problemas devem ser desenvolvidos em todos os níveis de ensino;
- Década dos anos 80, os programas de Matemática deveriam envolver os estudantes em resolução de problemas apresentando aplicações de Matemática em todos os anos;
- Pesquisadores devem priorizar pesquisas sobre resolução de problemas e como desenvolver esses problemas.

Na sequência, o documento Principles and Standards for School Mathematics (Princípios e padrões para Matemática escolar) do NCTM (2000), recomendou cinco padrões para o processo da Matemática Escolar, sendo que o primeiro trata da Resolução de Problemas. Nesse documento há orientação de que "[..] os alunos devem recorrer a seus conhecimentos e, por meio desse processo, eles frequentemente desenvolverão novas compreensões matemáticas.

Resolver problemas não é apenas um objetivo de aprender Matemática, mas também um meio importante de fazê-lo". (NCTM, 2000, p. 52, tradução nossa)

A seguir, discute-se sobre problemas na construção do conhecimento matemático, tratando do que é um problema matemático na concepção da Resolução de Problemas como metodologia.

3.2 O QUE É UM PROBLEMA?

Desde a década de 1980 a resolução de problemas vem fazendo parte do currículo de Matemática. Na época muito se falava, mas pouco se compreendia sobre essa prática. A palavra problema nos leva a pensar em Matemática, mas um problema pode ser encontrado em qualquer situação do cotidiano. Dirigir pode ser um problema para algumas pessoas, enquanto para outras que já automatizaram o processo pode ser um simples exercício do dia a dia.

De acordo com Lester (1977, p. 6, tradução nossa) um problema é "uma situação que um indivíduo ou um grupo precisa resolver e para a qual não dispõe de acesso fácil a um algoritmo que determina completamente o método de solução". Para Polya (1981, p. ix, tradução nossa) "resolver um problema significa encontrar uma saída para uma dificuldade, uma maneira de contornar um obstáculo, atingir um objetivo que não era imediatamente atingível." Na mesma concepção desses autores, Onuchic (1999, p. 215) complementa que um problema é "[...] tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver".

Na concepção de que um problema deve ser o ponto de partida para se ensinar Matemática, este configura-se como "qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm regras ou métodos prescritos ou memorizados, nem há um sentimento por parte dos estudantes de que há um método 'correto' específico de solução" (HIBERT; 1997 *apud* VAN DE WALLE; 2009, p. 42).

Os autores que acabam de ser citados dão várias definições sobre problema e baseando-se neles quando nesta pesquisa for citada a palavra problema estará referindo a uma atividade Matemática para a qual o estudante não tenha de imediato um método de solução, mas que tenha interesse em resolvê-lo. Ou seja, o problema será o "[...] ponto de partida e orientação para a aprendizagem, e a construção do conhecimento far-se-á através de sua resolução. Professor e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo em sala de aula" (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009, p. 7).

Há uma linha tênue em o que se constitui um problema e o que é um exercício, pois para uma mesma pessoa em momentos diferentes um problema pode passar a ser um exercício, e mesmo o que é um problema para uma pessoa pode ser um exercício para outra. Assim, um exercício é definido com uma atividade na qual já se dispõem de um método de solução e nas aulas de Matemática normalmente resume-se a seguir os passos de um exemplo apresentado pelo professor. Polya (1995, p. 124) refere-se aos exercícios como problemas rotineiros e enfatiza que:

> No ensino da Matemática, podem fazer-se necessários problemas rotineiros, até mesmo muitos deles, mas deixar que os alunos nada mais façam é indesculpável. O ensino que se reduz ao desempenho mecânico de operações matemáticas rotineiras fica bem abaixo do nível do livro de cozinha, pois as receitas culinárias sempre deixam alguma coisa à imaginação e ao discernimento do cozinheiro, mas as receitas matemáticas não deixam nada disso a ninguém. (POLYA, 1995, p. 124)

Dado o entendimento do que é um problema e o que é um exercício, especialmente no contexto das aulas de Matemática, é importante que ao se propor problemas aos estudantes, apresente-se uma variedade deles, por isso, na sequência, mostra-se os tipos de problemas.

3.3 TIPOS DE PROBLEMAS

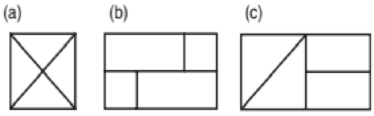
> Os problemas sempre ocuparam, invariavelmente, um lugar de destaque no ensino e nos currículos de Matemática. Entretanto a sua finalidade e outros aspectos relacionados à resolução de problemas passaram por mudanças. Essas ocorreram, principalmente, para tentar acompanhar as diferentes visões sobre o porquê de se ensinar Matemática, em geral, e resolução de problemas, em particular (ALLEVATO, 2005, p. 41).

Essencialmente, os problemas podem ser abertos ou fechados. Um problema fechado é aquele que tem apenas uma resposta correta, enquanto um problema aberto é aquele que apresenta vários caminhos possíveis ou a solução tem várias respostas corretas, ou mesmo pode não ter solução.

> [...] problemas fechados — em que tanto a situação inicial, como o processo de resolução, como o objetivo final (resposta) do problema é pré-determinado —, nos problemas abertos, o processo de resolução é aberto ou o final é aberto ou a formulação de novos problemas é aberta. São problemas que partem de enunciados menos estruturados, permitem a formulação de diversos tipos de questões e possibilitam a realização de explorações em diferentes direções. (ALLEVATO; VIEIRA, 2016, p. 121-122)

A Figura 2 ilustra dois problemas, (A) sendo um problema fechado e (B) um aberto.

Figura 2 - Problema aberto e fechado

<table>
<tr>
<td>(A) Identifique as figuras que estão particionadas corretamente em quartos, justificando suas escolhas. (adaptado de VAN DE WALLE et al., 2014)

</td>
<td>(B) Em uma turma, Ana tem 5 balas, João 6 balas e Bruno 4 balas. Qual a fração de balas que Ana possui? (AUTORAS, 2021)</td>
</tr>
</table>

Esses problemas abertos ou fechados, podem ainda ser classificados de acordo com outras características que incluem excesso ou falta de dados. O problema B da Figura 2 possui falta de dados uma vez que não indica qual o total a ser considerado na fração, se apenas dos três mencionados ou se dos alunos da turma.

Os problemas ainda podem ser caracterizados de acordo com o contexto, sendo este da própria Matemática – quando se quer criar uma fórmula ou descobrir um padrão, por exemplo, o contexto que envolve situações do mundo real ou mesmo um contexto relacionado com pseudoaplicações[2] do mundo real. As Figura 2(A) e Figura 3(A) ilustram um problema com contexto na própria Matemática e em (B) uma pseudoaplicação.

Figura 3 - Problemas

(A) O que é maior: $\frac{2}{3}$ ou $\frac{1}{5}$?	(B) Ana tem $\frac{2}{3}$ da idade de Paula. Se Paula tem 30 anos, qual a idade de Ana?

Fonte: Autoras (2021)

É importante enfatizar que os problemas apresentados na Figura 3 podem ser apenas exercícios para os estudantes se alguma técnica ou método de solução já foi apresentado e compreendido anteriormente.

Portanto, um mesmo problema pode apresentar características de mais tipos de problemas. É fundamental que os professores percebam os diferentes tipos de problemas, para que escolha os mais adequados e apliquem promovendo a aprendizagem com significado dos estudantes. Com isso, a escolha de um tipo de problema vai depender de qual é o objetivo que o professor tem, sendo que não há vantagens ou desvantagens para o uso de algum tipo de problema (BRITO, 2017).

Especialmente na escolha dos problemas, é importante observar também que o nível de dificuldade e abstração seja gradativo,

> Certas atividades são mais fáceis e naturais do que outras: adivinhar é mais fácil do que demonstrar, resolver problemas concretos é mais natural do que construir

[2] Referem-se a situações que traduzem alguma situação relacionada com o mundo real, mas que não fazem parte do cotidiano.

> estruturas conceituais. Em geral, o concreto vem antes do abstrato, a ação e a percepção antes das palavras e dos conceitos, os conceitos antes dos símbolos, etc. (POLYA, 1985, p. 13).

Assim, parece uma escolha razoável que os primeiros problemas apresentados aos estudantes tenham como contexto situações do mundo real, para posteriormente tratar de casos de natureza puramente Matemática, uma vez que os problemas do cotidiano têm potencial para conduzir a problemas matemáticos de forma mais fácil e natural.

Na sequência, apresentam-se recomendações para a escolha de um problema, uma vez que se acredita que a arte de resolver problemas tem como peça fundamental a elaboração ou seleção de bons problemas.

3.4 RECOMENDAÇÕES PARA A ESCOLHA DE UM PROBLEMA

A maioria dos livros didáticos tradicionais terminam com uma sequência de exercícios que estão atrelados com as ideias do início da lição. É comum encontrar nos livros didáticos exercícios de repetição, que promovem habilidades processuais de fixação de ideias recém aprendidas, trazendo uma falsa aparência de compreensão.

Grande parte dos professores e estudantes ao terminarem as listas de exercícios com sucesso, acreditam que houve aprendizagem significativa. Embora essas listas de exercícios possam trazer sucesso a curto prazo, pois essa repetição tem pouco efeito. Basta examinar as listas que são intituladas como “problemas” para verificar que consistem em calcule, resolva. São aplicações não realistas, problemas não criativos e assim por diante, ou seja, pouco (ou nada) auxiliam na promoção da reflexão do estudante.

> Outra questão importante refere-se à discussão sobre o papel do *livro didático* nas salas de aula de Matemática. O texto didático traz para a sala de aula mais um personagem, seu autor, que passa a estabelecer um diálogo com o professor e seus alunos, refletindo seus pontos de vista sobre o que é importante ser estudado e sobre a forma mais eficaz de se trabalharem os conceitos matemáticos. O livro didático vem assumindo, há algum tempo, o papel de única referência sobre o saber a ser ensinado, gerando, muitas vezes, a concepção de que ‘o mais importante no ensino da matemática na escola é trabalhar o livro de capa a capa’ (ONUCHIC, 2013, grifos autor, p. 91).

A tarefa do professor é fazer com que os estudantes consigam fazer relações, deem sentido e significado ao conhecimento matemático, e não que os estudantes apenas preencham páginas dos livros didáticos. O professor deve olhar para o livro didático como um recurso pedagógico com intuito apenas de auxiliá-lo ou como uma “[...] fonte de ideias para elaborar lições em vez de prescrições para que cada lição deve ser” (VAN DE WALLE, 2009, p. 92).

> Um elemento-chave para o ensino com resolução de problemas é a seleção de problemas ou tarefas apropriados. Uma tarefa é eficaz quando ajuda os alunos a aprender as ideias que você quer que eles aprendam. Deve ser a matemática na tarefa que a torna problemática para os estudantes de modo que as ideias matemáticas sejam as suas preocupações básicas. Então, o primeiro e mais importante a considerar ao selecionar qualquer tarefa para sua turma deve ser a matemática. Dito isso, onde procurar por tarefas? (VAN DE WALLE, 2009, p. 68)

É importante buscar as ideias principais de uma lição, adaptando as atividades dos livros didáticos de modo que os problemas sejam geradores da Matemática que se quer compreender. Lappan e Phillips (1998, p. 87-88, tradução nossa, grifo nosso), apresentam recomendações para que o professor analise os problemas que ele pretende usar:

> - *O problema tem incorporado ideias importantes e úteis*.
> - Os estudantes podem abordar o problema de várias maneiras, usando diferentes estratégias de resolução.
> - O problema tem várias soluções ou permite que diferentes decisões sejam tomadas e defendidas.
> - O problema incentiva o envolvimento do estudante e a socialização de suas ideias.
> - *O problema exige pensamento de alto nível e de resolução*.
> - *O problema contribui para o desenvolvimento conceitual dos estudantes*.
> - O problema conecta outras ideias matemáticas importantes.
> - O problema promove o uso hábil da matemática.
> - O problema oferece a oportunidade de praticar habilidades importantes.
> - *O problema cria uma oportunidade para o professor avaliar o que seus estudantes estão aprendendo e onde estão enfrentando dificuldades*.

Os quatro critérios que estão grifados, conforme indicação de Lappan e Phillips (1998), devem ser comuns a todos os tipos de problemas que se pretende propor, enquanto os outros são especificados para alguns, dependendo do objetivo que se quer focar. Especialmente o pensamento de alto nível é denominado por Weinberg, Krulik e Rudnick (2002) como sendo aquele que promove o desenvolvimento do pensamento crítico e criativo, que envolve a habilidade de analisar o problema e obter conclusões adequadas, atingindo a solução por meio de processos, criação e aplicação de ideias originais.

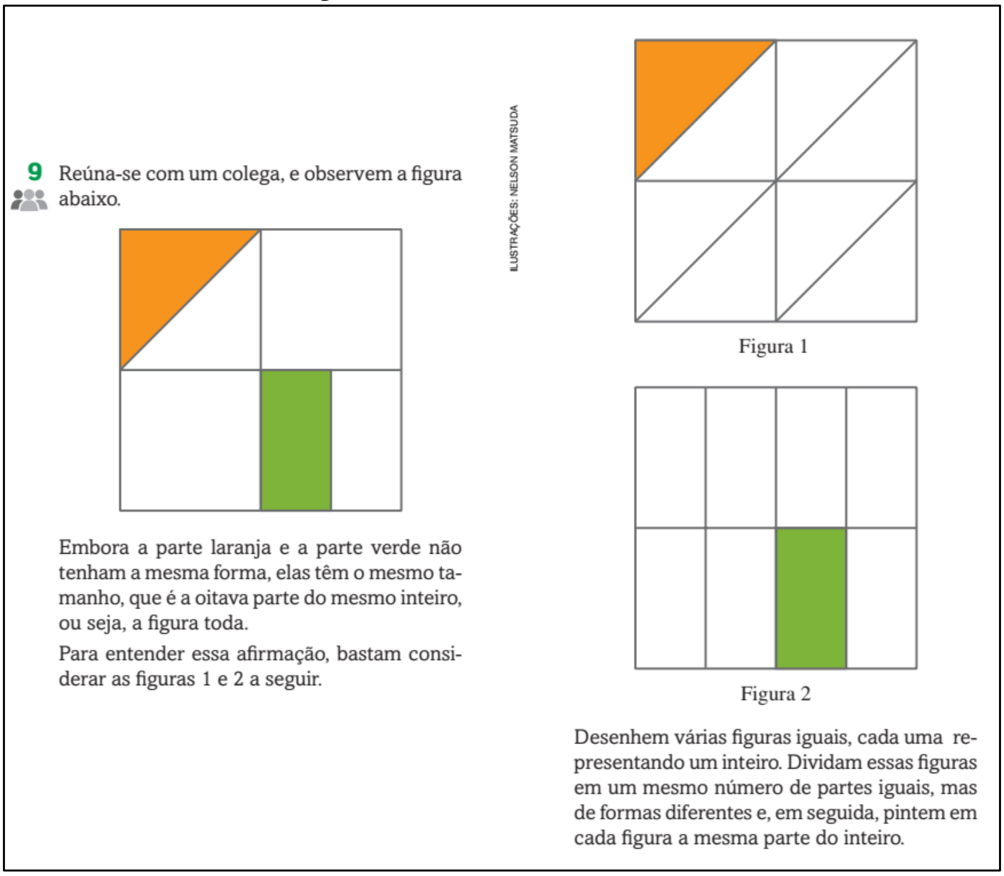
O problema (A) da Figura 3, por exemplo, tem como principal foco *desenvolver as ideias importantes* (recomendação 7) sobre frações, ao invés de *praticar habilidades* (recomendação 9), bem como *exige pensamento de alto nível* (recomendação 5) se for proposto aos estudantes como um problema, antes que o conteúdo seja apresentado pelo professor.

Os professores, quando selecionam problemas, precisam ter em mente quais dessas recomendações serão seguidas, com o intuito de desenvolver habilidades de resolução de problemas e permitir que os estudantes se comuniquem matematicamente e construam Matemática.

Os exercícios dos livros didáticos podem ser adaptados pelo professor de modo a construir problemas geradores que possibilitem envolver os estudantes na aprendizagem da

Matemática (recomendação 1) e no desenvolvimento de habilidades importantes da resolução de problemas (recomendações 5, 6 e 10). Na Figura 4 tem-se um exercício apresentado em um livro didático de Matemática do 6º ano.

Figura 4 - Exercício do Livro Didático



9 Reúna-se com um colega, e observem a figura abaixo.

Embora a parte laranja e a parte verde não tenham a mesma forma, elas têm o mesmo tamanho, que é a oitava parte do mesmo inteiro, ou seja, a figura toda.

Para entender essa afirmação, bastam considerar as figuras 1 e 2 a seguir.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Figura 1

Figura 2

Desenhem várias figuras iguais, cada uma representando um inteiro. Dividam essas figuras em um mesmo número de partes iguais, mas de formas diferentes e, em seguida, pintem em cada figura a mesma parte do inteiro.

Fonte: BIANCHINI (2015, p. 146)

Esse exercício envolve claramente uma ideia Matemática importante (recomendação 1), que é o entendimento da fração como parte de um todo, com uso de representações geométricas diferentes, porém, na forma como foi apresentado, já induz à solução não permitindo que sua construção tenha como foco as ideias dos estudantes. Uma modificação simples desse exercício permite outra abordagem do problema com a finalidade de gerar ideias matemáticas importantes, ampliando o nível de exigência do raciocínio matemático (recomendação 5). A Figura 5 apresenta o exercício como um problema gerador:

Figura 5 - Exercício como um problema gerador

Reúna-se com seu colega e observe a figura:

Qual a fração que a parte laranja representa do quadrado azul? E a parte verde? Essas frações representam a mesma parte ou partes diferentes do quadrado? Explique como vocês pensaram.

Fonte: Adaptado de BIANCHINI (2015, p. 146)

Este problema gerador permite o desenvolvimento conceitual de fração (recomendação 6) e o professor pode verificar quais as dificuldades dos estudantes, utilizando o processo de resolução como uma forma de avaliar o entendimento dos estudantes (recomendação 10). Também, na forma como foi apresentado, os estudantes precisam justificar a resposta encontrada e argumentar sobre as decisões que os levaram à solução (recomendação 4). A ideia é "[...] revisar um problema para que seja mais problemático, de modo que aumente as oportunidades de aprendizagem dos alunos." (CAI; LESTER, 2012, p. 151).

Este problema apresentado não se refere a uma aplicação da Matemática, não está relacionado com o mundo real, mas, mesmo assim, é um problema importante na medida em que permite ao resolvedor conjecturar uma solução, pensar matematicamente e justificar sua resposta; assim, o contexto de um problema pode ser a própria Matemática. Porém, Allevato e Onuchic (2019, p. 7) ressaltam que:

> Certamente, a resolução de problemas 'reais' envolve os estudantes e promove o estabelecimento e o uso de conexões. Esses problemas ilustram como as conexões podem contribuir para uma maior compreensão de padrões e regularidades em situações problemáticas. Claramente, os problemas com contextos ricos implicam a existência de conexões com outras disciplinas (p. ex., as ciências naturais, os estudos sociais, as artes), bem como com o mundo real e com as experiências da vida quotidiana dos alunos.

Especialmente no que se refere a esses problemas do cotidiano ou de aplicação, deve-se ter o cuidado com a artificialidade dos mesmos, comuns nos livros didáticos, pois dão a impressão, aos estudantes, de que a Matemática não tem sentido para o mundo real. Segundo Butts (1997, p. 40) para que se tenha um verdadeiro problema de aplicação, é necessário torná-lo real, e para tanto indica três critérios importantes a serem verificados na sua elaboração:

(i) Os dados deverão ser realistas, tanto nas informações do que é conhecido como nos valores numéricos usados.

(ii) Deverá ser razoável e esperar que a 'incógnita' do problema seja efetivamente desconhecida.

(iii) A resposta do problema deverá ser uma quantidade para cuja procura possivelmente se pudesse encontrar uma razão.

Butts (1997) indica que o problema que pede o comprimento de uma sala dado seu perímetro é artificial, uma vez que para saber o perímetro, inicialmente se mede o comprimento; também exemplifica que o problema clássico das idades é falho na medida que a incógnita não é verdadeiramente desconhecida.

Analisando os livros didáticos de Matemática do 6º ano, não é difícil encontrar problemas que descrevam situações artificiais e com incógnitas que não são verdadeiramente desconhecidas. A Figura 6 apresenta um problema artificial abordado em um livro didático.

Figura 6 - Problema artificial

Teresa comprou 7 barras de cereal, que foram divididas igualmente entre seus 3 filhos. Quanto de barra de cereal cada um dos 3 filhos ganhou?

Fonte: Livro do Sexto Ano da Coleção Araribá Mais Matemática (GAY; SILVA, 2018, p. 123)

Esse é um problema artificial, uma vez que, considerando essa situação sendo real, imagine uma mãe indo comprar barras de cereal sabendo que tem 3 filhos, por qual motivo ela compraria 7 barras e não 6 ou 9?

Butts (1997) indica que para alterar a artificialidade dos problemas, tem-se duas opções: (i) torná-lo o mais realista possível (usando os três critérios anteriores) ou (ii) torná-lo extravagante, tornando-o irreal.

Usando esses critérios, o problema da Figura 6 poderia ser adaptado para um problema real com a seguinte proposição: “A mãe de três crianças sabe que eles adoram comer bolo de chocolate no café da manhã, acontece que sobraram apenas dois pedaços do dia anterior. Para não haver briga entre eles, a mãe resolveu dividir os pedaços de modo que os filhos recebam partes iguais. Mostre e explique detalhadamente como a mãe deveria fazer.”

Além disso, tão importante quanto a criação de bons problemas pelos professores é que esses também possam ser criados pelos estudantes, sendo assim, a proposição de problemas passa a ser vista não apenas como objetivo de ensino, mas também como um meio de ensinar. Nesse sentido, Polya (1981b, p. 105, tradução nossa) enfatiza que:

> [...] formular o problema pode ser a melhor parte de uma descoberta, a solução geralmente precisa de menos discernimento e originalidade do que a formulação. Assim, permitindo que seus alunos participem da formulação, você não apenas os motiva a trabalhar mais, mas também lhes ensina uma atitude mental desejável.

Além do entendimento do que é um problema gerador, o qual permite o desenvolvimento de habilidades importantes nas aulas de Matemática, também e tão importante quanto, tem-se as diferentes abordagens para trabalhar a resolução de problemas em sala de aula. Hatfield (1978) indica que existem três diferentes abordagens: ensinar *sobre* Resolução de Problemas, ensinar *para* a Resolução de Problemas e ensinar *via* (através) da Resolução de Problemas. Na sequência essas serão apresentadas.

3.5 ENSINO *SOBRE* RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Quando se ensina a resolução de problemas como um método, um procedimento a ser seguido, que pode ser prescrito para qualquer problema, estamos nos referindo ao ensinar sobre a resolução de problemas. Normalmente, o entendimento da resolução de problemas como uma receita a ser seguida, é atribuída às fases indicados por Polya em seu livro *How to solve it*, escrito em 1944, publicado em 1945 e traduzido como *A Arte de Resolver Problemas* em 1978 (nessa dissertação citamos a segunda reimpressão de 1995). A Figura 7 apresenta as quatro fases:

Figura 7 - As quatro fases de Polya

Como Resolver Um Problema

COMPREENSÃO DO PROBLEMA

Primeiro.
É preciso *compreender* o problema.

Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?

É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?

Trace uma figura. Adote uma notação adequada.

Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?

xii

ESTABELECIMENTO DE UM PLANO

Segundo.
Encontre a conexão entre os dados e a incógnita.
É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata.
É preciso chegar afinal a um *plano* para a resolução.

Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?

Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil?

Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.

Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?

É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições.

Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa de útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si?

Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?

EXECUÇÃO DO PLANO

Terceiro.
Execute o seu plano.

Ao executar o seu plano de resolução, *verifique cada passo*. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?

RETROSPECTO

Quarto.
Examine a solução obtida.

É possível *verificar o resultado?* É possível verificar o argumento?

É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance?

É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Fonte: POLYA (1995, p. xii-xiii)

Porém, reduzir os trabalhos de Polya a um receituário dessas quatro fases é uma interpretação equivocada de seus estudos. Polya (1985) enfatiza que essas fases constituem perguntas que o professor poderia extrair de sua própria experiência e são orientadas que ele questione seus estudantes:

> Estas perguntas são exemplos de Heurística prática e de bom senso. O professor deve utilizá-las, de início, nos casos onde elas facilmente sugerem a idéia correta ao aluno. Depois ele poderá utilizá-las cada vez mais, tão frequentemente quanto o discernimento e o tato o permitirem. Com o tempo o aluno poderá compreender o método e usar, ele mesmo, estas perguntas; aprenderá, assim, a dirigir sua atenção aos pontos essenciais, quando se encontrar perante um problema. Terá adquirido, deste modo, o hábito do pensamento metódico que é o maior benefício a ser tirado das aulas de Matemática. (POLYA, 1985, p. 16)

Polya (1981, 1985, 1995) salienta que as aulas de Matemática não sejam impregnadas apenas de exercícios de repetição, mas com exercícios que permitam que o estudante caminhe com suas próprias pernas, em uma aprendizagem ativa na qual "as ideias devem nascer na mente dos estudantes e o professor deve atuar apenas como facilitador" (1981b, p. 104, tradução nossa).

Apesar das orientações de Polya direcionarem para envolver os estudantes no processo de construção ativa do seu conhecimento, ainda hoje as quatro fases são indicadas como uma prescrição a ser seguida e estudada, como um método de ensinar sobre resolução de problemas. A Figura 8 apresenta essa orientação indicada no manual do professor de um livro didático.

Figura 8 - Etapas da resolução de problema

As etapas da resolução de um problema

Segundo George Polya em *A arte de resolver problemas*, são 5 etapas que os alunos devem adotar na resolução de um problema. Vamos examinar cada uma delas.

Fonte: Dante (2018, p. xi)

O autor do livro didático da Figura 8 amplia as 4 fases de Polya em 5 etapas: compreensão do problema; elaboração de um plano de solução; execução do plano; verificação ou retrospectiva; emissão da resposta. Apesar de essas fases ou etapas serem interessantes para orientar a resolução de problemas em sala de aula, elas efetivamente não tornam os estudantes bons resolvedores de problemas, nem mesmo desenvolvem habilidades importantes para a resolução de problemas. Nesse sentido, Onuchic (2013, p. 97), numa revisão de diversos trabalhos internacionais, enfatiza que na literatura verifica-se que "as tentativas de ensinar os estudantes a usarem as heurísticas e os processos estilo-Polya, em geral, não haviam provado ser bem-sucedidas".

Outra concepção que também não se encaixa nas orientações de Polya é o ensinar para a Resolução de Problemas, conforme se discute na sequência.

3.6 ENSINO *PARA* RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Ensinar para resolver problemas, tem o intuito de ensinar a Matemática para então resolver problemas dos conceitos estudados, sendo o problema uma aplicação (como forma de justificar a Matemática ensinada) ou uma forma de praticar um conteúdo matemático. “O professor concentra-se no modo como a Matemática que está sendo ensinada pode ser aplicada na resolução de problemas, e preocupa-se com a habilidade dos alunos de transferirem o que aprenderam num contexto para problemas em outros contextos” (ALLEVATO, 2014, p. 213).

Ensinar para então resolver problemas é comumente presente nas salas de aula, assim como também nos livros didáticos, nos quais a preocupação está em explicar o conteúdo e logo, em seguida, apresentar uma lista de exercícios. Alevatto (2014) enfatiza que essa prática faz com que os estudantes entendam que resolver problema só pode ocorrer depois da explicação do conteúdo e reduzem a Matemática a uma função utilitária.

Nessa abordagem, muito enraizada em nossa cultura de sala de aula, onde o professor ensina a Matemática e os estudantes reproduzem, o professor explica da forma que ele acredita ser a melhor, o que significa que há apenas uma maneira para o estudante aprender “modo do professor ou nenhum modo” (VAN DE WALLE, 2009). A concepção de ensinar o conteúdo para depois aplicar os conceitos estudados em resolver problemas, é denomina por Van de Walle (2009) como *ensinar-então-praticar*, no qual a resolução de problemas está separada da aprendizagem.

> É improvável que as crianças que ficam esperando que o professor lhes apresente as regras, resolvam problemas para os quais não foram fornecidos os métodos de solução. Ao separar o ensino da resolução de problemas e do confronto com as ideias, a aprendizagem matemática fica separada do fazer matemática. Isso simplesmente não faz sentido algum (VAN DE WALLE, 2009, p. 58).

Nessa concepção de ensino, o estudante não tem a oportunidade de participar da construção dos conceitos, os quais são apresentados de forma pronta pelo professor, cabendo ao estudante ser avaliado por meio daquilo que conseguiu reproduzir do que o professor ensinou. Assim, tem-se uma barreira para experiências significativas, uma vez que ao ensinar para a resolução de problemas “[...] os professores geralmente retiram os desafios de uma tarefa Matemática, assumindo o pensamento e o raciocínio, e dizendo aos alunos como resolver o problema” (CAI; LESTER, 2012, p. 156).

Algumas das consequências do ensino para a resolução de problemas são discutidas por Schoenfeld (1992), que em seus estudos apresenta uma lista de crenças[3] dos estudantes relacionadas à Matemática:

> • Os problemas matemáticos têm uma e apenas uma resposta certa.
> • Existe apenas uma maneira correta de resolver qualquer problema de matemática, geralmente a regra que o professor demonstrou mais recentemente à turma.
> • Alunos comuns não podem esperar entender matemática; eles esperam simplesmente memorizá-la e aplicar o que aprenderam mecanicamente e sem entender.
> • Matemática é uma atividade solitária, realizada por indivíduos isolados.
> • Os alunos que entenderam a matemática estudada poderão resolver qualquer problema atribuído em cinco minutos ou menos.
> • A matemática aprendida na escola tem pouco ou nada a ver com o mundo real. (SCHOENFELD, 1992, p. 359, tradução nossa)

Esta lista evidencia a dependência que o estudante tem das ideias do professor e como a resolução de problemas é reduzida a um processo mecânico, desconectado da argumentação e da produção conjunta de ideias, o que decorre, segundo o autor, de relacionar a resolução de problemas apenas com a reprodução de técnicas e algoritmos. Além do mais, Schoenfeld (1992, p. 359, tradução nossa) enfatiza que "os alunos com essas crenças desistirão de um problema após alguns minutos de tentativas malsucedidas, mesmo que pudessem ter resolvido o problema se tivessem perseverado".

Numa mudança de perspectiva, na qual a resolução de problemas é parte da aprendizagem Matemática e os estudantes resolvem problemas para além de praticar exercícios, [...] primeiramente precisaremos mudar nossa visão de resolução de problemas como um tema que é adicionado à instrução após os conceitos e habilidades terem sido ensinados (CAI; LESTER, 2012, p. 152). Na sequência, discute-se essa abordagem.

3.7 ENSINO *ATRAVÉS* DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O ensino através da Resolução de Problemas tem os problemas como ponto de partida para ensinar Matemática, para os quais os estudantes não têm algoritmo para ser aplicado de forma direta para obter a resposta e tem a oportunidade de construir novos conceitos. Segundo Allevato e Onuchic (2014) o ensino através da Resolução de Problemas considera que a Matemática e a resolução de problemas são recíprocas e contínuas.

[3] "Crenças devem ser serem interpretadas como entendimentos e sentimentos de um indivíduo que moldam as maneiras pelas quais ele conceitua e se envolve em comportamento matemático". (SCHOENFELD, 1992, p. 358, tradução nossa)

Os estudos de Polya orientam para essa abordagem de Resolução de Problemas, uma vez que ele enfatiza que:

> A Matemática não é um esporte para espectadores: não pode ser apreciada e aprendida sem participação ativa, de modo que o princípio da aprendizagem ativa é particularmente importante para nós, matemáticos professores, tanto mais se tivermos como objetivo principal, ou como um dos objetivos mais importantes, ensinar as crianças a pensar. (POLYA, 1985, p. 13)

O documento no NCTM de 1980, *An Agenda for Action: Recomendations for School Mathematics of the 1980's*, também já indicava que "Os alunos devem ser encorajados a questionar, experimentar, estimar, explorar e sugerir explicações. Resolução de problemas, que é essencialmente uma atividade criativa, não pode ser construída exclusivamente em rotinas, receitas e fórmulas" (NTCM, 1980, p. 3, tradução nossa). Assim como, o documento Principles and Standards for School Mathematics (NCTM, 2000) também indica que a Resolução de Problemas deve ser um processo pelo qual se aprende Matemática, ou seja, "os estudantes devem ter oportunidades frequentes de formular, lidar e resolver problemas complexos que exijam uma quantidade significativa de esforço e devem, então, ser encorajados a refletir sobre seu raciocínio" (NCTM, 2000, p. 51).

Essas orientações implicam na mudança de perspectiva do "ensinar-então-praticar" para uma Matemática construída de forma ativa, em que o problema é o ponto de partida e na busca de solução acontece a construção de conceitos e conteúdo, sendo que ao estudante "[...] cabe a responsabilidade e o papel de protagonista da sua própria aprendizagem e do processo de construção de conhecimento" (ALLEVATO; VIEIRA, 2016, p. 118). Aprender através da Resolução de Problemas "[...] requer que os alunos mudem o foco de sua atenção do obter apenas as respostas para os processos e argumentos de como eles obtiveram as respostas" (VAN DE WALLE, 2009, p. 63).

Essa construção do conhecimento, colocando o estudante como protagonista, tem como principal objetivo a compreensão (em detrimento da mecanização) e para Van de Walle (2009, p. 43) quanto mais ideias se usam e se conectam uma com as outras, melhor será a compreensão do estudante, ou seja, "construir e compreender uma nova ideia requer pensar ativamente sobre a mesma. E pensar em 'Como isso se ajusta ao que eu já sei?' e em 'Como eu posso compreender isso em face de minha atual compreensão dessa ideia?'. Os estudantes devem ter interesse e estar mentalmente ativos para que a aprendizagem aconteça.

Nesta perspectiva, o professor deve encorajar e desafiar os estudantes a pensarem sobre suas novas ideias. Para se construir um novo conhecimento é preciso reflexão e trabalhar mentalmente na nova ideia. "O pensamento reflexivo significa peneirar as ideias já existentes para encontrar aquelas que pareçam ser as mais úteis ao dar significado às novas" (VAN DE WALLE, 2009, p. 43).

Para que o estudante seja reflexivo, é importante que o professor o envolva em problemas que usem as próprias ideias e procurem novas ideias. "A abordagem de resolução de problemas não requer apenas respostas, mas também explicações e justificativas para as soluções. Deve-se exigir dos estudantes que façam essas explicações tanto em discussões com seus colegas quanto por escrito e em forma de desenho" (VAN DE WALLE, 2009, p. 49).

Os estudantes devem se preocupar em dar significado à Matemática que está envolvida, para, então, desenvolver sua compreensão sobre essas ideias, além de terem a responsabilidade de justificar as suas respostas, ou seja, eles determinam se as respostas estão corretas e o porquê de estarem corretas. Com isso, Van de Walle (2009, p. 58) enfatiza que

> Ensinar com tarefas baseadas em resolução de problemas é mais centrado no aluno do que no professor. O ensino começa e se constrói com as ideias que as crianças possuem [...] seus conhecimentos prévios. É um processo que requer confiança nas crianças – uma convicção de que todas elas podem criar ideias significativas sobre matemática.

Quando o professor ensina através da Resolução de Problemas, ele dá possibilidades ao estudante de desenvolver a sua própria compreensão. "À medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar Matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente" (ONUCHIC, 1999, p. 208).

No Brasil, a proposta de ensinar por meio da resolução de problemas vem sendo sistematicamente utilizada e pesquisada pelo GTERP - Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas, UNESP, Rio Claro/SP, que propõem a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, conforme discute-se na sequência.

3.8 METODOLOGIA ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nessa metodologia, utilizar a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação tem o intuito de que o ensino e a aprendizagem ocorrem de forma simultânea durante a elaboração do conhecimento, "tendo o professor como guia e os alunos como co-construtores desse conhecimento" (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009, p. 6). A avaliação é constituída durante o processo da resolução do problema, ela integra junto ao ensino e aumenta a aprendizagem dos estudantes.

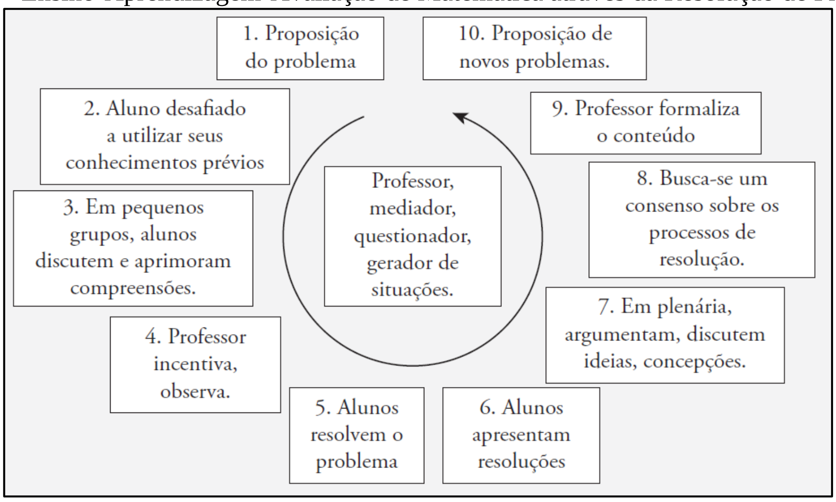
Trabalhar com a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, tem como foco principal auxiliar os estudantes a terem compreensão dos conceitos, técnicas e processos, necessária em cada conteúdo matemático (ONUCHIC, 1999).

Nessa metodologia, os problemas são denominados "problemas geradores", pois visam "[...] a construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento; ou seja, o conteúdo matemático necessário ou mais adequado para a resolução do problema ainda não foi trabalhado em sala de aula" (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 45).

Os estudantes discutem suas ideias, defendem suas soluções e avaliam as soluções dos colegas. O professor deve descobrir como os estudantes estão pensando em usar suas ideias e qual a forma que estão analisando o problema, aí é o momento em que o professor observa e avalia o estudante, e não é um momento que se reduz a transmissão de informação (VAN DE WALLE, 2009).

Colocar em prática essa metodologia em sala de aula não é fácil, sendo que professores e estudantes não estão habituados com esse tipo de ensino, "os alunos, mas também o professor terá que romper com vícios e práticas já cristalizadas e, portanto, mais cômodas" (ALLEVATO; VIEIRA, 2016, p. 119). Assim, os autores organizam orientações para os professores a fim de auxiliá-los a trabalhar com o ensino através da Resolução de Problemas, conforme apresentado na Figura 9.

Figura 9 - Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas



Fonte: (ALLEVATO; VIEIRA, 2016, p. 119)

A Figura 9 sintetiza como colocar em prática a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, organizada em 10 etapas, descritas por Onuchic e Allevato (2011) e Allevato e Onuchic (2009; 2014).

A primeira etapa proposta pelas autoras é *proposição do problema*, e, nesse momento, o professor pode elaborar ou selecionar o problema, ou ainda aceitar o problema proposto pelos estudantes, tendo em mente a construção de um novo conhecimento matemático. Nessa fase, o papel do professor "[...] é engajar os estudantes propondo bons problemas e criando uma atmosfera em sala de aula de exploração e de busca de significados" (VAN DE WALLE, 2009, p. 54).

Leitura individual é a segunda etapa, na qual o estudante faz a leitura do problema. Ao ler individualmente, o estudante pode refletir e ter o contato com a linguagem Matemática, desenvolvendo sua própria compreensão do problema e uma boa sugestão é que inicialmente ele trabalhe sozinho e, na sequência, troque ideias com outros colegas (VAN DE WALLE, 2009).

Em seguida, a terceira etapa é a *leitura em conjunto*, na qual os estudantes se reúnem em pequenos grupos, fazem uma nova leitura e discutem o problema. Os estudantes, nesta fase, colocam as suas ideias compartilhando entre si, e, se houver a necessidade, o professor poderá auxiliar, fazendo a leitura do problema e ajudando com palavras desconhecidas, o estudante pode também consultar o dicionário se houver necessidade.

É importante formar grupos heterogêneos, agrupando os estudantes que têm mais dificuldade com os mais capazes, para que possam descobrir que todos têm ideias para contribuir, desde que estejam dispostos a colaborar (VAN DE WALLE, 2009).

A quarta etapa é a *resolução do problema*, onde os estudantes, em seus pequenos grupos, tentam resolver o problema, utilizando ideias já aprendidas e conhecimentos prévios para solucionarem a proposta, sem nenhum modelo estipulado pelo professor. Nos pequenos grupos, os estudantes discutem sobre suas ideias e as dos colegas. É fundamental que os estudantes façam registros por escrito.

> [...] os estudantes compartilham ideias e resultados, comparam e avaliam estratégias, desafiam resultados, determinam a validade das respostas e negociam ideias sobre as quais todos podem concordar. A rica interação nesta sala de aula amplia, significativamente, as chances de que o pensamento reflexivo e produtivo sobre as ideias matemáticas pertinentes ocorra (VAN DE WALLE, 2009, p. 49).

Essa parte do registro da atividade é importante, pois "[...] a ação de registrar por escrito é um aprendizado gradual e que necessita de práticas contínuas" destacando a importância do desenvolvimento da aprendizagem, ou seja, quando os estudantes fazem os registros eles realizam análise dos problemas e ao mesmo tempo relacionam com situações conhecidas por eles, buscando ter a sua compreensão (CLEMENT; TERRAZAN, 2011, p. 99).

A quinta etapa é a o*bservação e incentivo*, o professor age como mediador; ele observa e questiona os estudantes desafiando e incentivando, sem fornecer respostas prontas.

> Uma vez que seus alunos estejam preparados para trabalhar na tarefa, é o momento de deixá-los caminhar. Demonstre confiança e respeito pelas habilidades deles. Coloque-os para trabalhar com a expectativa de que eles resolverão o problema. Você tem que deixá-los caminhar! Muitos professores são tentados a caminhar lado a lado e ajudá-los, 'colocando a carroça à frente dos bois' e fornecendo instruções inconvenientes. Tenha confiança em seus alunos! Deixe-os resolver o problema. Isto pode ser muito difícil para você, pois provavelmente escolheu ensinar para 'ajudar' os alunos. Agora você precisa deixá-los caminhar sozinhos (VAN DE WALLE, 2009, p. 65).

Quando o estudante caminha, significa que ele pode cometer erros, mas esse erro pode ser útil. "As melhores discussões acontecem quando há discordâncias. Se você corrigir todo pensamento incorreto, você terá menos debates, reduzirá a segurança dos alunos em seu próprio pensamento e terá menos ideias para uma discussão rica e proveitosa" (VAN DE WALLE, 2009, p. 65).

A sexta etapa são os *registros das resoluções na lousa*, em que cada representante do grupo vai registrar na lousa suas resoluções. Momento em que os estudantes compartilham suas ideias, percebendo a importância de uma explicação detalhada do problema.

Na sétima etapa *plenária*, discutem-se as resoluções que foram apresentadas, cada grupo defende suas ideias e justifica. O professor tem o papel de mediador e de guiar as discussões para proporcionar a participação de todos os estudantes, ou seja, "[...] ter uma discussão é muito mais importante do que ouvir uma resposta" (VAN DE WALLE, 2009, p. 67).

A oitava etapa é a *busca do consenso*, nesta etapa, o papel do professor é, junto com os estudantes, chegar a um consenso sobre o(s) resultado(s) correto(s). Em relação a esse momento de discussão e troca e ideias, Cai e Lester (2012, p. 153) alertam que:

> Há evidências consideráveis de que, mesmo quando os professores têm bons problemas, esses podem não ser implementados como pretendido. As reais oportunidades dos alunos de aprenderem dependem não só dos tipos de tarefas matemáticas que os professores colocam, mas também dos tipos de discurso em sala de aula que ocorrem durante a resolução de problemas, tanto entre professor e alunos como entre alunos. O discurso se refere às maneiras de representar, pensar, falar, concordar e discordar que os professores e os alunos usam para se engajarem nas tarefas de ensino.

Com isso, quando o estudante comete erro, deve ser discutido e tratado na busca de consenso.

A nona etapa é a *formalização do conteúdo*, o professor faz um registro de uma apresentação que é organizada em linguagem Matemática diante do que foi construído pela resolução do problema, destacando as propriedades do conteúdo matemático. Neste ponto é importante enfatizar que a nomenclatura e definições "só devem ser introduzidos depois de os conceitos serem desenvolvidos, como um meio de expressar ou nomear ideias. Eles raramente devem ser apresentados de início ou como coisas a serem memorizadas" (VAN DE WALLE, 2009, p. 76). O professor proporciona o rigor matemático e sistematiza o conhecimento construído, sendo relevante que utilize as resoluções apresentadas pelos estudantes como ponto de partida.

A décima etapa é a proposição *de novos problemas*, pode se constituir extensões do problema anterior com intuito de aumentar a complexidade da formulação dos conceitos, ou ainda verificar se houve compreensão dos conceitos elaborados.

No ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, a apresentação do conteúdo matemático é feita no final dessas etapas, "após os alunos já terem refletido sobre uma situação (problema gerador) que envolve aquele conteúdo. Desse modo, a linguagem e o formalismo matemático desenvolvidos pelo professor passam a fazer sentido para os alunos" (ALLEVATO; FERREIRA, 2013).

Com a resolução de problemas seguindo essas etapas, os conteúdos matemáticos podem fazer sentido para o estudante, pois ele passa a construir seu próprio conhecimento. Segundo Allevato e Vieira (2016, grifos autor, p.120) "ao contrário do que se observa nas aulas ditas 'tradicionais' e, inclusive em diversos livros didáticos, os problemas não são mais deixados para o final do processo. Eles são, sim, propostos no início das atividades e a aprendizagem vai realizar-se a partir e ao longo (através) da sua resolução". O trabalho apoiado nessa metodologia promove a construção do conhecimento matemático.

> O papel do professor é criar este espírito de pesquisa, de confiança e de expectativa. Neste ambiente, os estudantes são convidados a fazer matemática. Os problemas são apresentados e os estudantes buscam soluções por eles mesmos. O foco está nos estudantes ativamente compreenderem as coisas, testarem ideias e fazerem conjecturas, desenvolverem raciocínios e apresentarem (VAN DE WALLE, 2009, p. 33).

A metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas aproxima-se ao que propõe Van de Walle (2009) que sugere uma estrutura com três fases: *antes*, *durante* e *depois* da resolução do problema. A fase *antes* da resolução de problemas tem o intuito de preparar o estudante. O professor deve estar seguro que os estudantes compreenderam o problema antes de eles começarem a trabalhar, ou seja, "a releitura de um problema não melhora muito, mas fazer os estudantes recontarem o problema com suas próprias palavras, obriga-os a pensarem exatamente sobre o que o problema está perguntando" (VAN DE WALLE, 2009, p. 62). É fundamental preparar os estudantes para que ativem os conhecimentos prévios a fim de usá-los para a resolução do problema e, desse modo, o professor instiga expectativas para a solução do problema.

Na fase *durante* a resolução do problema, os estudantes trabalham em seus grupos construindo conhecimentos matemáticos. É adequado que os estudantes realizem as atividades sem a orientação ou direção do professor e assim pode ser possível “descobrir como os diferentes alunos estão pensando, que ideias estão usando e como estão abordando o problema” (VAN DE WALLE, 2009, p. 64). Este momento é fundamental para o professor observar e avaliar, mas também identificar como acontece a aprendizagem de cada estudante. O professor pode dar sugestões sobre as ideias dos estudantes, mas não interferir no modo de resolver o problema.

Na fase *depois* da resolução do problema, os estudantes vão discutir, justificar e desafiar as várias soluções do problema. É importante que o professor envolva a turma em uma discussão para que todos trabalhem em uma *comunidade de aprendizes*. Van de Walle (2009, p. 66) declara que a aprendizagem acontece quando “os alunos refletem individualmente e coletivamente sobre as ideias que eles criaram e investigaram”. O maior erro que pode ser cometido, está quando não se tem tempo suficiente para que se tenha uma discussão. Nesse sentido, Cai e Lester (2012, p. 156) enfatizam:

> Para ajudarem os alunos a se tornarem eficientes solucionadores de problemas, os professores devem aceitar que as habilidades dos alunos em resolver problemas freqüentemente se desenvolvem lentamente, exigindo, assim, uma atenção assistida, em longo prazo, para tornar a resolução de problemas uma parte integrante do programa de matemática. Além disso, os professores devem desenvolver uma cultura de resolução de problemas em sala de aula para fazer da resolução de problemas uma parte regular e consistente de sua prática de sala de aula.

Van de Walle (2009) afirma que para a turma se transformar em uma *comunidade de aprendizes de matemática*, a sala de aula torna-se um lugar “[...] onde os alunos se sentem confortáveis em se arriscar e compartilhar ideias; onde alunos e professor respeitam as ideias uns dos outros mesmo quando discordam, onde as hipóteses são defendidas e desafiadas respeitosamente, e onde o raciocínio lógico ou matemático é estimado acima de tudo” (ibidem, 2009, p. 66).

As etapas descritas por Van de Walle (2009) relacionam-se com a proposta de Allevato e Onuchic (2014). Estes autores ressaltam o papel do estudante como protagonista do processo, assim como o papel do professor sendo mediador, como fatores fundamentais para se ensinar por meio da Resolução de Problemas.

Além da discussão sobre as concepções que norteiam a Resolução de Problemas, na sequência discute-se os preceitos da aprendizagem de frações.

4 FRAÇÃO

> Reconhece-se que ensinar bem Matemática é um empenho complexo e não há receitas para se fazer isso. Não há um caminho único para ensinar e aprender matemática e mudar nosso sistema de educação matemática exige criar uma consciência do quê, do como e do porquê na Matemática (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 80).

Alguns pesquisadores (HUINKER, 2002; ONUCHIC, ALLEVATO, 2008) indicam que quando os estudantes são precocemente submetidos ao conhecimento simbólico, sem ter como base a compreensão dos conceitos, é possível que fiquem sujeitos a processos baseados na memorização que podem ser facilmente esquecidos. “A abordagem instrucional tradicional para frações tem sido fortemente simbólica e processual. A pressa de dizer aos alunos como executar procedimentos impede que eles estabeleçam uma base sólida de senso que envolve as operações com frações” (HUINKER, 2002, p. 76, tradução nossa).

Ao iniciar o estudo sobre frações, é reconhecido que os estudantes têm uma forte bagagem relacionada aos números naturais; o senso numérico que permite estabelecer as relações de maior, menor, igual e o princípio de contagem tem significado fortemente enraizado, não apenas pelo desenvolvimento formal, escolar sobre os números, mas também advindos do conhecimento informal, da prática e do cotidiano. Porém, esses conhecimentos prévios, por vezes, não são utilizados para dar significado às frações.

> Em vez de tratar nossos alunos como placas em branco, precisamos primeiro descobrir como eles pensam e o que sabem sobre frações e razão e, em seguida, iniciar o processo de modelar, remodelar e desenvolver esse conhecimento. O custo de ignorar o que eles trazem para nossas salas de aula é que eles aprendem procedimentos escolares para resolverem tarefas escolares e nunca integrarão seus conhecimentos construídos com as novas e poderosas formas de pensar, temos que ensiná-los. Neste caso, eles estarão mal preparados para pensarem matematicamente no mundo cada vez mais complexo que os espera. (SMITH, 2002, p. 17, tradução nossa)

Os conhecimentos prévios relacionados a números naturais podem gerar confusões em dois aspectos: (a) os estudantes explicam frações como quantidades inteiras e (b) explicam números inteiros como quantidades fracionárias (MACK, 1995; SMITH, 2002)

Ao explicar frações como quantidades inteiras (a), os estudantes trazem o conhecimento de números naturais para compreender o significado do numerador e denominador. Mack (1995), em suas pesquisas, aponta que os estudantes que apresentaram essa dificuldade relacionaram $\frac{1}{8}$ com a ideia de um bolo com 8 pedaços, ou ainda, que $\frac{3}{5}$ representam 3 tortas inteiras com 5 pedaços em cada torta. Para superar essa dificuldade, Mack deixou de trabalhar com situações que envolviam a representação simbólica de fração por um tempo, voltando a desenvolver a concepção de fração num contexto informal, relacionado com situações do mundo real.

> As representações simbólicas foram reintroduzidas da mesma maneira, após os estudantes terem resolvido numerosos problemas apresentados verbalmente no contexto de situações do mundo real e com materiais manipulativos, enquanto explicavam frações que eram familiares e, também, as que eram desconhecidas para eles em termos de conhecimento informal. Quando as representações simbólicas foram reintroduzidas, os estudantes não mais explicavam os significados das representações em termos de conhecimento prévio de números inteiros; eles agora explicavam os significados em termos de seu conhecimento informal de frações. (MACK, 1995, p. 431, tradução nossa)

Essa mesma relação com números naturais traz dificuldades relacionadas com a comparação e com a adição de fração. Nos números naturais, números maiores implicam em mais em termos de quantidade, enquanto em fração o denominador tem sentido contrário. Da mesma forma na adição, a relação com números naturais pode fornecer explicações razoáveis e induzir ao erro. Na situação $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ parece adequado responder que o resultado é $\frac{2}{8}$ uma vez que caberia explicar que "você tem uma pizza inteira com quatro pedaços e você ganha outra pizza inteira com quatro pedaços, então há duas pizzas com oito pedaços no total".

Quando compreendido o significado de fração, também é necessário utilizar-se desta concepção para resolver situações que envolvam números mistos – parte inteira e fracionária, pois, se essa relação não for desenvolvida, outra dificuldade aparece quando os estudantes tentam explicar números inteiros como quantidades fracionárias (b). Na situação $2-\frac{3}{8}$, se há compreensão da relação entre números inteiros e frações, uma explicação adequada seria "eu tenho dois bolos inteiros e de um deles eu tiro três partes de oito, então sobra um bolo inteiro e 5 partes do 8 do outro bolo" porém, se a relação não for estabelecida e os estudantes mecanizarem a ideia de fração, poderão tentar explicar, inclusive, o número inteiro como parte fracionária, achando razoável que $2-\frac{3}{8}$ resulte em "eu tenho 3 partes de 8 de um bolo e tiro duas partes, então resta 1 parte de 8 do bolo" (MACK, 1995).

Mack (1995) indica que, antes do desenvolvimento conceitual de fração usando a simbologia Matemática, é importante promover a compreensão informal do conceito de fração, relacionado a situações do mundo real. Em seus estudos, verificou que os estudantes eram capazes de responder à questão "Cada um de nós tem uma pizza do mesmo tamanho. Se você comer um quarto da sua pizza e eu comer um oitavo da minha pizza, quem come mais pizza?, mas não conseguiram responder à pergunta correspondente na qual as frações foram representadas simbolicamente (como: Qual fração é maior, $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{8}$?)” (MACK, 1995, p. 424, tradução nossa).

Callahan e Hiebert (1987) trazem algumas mudanças para que o ensino de frações aconteça baseado na compreensão: i) as frações carecem de mais tempo para serem aprendidas, ou seja, é importante que se produza um ensino com significado no conteúdo dos números, enriquecendo as conexões e desenvolvendo conceitos importantes; ii) priorizar os significados em detrimento das regras; iii) é relevante estimular os estudantes a fazerem estimativas e a pensarem no problema, antes de aplicar algoritmos.

Nesse sentido, na sequência, apresenta-se uma discussão sobre o desenvolvimento do senso fracionário.

4.1 DESENVOLVENDO O SENSO FRACIONÁRIO

> Os muitos usos da palavra estão fadados a causar confusão. Em particular, a palavra fração possui vários significados, nem todos são matemáticos. Por exemplo, uma fração pode ser um pedaço de terra subdesenvolvida, enquanto que na igreja se referiria à quebra do pão eucarístico. Na declaração ‘Quase uma fração das pessoas da cidade votou nas eleições presidenciais’, a palavra fração significa uma pequena parte. Quando você ouve que ‘o estoque subiu fracionariamente’, significa menos de um dólar. Na classe matemática, os alunos ficam desconcertados com a necessidade de aprender a definição técnica de uma fração parte-todo quando eles já sabem de sua experiência cotidiana de que a palavra fração que significa pouco. Quando uma fração como $\frac{4}{3}$ refere-se a mais de uma unidade inteira, a interpretação pouco se aplica bem. (LAMON, 2007, p. 635, tradução nossa).

Os estudantes trazem consigo uma compreensão sobre partição, conectada com a ideia de divisão de números naturais. Para desenvolver a ideia de fração, é importante ajudar os estudantes a construírem fatos sobre partes fracionárias, ou seja, as partes do todo que é compartilhado em porções iguais.

> As crianças parecem compreender a ideia de repartir uma quantidade em duas ou mais partes a serem compartilhadas igualmente entre amigos. Elas eventualmente estabelecem conexões entre a ideia de repartir em partes iguais e partes fracionárias. As tarefas de compartilhar (repartir igualmente) são, então, bons lugares para começar o desenvolvimento de frações. (VAN DE WALLE, 2009, p. 323)

O desenvolvimento da ideia de fração por meio de problemas de compartilhamento pode ser uma boa proposta, pois os estudantes realizam as tarefas de compartilhar remetendo ao particionamento[4] dos itens um de cada vez. Assim, quando "[...] esse processo deixa peças sobrando, é muito mais fácil pensar em compartilhar as sobras se os itens puderem ser subdivididos" (VAN DE WALLE, 2009, p. 323).

Neste sentido, Smith (2002) orienta que se use o termo *fração* para se referir a partição de uma quantidade, quando uma quantidade inteira for dividida em algum número de partes de tamanhos iguais. Comumente, apresenta-se essa ideia em problemas que envolvem área, quando uma figura é dividida em partes iguais das quais algumas são sombreadas, indicando a parte tomada. Porém, o todo de referência pode ser um grupo de pessoas ou de objetos $\left(\frac{1}{2}\right.$ dos estudantes de uma turma foram ao passeio; $\frac{1}{2}$ da produção estava defeituosa) ou uma medida de comprimento (corri metade da pista).

Nesse aspecto é importante compreender os diferentes significados de fração, conforme ilustra o Quadro 2.

Quadro 2 - Significados de fração

Interpretações	**Significado (Exemplificando para $\frac{3}{4}$)**
Parte-todo	$\frac{3}{4}$ significa três partes de quatro partes iguais da unidade, com frações equivalentes encontradas ao pensar nas partes em termos de pedaços maiores ou menores. $\frac{3}{4} = \frac{12}{16} = \frac{1\frac{1}{2}}{2}$
Medida	$\frac{3}{4}$ como um ponto identificado na reta numérica ou como parte de uma área.
Operador	$\frac{3}{4}$ é uma regra que informa como operar em uma unidade (ou no resultado de uma operação anterior): multiplique por 3 e divida o resultado por 4 ou divida por 4 e multiplique o resultado por 3. Isso resulta em múltiplos significados para $\frac{3}{4}$: $3(\frac{1}{4} - \text{unidades})$, $1(\frac{3}{4} - \text{unidades})$ e $\frac{1}{4}(3 - \text{unidades})$.
Quociente	$\frac{3}{4}$ é a quantia que cada pessoa recebe quando 4 pessoas compartilham 3 unidades de algo.

Fonte: Adaptado de Lamon (2007, p. 654, tradução nossa).

[4] Utiliza-se nessa dissertação o termo partição ao invés de divisão, pois este termo enfatiza o conceito de parte-todo e evita a confusão com divisão de números naturais (VAN DE WALLE *et al*., 2014).

O Quadro 2 apresenta os diferentes significados que podem ser tomados quando se utiliza o termo fração, porém um número racional representado na forma fracionária também pode indicar uma razão. Quando o quociente se refere a uma relação de multiplicação entre quantidades, o autor indica que se use o termo *razão*. Ou seja, o número $\frac{1}{4}$ pode expressar a situação de (a) uma pizza dividida em 4 partes, das quais 1 foi comida, mas também pode expressar (b) que em uma turma a cada 1 menina há 4 meninos; sendo que no caso (a) $\frac{1}{4}$ retrata a ideia de fração, enquanto que em (b) a ideia é de razão.

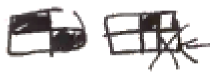
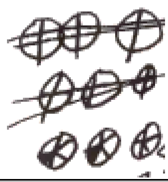
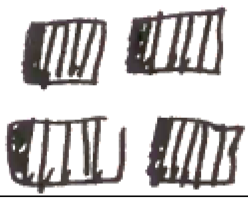
Essa diferença é importante, pois a maneira de adicionar frações difere da que adicionamos razões. Na situação $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ em (a) implica se foi comido um pedaço de uma pizza repartida em 4 pedaços no almoço e outro pedaço na janta, então foram comidos $\frac{2}{4}$ da pizza, enquanto que em (b) se em uma turma há 1 menina a cada 4 meninos e na outra turma ocorre o mesmo, ao juntar as turmas tem-se duas meninas a cada 8 meninos, ou seja $\frac{2}{8}$.

No raciocínio utilizado pelos estudantes, em problemas de compartilhamento, há uma conexão direta entre razão e fração, uma vez que 2 pizzas compartilhadas por 3 crianças significa que cada uma recebeu dois terços da pizza. Isso evidencia o cuidado que se deve ter ao propor problemas com o intuito de se trabalhar a ideia de fração.

Smith (2002) ressalta que diversas pesquisas têm mostrado que as crianças intuitivamente já sabem trabalhar com a ideia de metade, por isso os primeiros problemas de compartilhamento devem começar com a partição em duas partes, depois em quatro partes (pois usa a ideia de metade) e, quando houver claro entendimento, trabalha-se com partição em três partes e seus múltiplos, na sequência com 5 partes e seus múltiplos e, por fim, com outros números primos. Nesse sentido, os problemas de compartilhamento permitem que os estudantes utilizem estratégias oriundas de seus conhecimentos informais de metade repetida para obter a solução. Assim, o "número de compartilhadores é importante, porque resulta em uma partição exaustiva. Isso significa que tudo na situação de compartilhamento é completamente compartilhado, sem sobras" (EMPSON, 2002, p. 32, tradução nossa).

As ideias de compartilhamento são desenvolvidas pelos estudantes, utilizando seus conhecimentos prévios e vão se sofisticando à medida que são submetidos a problemas diferentes e com grau de complexidade maior. No Quadro 3 são apresentadas as diferentes estratégias de compartilhamento de acordo com o nível do senso fracionário.

Quadro 3 - Desenvolvimento de estratégias de compartilhamento de crianças

Estratégias Iniciais	Descrição	Exemplos
Metade Repartida	A criança repetidamente utiliza metades da unidade, independentemente do número de compartilhadores.	3 crianças compartilhando 2 barras de chocolate 
Tentativa e erro	Crianças tentam fazer várias partições com pouca ou nenhuma coordenação. Algumas crianças podem passar por uma lista de frações (por exemplo, metades, terços, quartos) até encontrar uma que produza o número certo de peças a serem distribuídas.	10 crianças compartilhando 3 barras de chocolate 
Estratégias intermediárias	**Descrição**	**Exemplos**
Distribua metades	A criança começa dando as metades, se possível. O resto da partição é coordenada com os compartilhadores de alguma maneira.	6 crianças compartilhando 4 barras de chocolate 
Coordenando compartilhadores em cada unidade	A criança divide cada unidade compartilhada em partes suficientes para todos os compartilhadores.	6 crianças compartilhando 4 barras de chocolate 
Coordenando compartilhadores com várias unidades		
1) Coordena o total de compartilhadores a cada duas unidades.	A criança particiona a cada 2 unidades em pedaços suficientes para todos os compartilhadores. Pode haver uma unidade restante para particionar.	12 crianças compartilhando 9 barras de chocolate “Eu sei que 2 × 6 é 12, então eu posso cortar 2 barras de chocolate em seis partes e continuar fazendo isso. Há uma barra de chocolate sobrando e posso cortá-la em 12 partes”.
2) Coordena o total de compartilhadores com cada 3, 4, 5 ou mais unidades.	A criança particiona a cada 3, 4, 5 ou mais unidades em pedaços suficientes para todos os compartilhadores. Pode haver unidades restantes para particionar.	12 crianças compartilhando 9 barras de chocolate “Eu sei que 4 × 3 é 12, então vou cortar 4 barras de chocolate em terços e ver o que acontece.” 

Estratégias posteriores	Descrição	Exemplos
Coordenando compartilhadores com todas as unidades		
1) Cria o mesmo número de peças que os compartilhadores.	Às vezes, as crianças tentam criar partições que dão a cada participante exatamente uma peça. Isso significa que eles precisam usar da contagem, multiplicação, divisão ou tentativa e erro para descobrir em quantas partes particionar cada unidade. Não funciona em todas as situações de compartilhamento igual.	24 crianças dividindo 8 barras de chocolate. “8 vezes o que é igual a 24? Vou cortar cada barra de chocolate em terços".
2) Cria um número de peças que é múltiplo do número de compartilhadores.	Essa estratégia sofisticada é usada principalmente por crianças fluentes em multiplicação. O objetivo da criança é criar um número de peças maior que o número de compartilhadores que podem ser igualmente distribuídos entre os participantes.	4 crianças compartilhando 7 barras de chocolate “Quero um número no qual 4 e 7 possam entrar. Se eu cortar cada barra de chocolate em 4 pedaços, terei 28 pedaços no total e cada criança poderá ter 7 pedaços ou 7 quartos.”

Fonte: (EMPSON, 2002, p. 32-34, tradução nossa)

Pode-se verificar, inclusive nas explicações do Quadro 3, a importância da utilização de desenhos ou outras representações visuais para o desenvolvimento do raciocínio sobre frações a partir de problemas de compartilhamento.

É fundamental proporcionar aos estudantes uma variedade de representações, como desenhos em forma de círculos ou retângulos junto com a representação do problema, isso facilitará a obtenção de conceitos importantes. Van de Walle (2009, p. 324) propõe outras possibilidades:

> [...] seria cortar circunferências ou quadrados de papel. Alguns estudantes podem precisar cortar e distribuir fisicamente os pedaços. Os alunos podem usar cubos encaixantes para fazer barras que eles possam separar em pedaços. Ou eles podem usar modelos de fração mais tradicionais como fatias de torta circulares.

O uso de modelos (materiais manipulativos) pode ajudar os estudantes na compreensão sobre fração e ainda pode esclarecer ideias que, muitas vezes, são confusas de um modo puramente simbólico.

> Use modelos de área, comprimento e conjunto, e certifique-se de que os estudantes conectem os modelos às operações simbólicas. As ferramentas ajudarão os estudantes a aprendem a raciocinar, contribuem com métodos mentais e fornecem uma ferramenta útil fundo para o desenvolvimento dos algoritmos padrão (VAN DE WALLE *et al.*, 2014, p. 121, tradução nossa).

No Quadro 4 são apresentados os modelos que podem ser usados no entendimento de fração, seus significados e os materiais.

Quadro 4 - Modelos para entendimento de fração

Modelo	O que significa a fração	Materiais que podem ser usados
Área	Tamanho relativo de uma parte para o todo (região de referência)	Círculos, retângulos ou outros polígonos confeccionados em papel, EVA ou outro material. Cubos ou blocos de tamanhos de mesma medida.
Comprimento	Distâncias ou medidas de uma parte em relação a um referencial ou localização em relação ao zero ou a outros valores da reta numérica.	Barras de Cuisenaire, tiras de papel, linha ou reta numérica desenhada em papel.
Conjuntos	Contagem de objetos de um todo de referência.	Tampinhas, cubos ou blocos, feijões ou outros objetos (iguais) que possam ser contados.

Adaptado de VAN DE WALLE *et al.*, 2014

Porém, é adequado que os materiais manipulativos não sejam propostos com repartições já prontas, mas que permitam aos estudantes criarem suas próprias partições, uma vez que:

> Os produtos comercialmente disponíveis, como tiras de fração, barras e blocos (modelos de comprimento e área), proporcionam aos alunos alguma experiência com diferentes unidades e subunidades de medida, mas elas apresentam sérias limitações. Eles não permitem aos estudantes a liberdade de dividir a unidade em qualquer número de subdivisões. As subdivisões disponíveis para o usuário são restritas pelo tamanho das peças fornecidas [...] Após o uso de determinadas subunidades predeterminadas em produtos manipulativos, a maioria dos alunos não reconhece o número infinito de subdivisões permitidas na linha numérica. (LAMON, 2008, p. 174, tradução nossa).

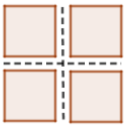
Todos esses modelos, trabalhados com diferentes materiais, possibilitam aos estudantes estabelecerem diferentes conexões que envolvam a ideia de fração, permitindo um raciocínio flexível para as diversas situações de partição. Ressalta-se a importância de se trabalhar com a reta numérica (desenhada ou usando uma linha), pois ajuda os estudantes a entenderem a fração como um número (e não como um número sobre outro). Ainda, no caso de conjuntos, sugere-se utilizar um barbante para contornar o conjunto de objetos, ajudando os estudantes a perceberem o todo, de modo que se concentrem na quantidade de conjuntos formados e não no tamanho dos conjuntos, ou seja, se 12 tampinhas formam o todo que é organizado em 4 partes, cada parte conterá 3 tampinhas, logo cada parte representa um quarto e não um terço, pois 4 conjuntos iguais formam o todo. (VAN DE WALLE *et al.*, 2014).

Vale ressaltar que não existe apenas um único modelo que seja ‘melhor’ para todas as crianças e para todas as situações que envolvam fração, ou seja,

> Um modelo concreto que seja significativo para uma criança em uma situação pode não ser significativo para outra criança na mesma situação, nem para a mesma criança em uma situação diferente. O objetivo é identificar atividades manipulativas usando materiais concretos cuja estrutura se ajusta à estrutura do conceito de número racional particular que está sendo ensinado. (BEHR *et al.*, 1983, p. 104, tradução nossa)

Além da relevância de se trabalhar esses diferentes modelos, enfatiza-se que as perguntas realizadas pelo professor, de modo a entender o raciocínio dos estudantes, também estimulam a compreensão de fração, ao invés de direcionar para uma resposta que remeta ao contexto dos números inteiros. O Quadro 5 ilustra como fazer perguntas adequadas, que estimulem a compreensão.

Quadro 5 - Tipos de perguntas

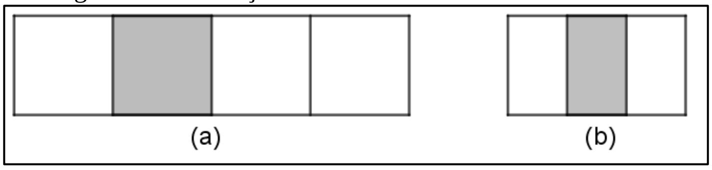
1 pedaço de bolo compartilhado entre 4 crianças 	Pergunta (1) Quando o professor pergunta: “Quanto bolo uma pessoa recebe?” O estudante pode responder: “Um pedaço” Nesse sentido as partes fracionárias acabem se reduzindo a quantidade de coisas.	Pergunta (2) Uma boa pergunta que ajudaria o estudante a articular a ideia de fração seria: “Quantas pedaços caberiam no todo?”

Fonte: Empson (2002)

Na pergunta (1), o intuito do professor, certamente, é que o estudante respondesse uma parte de quatro, ou um quarto, mas como resposta possível “um pedaço”, tem-se reduzido a fração a ideia de quantidade de pedaços apenas. Na pergunta (2) o estudante pode responder “4 pedaços”, porém a questão já remete a pensar na ideia parte-todo.

No passo seguinte, quando os problemas de compartilhamento estiverem entendidos pelos estudantes, é importante enfatizar o significado de numerador e denominador, que envolve entender que a referência de fração é de tamanho relativo e não absoluto, ou seja, uma fração maior do que outra não significa comparar se uma parte é maior que outra. Na Figura 10 ilustra essa ideia:

Figura 10 - Ilustração do tamanho relativo e não absoluto



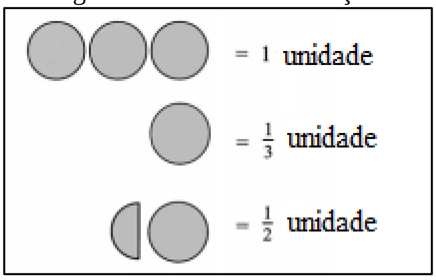
Fonte: Smith (2002, p. 8)

Na Figura 10 a parte sombreada de (a) é maior que a de (b), porém a fração que indica que a parte sombreada de (a), na relação da parte com o todo, é menor que a de (b). Smith (2002) destaca a relevância de se trabalhar com diferentes formas e diversos tamanhos para o entendimento de fração, assim como evidencia que se envolva o trabalho com quantidades discretas e contínuas para promover o entendimento relativo à unidade, ao todo de referência na fração. Ou seja, na Figura 10 em (a), a interpretação padrão é que $\frac{1}{4}$ do todo está sombreado, mas outras interpretações também estariam corretas como $\frac{3}{4}$(três quartos do todo não estão sombreadas) ou $\frac{1}{3}$(se o todo é a parte não sombreada).

> No desenvolvimento conceitual, pouco importa se exigimos que os estudantes aprendam os termos oficiais numerador e denominador imediatamente ou se, temporariamente, aceitam apenas 'o número superior' e 'o número inferior'. O que importa é que os estudantes entendam que o significado dos dois números é dado por sua posição. (SMITH, 2002, p. 7, tradução nossa)

Além disso, a ideia de inteiro (todo/unidade) também é uma concepção que demanda atenção, uma vez que as experiências que os estudantes têm com os números naturais tem a referência de que "a unidade 'um' sempre se refere a um único objeto. Em frações, no entanto, a unidade pode consistir em mais de um objeto ou pode ser uma unidade composta, ou seja, pode consistir em vários objetos empacotados como um" (LAMON, 2008, p. 16, tradução nossa). A unidade é particionada e um novo número é usado para se referir às partes dessa unidade, como mostra na Figura 11.

Figura 11 - A unidade e frações



Fonte: Lamon (2008, p. 16, tradução nossa)

Na Figura 11 é possível verificar que um inteiro refere-se a três círculos, ou seja, tem-se uma concepção robusta de ser trabalhada com os estudantes e, por isso, não cabe a trivialidade com que é por vezes apresentada. Portanto, é importante que o estudante conte as "[...] partes fracionárias para ver como várias partes se comparam com o todo, isso ajuda os estudantes a entenderem a relação entre as partes (o numerador) e o inteiro (o denominador)"(VAN DE WALLE *et al*., 2014, tradução nossa, p. 111).

A compreensão da parte fracionária é fundamental para desenvolver conceitos sobre fração; há duas ideias sobre o simbolismo fracionário: i) que o número da parte superior conta; e ii) o número da parte inferior diz o que está sendo contado. Segundo Van de Walle (2009, grifos autor, p. 329) destaca que "o *que* da fração são as partes fracionárias. Elas podem ser contadas. Os símbolos da fração são apenas uma taquigrafia para dizer 'quantos' e 'o que' contar".

É importante destacar que o número da parte inferior é o divisor e o da parte superior é o multiplicador, isto é:

> ¾ é três vezes o que você obtém ao dividir um inteiro em quatro partes. Essa ideia de multiplicador e divisor é especialmente útil quando os alunos forem indagados mais tarde a pensar sobre frações como uma divisão indicada; Isto é, ¾ também significa 3 ÷ 4 (VAN DE WALLE, 2009, p. 329).

Quando essas ideias estiverem compreendidas, pode-se dizer que a ideia de fração foi estabelecida, e os estudantes farão uso delas de forma eficiente para poderem comparar frações, utilizando-se do raciocínio envolvendo (1) quantidades divididas, (2) componentes numéricos, (3) pontos de referência e (4) conversões numéricas. O Quadro 6 apresenta essas diferentes formas de pensar sobre frações:

Quadro 6 - Formas de pensar sobre frações

Raciocínios envolvendo a ideia de fração	**Frações**	**Comparação**
Quantidades divididas	$\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{4}$	Quintos são menores que quartos então $\frac{3}{5} < \frac{3}{4}$
Componentes numéricos	$\frac{5}{7}$ e $\frac{3}{5}$	Em ambas faltam 2 partes para completar o todo e como sétimos são menores que quintos, logo $\frac{5}{7} > \frac{3}{5}$
Pontos de referência	$\frac{15}{12}$ e $\frac{3}{8}$	$\frac{15}{12}$ é maior que um inteiro e $\frac{3}{8}$ é menor que um inteiro, ou ainda, $\frac{15}{12}$ é maior que um meio (a metade de um inteiro divido em 12 partes, toma 6 partes) e $\frac{3}{8}$ é menor que um meio, logo $\frac{15}{12} > \frac{3}{8}$
Conversões numéricas	$\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{8}$	$\frac{3}{5}$ é mesmo que $\frac{15}{25}$ e $\frac{5}{8}$ é mesmo que $\frac{15}{24}$, logo 25 avos é menor que 24 avos, então $\frac{3}{5} < \frac{5}{8}$, ou ainda, $\frac{3}{5}$ é mesmo que $\frac{24}{40}$ e $\frac{5}{8}$ é mesmo que $\frac{25}{40}$, logo tomar 24 partes de 40 é menor que do 25 partes, então $\frac{3}{5} < \frac{5}{8}$

Fonte: Autoras (2021)

No caso das quantidades divididas, analisa-se o denominador e seu significado, dado que o numerador é mesmo (a quantidade de partes tomadas é mesma, porém o tamanho das partes é diferente). Esses

> [...] problemas com o significado quociente podem ser usados para as crianças se apropriarem do invariante de ordenação das frações por meio do raciocínio lógico: quanto mais crianças para dividirem o bolo, menor o pedaço de bolo que cada uma receberá. Esta relação inversa entre o divisor e o quociente poderia ajudar as crianças a entenderem que, quanto maior o denominador, menor será a parte (MAGINA; CAMPOS, 2008, p. 28).

Porém, quando o numerador é diferente, apenas pensar em quantidades divididas não é suficiente, e faz-se necessário analisar a relação com o todo, seja analisando as componentes numéricas e verificando o que falta para completar o todo ou utilizando alguma referência conhecida (o inteiro, metade, a quarta parte ...). Quando nenhuma dessas estratégias é suficiente, será necessário utilizar a ideia de conversão numérica, deixando os numeradores com um mesmo valor ou usando frações equivalentes, deixando os denominadores com um mesmo valor.

Por fim, vale salientar que os estudantes desenvolvem o senso fracionário quando (a) se sentem à vontade para executar partições de qualquer tamanho; (b) são capazes de encontrar qualquer número de frações entre duas frações dadas; e (c) são capazes de comparar quaisquer duas frações (LAMON, 2008).

Quando o senso fracionário estiver desenvolvido é possível inserir as operações com frações, sobre as quais, na sequência, discute-se como são abordadas.

4.2 OPERAÇÕES COM FRAÇÕES[5]

As operações com números naturais começam com a contagem, com a utilização de estratégias de cálculo mental, apoiadas pelo uso de material manipulativo e pela resolução de problemas que envolvem situações do mundo real e, conforme os números aumentam, são apresentados algoritmos. No entanto, quando se ensina as operações com frações, são raros os recursos manipulativos ou visuais utilizados e os problemas que envolvem algum contexto do mundo real são empregados apenas como aplicação, após os algoritmos terem sido apresentados, ou seja, as operações com frações comumente iniciam pelos algoritmos. (VAN DE WALLE *et al.*, 2014).

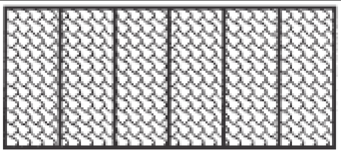
Assim, no ensino das operações com frações onde se prioriza os algoritmos e despreza-se métodos intuitivos, correndo direto para as regras, os estudantes “[...] concentram-se no simbolismo, habilidades, regras e algoritmos, passo a passo, usados na realização de uma tarefa matemática” (STEWART, 2005, p. 35, tradução nossa).

Como primeiro passo, antes mesmo de indicar que as operações sejam trabalhadas, é possível desenvolver o senso fracionário relacionado com as operações, por meio de problemas que envolvam a discussão da relação parte-todo, conforme apresentado na Figura 12.

---

[5] Apesar desse referencial não ter sido utilizado na análise de dados, ele foi mantido pois norteou a construção do Produto Educacional.

Figura 12 - Relação parte-todo



a) Metade da barra de chocolate equivale a quantas peças?
b) 2 peças é que parte da barra de chocolate?
c) Eu tenho 1/2 da barra de chocolate e você tem 1/3 da barra de chocolate. Quanto nós temos juntos? E que parte da barra de chocolate está faltando?
d) Eu tenho 1/2 da barra de chocolate e você tem 1/3 da barra de chocolate. Quem tem mais? Quanto mais?
e) Quanto da barra de chocolate é 1/2 de 1/3?
f) Quantas vezes 1/3 cabe em 1/2 da barra de chocolate?

Fonte: LAMON, 2008, p. 120, tradução nossa

Na Figura 12 pode-se verificar que os itens (a) e (b) tratam do entendimento de fração como parte-todo, o item (c) trata da operação de adição e entendimento do todo de referência, em (d) tem-se a comparação de frações, bem como a operação de subtração, por fim, (e) e (f) tratam das operações de multiplicação e divisão, respectivamente.

Esse problema ilustra como é possível trabalhar as operações com frações e assim desenvolver progressivamente seu entendimento. Além disso, como a adição de números naturais começa com contagem, também é importante que o mesmo aconteça com as frações, uma vez que "contando partes fracionárias para ver como várias partes se comparam com o todo, ajuda os estudantes a entenderem a relação entre as partes (o numerador) e o inteiro (o denominador)" (VAN DE WALLE *et al*., 2014, p. 111). Também é relevante que os estudantes façam estimativas de cálculos, isto facilitará a compreensão de significados nas operações com frações, uma vez que eles "[...] têm grande dificuldade com qualquer explicação para algoritmos que eles não tenham desenvolvido por si mesmos" (VAN DE WALLE, 2009, p. 347)".

Porém, há professores que podem argumentar que não existe a necessidade de dedicar-se muito tempo às operações com frações, que informar um algoritmo para cada operação provoca menos confusão aos estudantes, e que é a forma mais rápida de se aprender. Entretanto, Van de Walle *et al*. (2014, p. 121, tradução nossa, grifo nosso) apresenta três motivos para se trabalhar o ensino das operações com frações:

> *Primeiro, nenhum dos algoritmos ajuda os estudantes a pensar conceitualmente sobre as operações* e o que elas significam. Quando os estudantes seguem um processo que não entendem, não têm meios de saber quando usá-lo e não têm como avaliar se suas respostas fazem sentido. *Segundo,o domínio de algoritmos pouco compreendidos no curto prazo é rapidamente esquecido*, principalmente por estudantes com dificuldades em matemática. Quando combinados com os diferentes procedimentos para cada operação, todos os algoritmos logo se tornam uma confusão sem sentido. Os alunos perguntam: 'Preciso de um denominador comum ou apenas adiciono ou multiplico os números inferiores?' 'Qual você inverte, o primeiro ou o segundo número?' *Terceiro, os alunos não conseguem se adaptar a pequenas mudanças nas frações*. Por exemplo, se um número misto aparecer, os alunos não sabem como aplicar o algoritmo.

Assim, o desenvolvimento do conteúdo de frações precisa de tempo para que se avance da compreensão conceitual para a procedimental (que envolve algoritmos) e, nesse sentido, o documento *Common Core State Standards for Mathematics* (s.d.) sugere o seguinte processo:

1. Desenvolver compreensão da equivalência de frações, estabelecendo métodos para gerar e reconhecer frações equivalentes, decompondo frações (em uma soma de frações com o mesmo denominador), e usando o significado de frações e de multiplicação para multiplicar uma fração por um número inteiro.
2. Desenvolver o entendimento de procedimentos para a adição e subtração de frações com denominadores diferentes, utilizando frações equivalentes e fazendo estimativas razoáveis para avaliar os resultados.
3. Ampliar o entendimento de multiplicação e divisão com números naturais para frações, limitando inicialmente a multiplicação de uma fração por um número natural e a divisão de uma fração por um número natural (ou o inverso).
4. Desenvolver o entendimento de procedimentos para multiplicação e divisão de frações por frações, utilizando recursos visuais para desenvolver os algoritmos.

Especificamente para as operações com frações, quatro sugestões são propostas por Siegler *et* al. (2010, tradução nossa) para o desenvolvimento gradual da compreensão conceitual e procedimental:

1. Use modelos de área, retas numéricas e outras representações visuais para melhorar a compreensão dos estudantes sobre os procedimentos de cálculo formais. (p. 28)
2. Ofereça oportunidades para os estudantes usarem estimativas para prever ou julgar a razoabilidade das respostas a problemas que envolvam operações com frações. (p. 30)
3. Aborde equívocos comuns sobre procedimentos de cálculo com frações, com discussões de como e por quê. (p. 31)
4. Apresente contextos do mundo real com números plausíveis para problemas que envolvem cálculo com frações. (p. 33)

Porém, há de se ter cuidado com o uso de materiais manipulativos para o aprendizado das operações com frações, uma vez que:

> Uma coisa é uma criança saber ilustrar frações como 1/2 ou 1/3 usando materiais manipulativos e outra bem diferente é ser capaz de ilustrar 1/2 + 1/3 usando materiais manipulativos. Esses materiais que são úteis para ilustrar frações podem não ser úteis para ilustrar a adição de frações. Ou seja, a adição de frações pode ser mais significativa se for construída sobre um forte entendimento concreto de frações individuais, mas isso não significa que aprender a adicionar barras ou papel dobrado

> facilitará a compreensão da criança sobre a adição de frações (BEHR *et al.*, 1983, p. 104-105, tradução nossa)

Uma estratégia mais adequada que o uso de materiais manipulativos para o entendimento das operações, é o uso de estimativas para aprofundar a compreensão dos estudantes. Dessa forma, envolvem estratégias que permitam desenvolver, também, o senso fracionário, uma vez que abrange a compreensão de fração e significado de numerador e denominador para comparar frações. Além disso, estimando resultados, os estudantes podem se questionar sobre os procedimentos de cálculo e se envolver em discussões sobre erros relacionados com os algoritmos usados. No Quadro 7 são apresentadas as estratégias de referência e tamanho relativos das frações como possibilidades para se realizar estimativas razoáveis.

Quadro 7 - Estratégias de referência e tamanho relativos das frações

Estratégias	**Método**	**Exemplo**
Referências	Uma maneira de estimar é por meio de referências - números que servem como pontos de referências para estimar o valor de uma fração. Os números 0, $\frac{1}{2}$ e 1 são referências úteis porque os estudantes geralmente se sentem confortáveis com eles. Os estudantes podem considerar se uma fração está mais próxima de 0, $\frac{1}{2}$ ou 1.	Ao adicionar $\frac{7}{8}$ e $\frac{3}{7}$, os estudantes podem raciocinar que $\frac{7}{8}$ está perto de 1 e $\frac{3}{7}$ é perto de $\frac{1}{2}$, então a resposta será próxima a $1\frac{1}{2}$.
Tamanho relativo das frações	Uma abordagem útil para estimar está em considerarem o tamanho das frações usando frações com numerador 1. Para fazer isso, os estudantes devem primeiro entender que o tamanho de uma parte fracionária diminui à medida que o denominador aumenta.	Para estimar a resposta para $\frac{9}{10}+\frac{1}{8}$, os alunos iniciantes podem ser encorajados a raciocinar que $\frac{9}{10}$ é quase 1, que $\frac{1}{8}$ é próximo a $\frac{1}{10}$ e que, portanto, a resposta será cerca de 1. Os estudantes mais avançados podem ser encorajado a raciocinar que $\frac{9}{10}$ está apenas $\frac{1}{10}$ de distância de 1, que $\frac{1}{8}$ é ligeiramente maior do que $\frac{1}{10}$ e, portanto, a solução será um pouco maior que 1.

Fonte: Adaptado de Siegler *et* al. (2010, p. 31)

Essas estratrégias de estimativas, do Quadro 7, também podem ser usadas para as operações de multiplicação e divisão. Na multiplicação de $\frac{1}{3}$ por $\frac{2}{5}$, por exemplo, será tomada a terça parte de $\frac{2}{5}$ que é menor (mas próximo) que a metade, logo, tomar a terça parte da metade implica em que cada metade fica particionada em três partes, e o todo fica particionado em 6 partes, então o resultado deve ficar próximo de zero.

Especialmente, em se tratando de multiplicação e divisão de frações, é adequado que se trabalhe estimativas e haja entendimento do significado da operação. Nesse sentido ressalta Lamon (2008, p. 19, tradução nossa):

> Um aluno deve aprender a pensar sobre as quantidades e como elas se relacionam entre si para determinar as operações apropriadas. As crianças experimentam obstáculos cognitivos à medida que encontram frações, porque tentam fazer conexões com os números e operações com as quais estão familiarizados. Algumas das ideias que as crianças desenvolvem ao trabalhar com números inteiros realmente interferem na capacidade posterior de entender frações e operações. Por exemplo, a maioria das crianças pensa que a multiplicação aumenta e a divisão diminui.

Assim, a compreensão dos procedimentos que envolvem as operações com frações, demandam também que se relacionem os conhecimentos informais e formais sobre frações, além de considerar as experiências com números naturais.

Por fim, vale ressaltar que o aprendizado de frações demanda produção de significado, confronto de ideias, discussão e especialmente cautela na inserção de simbologia e algoritmos. Se, ao final, o estudante não tiver memorizado um algoritmo, mas tiver desenvolvido o senso fracionário, ele, certamente, saberá operar com frações, contudo a recíproca não é necessariamente verdadeira.

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nesta investigação da Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas no ensino de fração com estudante do 6° ano do Ensino Fundamental, a pesquisa foi classificada como qualitativa pela modalidade investigação-ação.

Segundo os autores Kauark, Manhães e Medeiros (2010) do ponto de vista da abordagem do problema, é necessário que haja uma relação entre o mundo real e o sujeito, não podendo ser traduzida a partir de números, sendo assim, a interpretação e o significado dos fenômenos são básicos para o processo de uma pesquisa qualitativa.

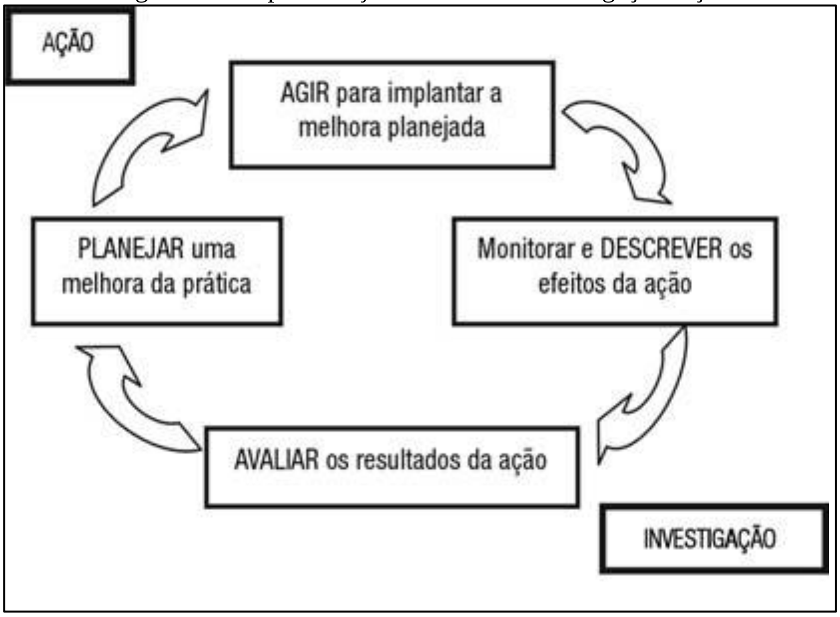
Neste contexto, Bogdan e Biklen (1994) relatam cinco características de uma investigação de natureza qualitativa: investigador sendo instrumento principal e o ambiente natural como fonte direta dos dados; descritiva, onde dados são em palavras ou imagens e não em números; o interesse principal é no processo que ocorre ao invés dos resultados ou produtos; a análise dos dados é de forma indutiva. Por fim, o significado é muito importante nessa abordagem, pois, todos os investigares que fazem o uso dela "estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido as suas vidas". (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 50)

Diante de tais considerações, o ambiente natural desta pesquisa é a sala de aula dos estudantes do 6° ano do Ensino Fundamental Anos Finais, do turno vespertino, de uma escola pública de Rio do Sul/SC. Nesta investigação, a pesquisadora também atuava como professora da turma, no qual assumiu um papel de professora/pesquisadora. Ao assumir uma perspectiva de pesquisadora, a professora teve oportunidade de melhorar a sua prática no contexto educacional que está inserida.

Com isso, esta abordagem caracteriza-se, enquanto modalidade de pesquisa, como uma investigação-ação. Tripp (2005) trata que a investigação-ação é um processo que se tem um ciclo, que busca aprimorar a prática a partir de sua investigação. Em uma realização de uma investigação-ação "planeja-se, implementa-se, descreve-se e avalia-se uma mudança para a melhora de sua prática, aprendendo mais, no correr do processo, tanto a respeito da prática quanto da própria investigação". (TRIPP, 2005, p. 446)

Para o desenvolvimento dessa investigação-ação Tripp (2005, p. 446) faz um ciclo básico com 4 etapas. O primeiro passo é a identificação do problema, em seguida uma solução que envolva coletivamente, monitora descrevendo o que acontece e avalia os resultados. A Figura 13 apresenta o Ciclo da Investigação-Ação.

Figura 13 - Representação do Ciclo da Investigação-Ação



Fonte: Tripp (2005, p. 446).

No contexto desta pesquisa, a primeira fase está intitulada “Planejar uma melhora da prática”, aconteceu na medida em que se verificou as dificuldades encontradas nos estudantes durante a aprendizagem sobre frações, em anos anteriores de docência e estruturou-se uma proposta a partir da perspectiva da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Para isso, desenvolveu-se um Produto Educacional direcionado tanto aos professores quanto aos estudantes, que pudesse ser utilizado para orientar o ensino de frações por meio da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Cabe ressaltar, que o Produto Educacional foi avaliado por professores de Matemática, o que contribuiu para a melhoria dos problemas.

A segunda fase, “Agir para implantar a melhora planejada” envolveu a utilização do Produto Educacional, composto por problemas desenvolvidos a partir do referencial teórico, sobre frações, com uma turma do 6° ano do Ensino Fundamental Anos Finais.

A terceira fase é “Monitorar e descrever os efeitos da ação”, foi executada com auxílio de instrumento de coletas e análise de dados a partir do desenvolvimento de duas atividades do Produto Educacional na turma citada. Por fim, a última fase é “Avaliar os resultados da ação”, na qual se verificou os objetivos pretendidos e implicações da metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na construção de conceitos sobre fração.

Nesta pesquisa, os procedimentos metodológicos utilizados para coletar os dados estão na modalidade de investigação-ação; a ação foi realizada de forma colaborativa com os estudantes do 6° ano do Ensino Fundamental nas dependências de uma escola pública de Rio do Sul/SC. O intuito foi investigar implicações do uso da metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas para a aprendizagem do ensino de fração, para tal buscou-se situações do mundo real, proporcionando aos estudantes uma aprendizagem com compreensão dos conceitos de número racionais.

5.1 CONTEXTO DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada em uma escola pública no município de Rio do Sul/SC. Os sujeitos da pesquisa foram estudantes de uma turma de 6° ano do Ensino Fundamental, a escolha dessa turma deu-se pelo fato de que o conteúdo de fração está contemplado na grade curricular.

As atividades foram aplicadas com 18 estudantes do 6º ano, todavia foram analisados os dados de 14 que assinaram o termo de consentimento à pesquisa.

Devido à pandemia causada pelo Covid-19, esses estudantes foram divididos em dois grupos, sendo que em uma semana metade dos estudantes tinham aulas presenciais na escola, e outra metade ficava em casa realizando atividades enviadas pela professora na semana anterior, e isso seguia intercalando os grupos semana a semana. Os protocolos de distanciamento social não permitiam que os estudantes tivessem compartilhamento de materiais ou que sentassem perto para discussão, então, para realizarem as atividades em duplas ou trios, eles viravam suas carteiras uns para os outros, mantendo distanciamento de 1,5 m entre eles, e também não produziam material em conjunto, cada um escrevia em seu caderno sem poder repassar ao colega.

Os dados foram coletados através do desenvolvimento de uma sequência didática, que continha problemas com o intuito de construir conhecimentos referente a frações. Os instrumentos que foram utilizados para a coleta de dados: registro das observações da pesquisadora durante o tempo da pesquisa – **diário de campo**; registro das resoluções realizadas pelos estudantes no Caderno do Estudante - **documento**; e, ainda, registro dos diálogos dos estudantes com a pesquisadora - **gravações**; permitiram analisar implicações do uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas para o ensino de fração.

5.2 PROCEDIMENTO DA ANÁLISE DOS DADOS

Busca-se neste item relatar como foram analisados os dados coletados desta pesquisa, para responder a seguinte pergunta: ‘**Quais implicações do uso da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas para a aprendizagem de frações por estudantes do Ensino Fundamental?**’

Na coleta de dados, utilizamos três ferramentas de registros: diário de campo, documentos e gravações. Para análise sistemática dos dados foram considerado os descritores indicados no Quadro 8.

Quadro 8 - Análise sistemática dos dados

Diário de Campo	A pesquisadora realizou a leitura do diário de campo, considerando observações mais importantes que deveriam ser destacadas. Essas observações são destacadas através de textos narrativos, comentários e explicações para possibilitar uma melhor compreensão deles.
Documentos	Está constituído pelas resoluções dos problemas que são propostos no Caderno do Estudante, os quais serão apresentados de forma descritiva, bem como a partir de imagens (fotos) dos próprios documentos.
Gravações	Por meio de diálogos dos estudantes entre si e com a pesquisadora (professora) , os quais serão analisadas pela pesquisadora; sendo que os diálogos considerados mais importantes para o contexto investigativo, serão apresentados na análise dos dados.

Fonte: Autoras (2021)

As categorias de análise foram apresentar apontamentos relacionados ao avanço, as dificuldades que os estudantes encontraram na realização das atividades na construção dos conceitos relacionados ao ensino de fração.

5.3 ESTRUTURA DAS ATIVIDADES DIDÁTICAS

Os problemas que compõem a sequência didática construída, foram desenvolvidos tendo como aporte teórico a Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, orientada pelos dez passos de Allevato e Onuchic (2014). Nesse aspecto cabe ressaltar que se entende que nas aulas de Matemática um problema é “[...] ponto de partida e orientação para a aprendizagem, e a construção do conhecimento far-se-á através de sua resolução. Professor e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo em sala de aula” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009, p. 7). E, assim, as atividades desenvolvidas deixam de ser um problema quando o professor as usa depois de explicar o conteúdo matemático.

A sequência didática desenvolvida contém 6 atividades que envolvem problemas relacionados com fração, especialmente no entendimento de fração como parte-todo e como quociente. O Quadro 9 descreve as seis atividades indicando os respectivos objetivos de aprendizagem.

Quadro 9 - Atividades indicando os respectivos objetivos de aprendizagem

Atividade	Quantidade de problemas	Objetivo de aprendizagem
Desenvolvendo o senso fracionário	9	- Compreender a ideia de partição. - Desenvolver estratégias de compartilhamento.
Tarefas de compartilhamento – representação	10	- Significar as frações por meio do uso de modelos de área, comprimento e conjunto. - Desenvolver a ideia de uma referência para o todo de uma fração. - Desenvolver a nomenclatura de fração utilizando a relação parte-todo.
Fração de uma quantidade	4	- Desenvolver a ideia de fração a partir de um conjunto como um todo de referência
Referentes fracionários	1	- Estimar frações com base em uma referência conhecida (um inteiro, metade, um quarto).
Frações equivalentes e comparação de frações	7	- Desenvolver o raciocínio de comparação de frações envolvendo (1) quantidades divididas, (2) componentes numéricos, (3) pontos de referência e (4) conversões numéricas. - Desenvolver compreensão da equivalência de frações, estabelecendo métodos para gerar e reconhecer frações equivalentes.
Adição e subtração de frações	12	- Relacionar as frações com o todo a partir da contagem de partes fracionárias. - Realizar estimativas de adição e subtração de frações. - Desenvolver o entendimento de procedimentos para a adição e subtração de frações com denominadores diferentes, utilizando frações equivalentes e fazendo estimativas razoáveis para avaliar os resultados.

Fonte: Stein e Possamai (2021, p. 4-5)

É importante ressaltar que alguns problemas foram adaptados de alguns materiais que tratam do ensino fração, e outros, a maioria, foram desenvolvidos pelas autoras do Produto Educacional. Os problemas e a sequência construída foram norteados pelo referencial teórico que trata do ensino de frações, levando à progressão da aprendizagem com a ampliação do nível de complexidade.

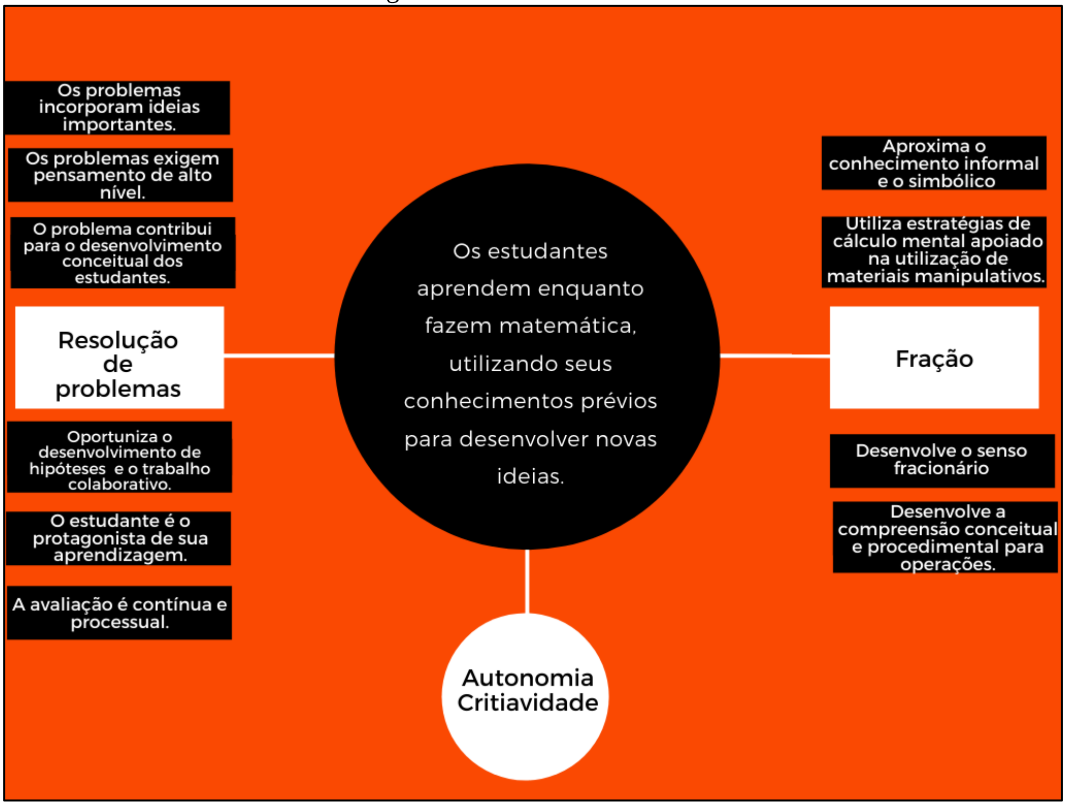
Esses problemas foram resolvidos pelos estudantes, sendo analisados nesta dissertação apenas os problemas das atividades “desenvolvendo o senso fracionário” e “tarefas de compartilhamento – representação”, uma vez que a situação de pandemia fez com que a aplicação pudesse acontecer apenas em março e abril de 2021, que já era um prazo de prorrogação dos 24 meses do mestrado, por isso decidiu-se limitar a análise, apesar da aplicação ter sido realizada na integra.

A análise efetivou-se, tomando como critérios os referentes para ação docente, organizados com base no referencial teórico adotado. Neste sentido, é importante enfatizar que esses referentes não indicam ao professor

> [...] uma ação padronizada ou mecânica, tampouco sugerem em qual abordagem teórica específica ele deve se pautar para a realização de seu trabalho, mas permitem identificar os tipos de conhecimento e as capacidades que delimitam e esclarecem o mérito e a especificidade de sua ação. (SILVA; ALMEIDA; GATTI, 2016, p. 3)

A Figura 14 apresenta os critérios de análise desta pesquisa que se constituem como referentes para ação docente.

Figura 14 - Critérios de Análise



Fonte: Autoras (2021)

De modo a sistematizar esses referentes, foram escolhidas duas dimensões que perpassam por todo o estudo: metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problema e o ensino e aprendizagem de frações. Foi através desses referentes que o Produto Educacional foi desenvolvido e aplicado em sala de aula, sendo analisado e modificado a partir da perspectiva de teoria com a prática. Assim, na Figura 14 tem-se aspectos particulares a serem considerados em cada uma das vertentes da pesquisa, representados em formatos retangulares, e, também, aspectos em comum indicados no círculo branco.

Após aplicação e análise das atividades, desenvolveu-se a forma final do Produto Educacional, com o intuito de ser um material para o professor, que contém além da descrição dos referentes que orientam para a prática docente relacionada com as frações por meio da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, também orientações didáticas com o intuito de possibilitar que esse o ressignifique em seus contextos.

No capítulo seguinte, são apresentados relatos e análises de duas atividades do Produto Educacional indicados no Quadro 9 ,que compõe essa sequência didática.

5.4 O PRODUTO EDUCACIONAL

A sequência didática construída foi incorporada em um Produto Educacional organizado em cinco sessões, iniciando com uma apresentação ao leitor, uma discussão em linguagem dialógica, relacionada com a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, uma sessão que discute aspectos importantes relacionados com o ensino de frações, uma sessão com o caderno de atividades e, por fim, as considerações ao leitor e as referências.

O caderno de atividades envolve um convite para uma viagem no mundo das frações, conforme mostra a Figura 15.

Figura 15 - Caderno de Atividades

Fonte: (STEIN; POSSAMAI, 2021, p. 24)

Esse caderno pode ser utilizado pelos estudantes, pois para cada problema há um espaço para resolução e lembretes, solicitando para que registrem como pensaram para obter a solução, bem como, ao final de cada atividade há considerações didáticas do professor, discutindo o que se espera e orientando para a etapa de formalização do conteúdo. Por fim, há um convite para que os estudantes contêm como foi a viagem, conforme mostra a Figura 16.

Figura 16 - Convite ao estudante

Fonte: (STEIN; POSSAMAI, 2021, p.88)

Vale ressaltar que este Produto Educacional foi avaliado por sete professores com formação em Matemática e experiência no ensino de frações em turmas do 6º ano dos Anos Finais do Ensino Fundamental, o que permitiu a reestruturação de alguns problemas, da mesma maneira que, após o desenvolvimento da pesquisa, outras alterações também fossem realizadas nos problemas para que as imagens produzidas não causassem entendimentos inadequados.

6 PROBLEMAS E ANÁLISE DA APLICAÇÃO

A primeira atividade desenvolvida com os estudantes é composta de 9 problemas, com o intuito de que compreendam a ideia de partição e que desenvolvam estratégias de compartilhamento, especialmente as que permitam utilizar a ideia de metade ou de metades repartidas, uma vez que, conforme indica Empson (2002, p. 31, tradução nossa):

> Problemas de compartilhamento de igualdade envolvendo dois, quatro e até oito compartilhadores são boas tarefas para começar a instrução de fração, porque os alunos poderão gerar estratégias para esses problemas usando seu conhecimento informal de metade repetida.

Inicialmente os grupos resolveram e discutiram o problema 1 como ilustra a Figura 17, e o problema 2 na Figura 19.

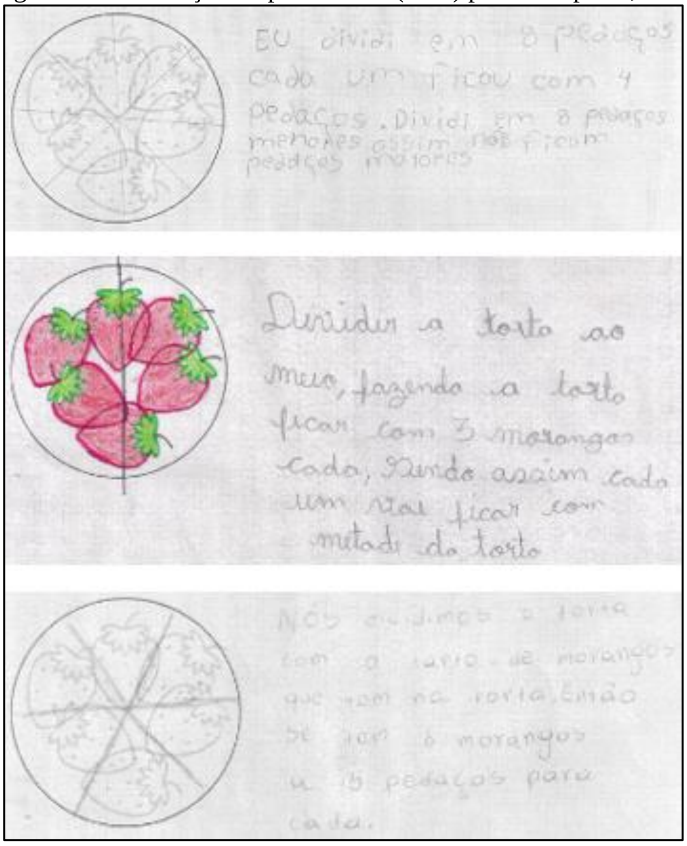
Figura 17 - Problema 1 (AT1)

Problema 1 - Bruna levou uma tortinha de morango para a escola. No recreio ela decidiu compartilhar a tortinha com seu amigo Lucas. Explique como você faria a partição e que parte cada um receberia da tortinha de morango.

Fonte: Stein; Possamai (2021, p. 27)

O primeiro problema envolve uma tortinha de morango partilhada entre dois amigos, sendo que na resolução emergiram diferentes preocupações, como a divisão dos morangos em partes iguais e tamanhos menores de pedaços. A Figura 18 apresenta as três diferentes soluções que foram apresentadas pelos grupos, sendo que os grupos 1 e 2 particionaram usando a ideia de metade, os grupos 4 e 8 particionaram em 6 partes, grupo 5 em 4 partes e o grupo 7 em 8 partes.

Figura 18 - Resolução do problema 1 (AT1) pelos Grupos 7, 2 e 8



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

No início da etapa da Resolução do Problema, devido ao distanciamento social, e ao fato de não poder haver compartilhamento de materiais, cada estudante recebeu a sua folha para registrar a resolução, o que fez com que acontecesse pouca discussão entre os membros de cada grupo, sendo necessária a intervenção da professora para incentivá-los para a troca de ideias.

Na etapa da plenária, os grupos justificaram as partições realizadas, e na etapa de busca de consenso, questionavam as diferenças com os outros grupos e, ao mesmo tempo, conseguiram concluir sobre os significados produzidos, como mostra a transcrição a seguir:

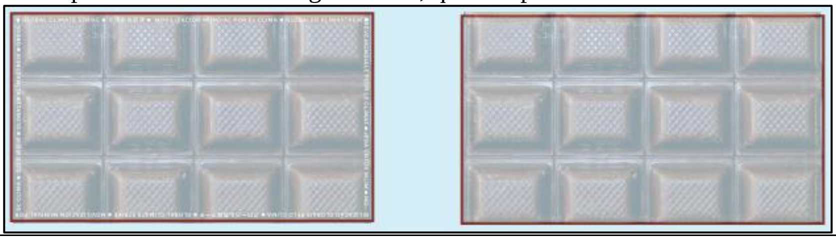
> Grupo 1: Mas, professora, a forma que ele fez está bem diferente da nossa, e como está certa?
>
> Professora: Por que você acha que não está correta a forma do grupo 4 pensar?
>
> Grupo 1: Porque não deu metade da torta para cada um... aaaaah, entendi... são jeitos diferentes, mas no final tudo igual.
>
> Professora: Vocês acham que a quantidade de morango em cada pedaço importa?
>
> Grupo 2: Eu acho que sim, professora, porque senão é injusto quem ficar com menos morango.
>
> Professora: Será que importa a quantidade de morango ou a forma de particionar os pedaços?
>
> Grupo 2: é... acho que importa particionar do mesmo tamanho.

Na etapa da Busca de Consenso, os grupos concluíram através da discussão que mesmo dividindo em partes diferentes o que mudava era o tamanho do pedaço, mas que a parte da torta que caberia a cada um seria a mesma, com cada um recebendo a metade.

O segundo problema envolveu compartilhar duas barras de chocolate entre 4 amigos, como ilustra a Figura 19:

Figura 19 - Problema 2 (AT1)

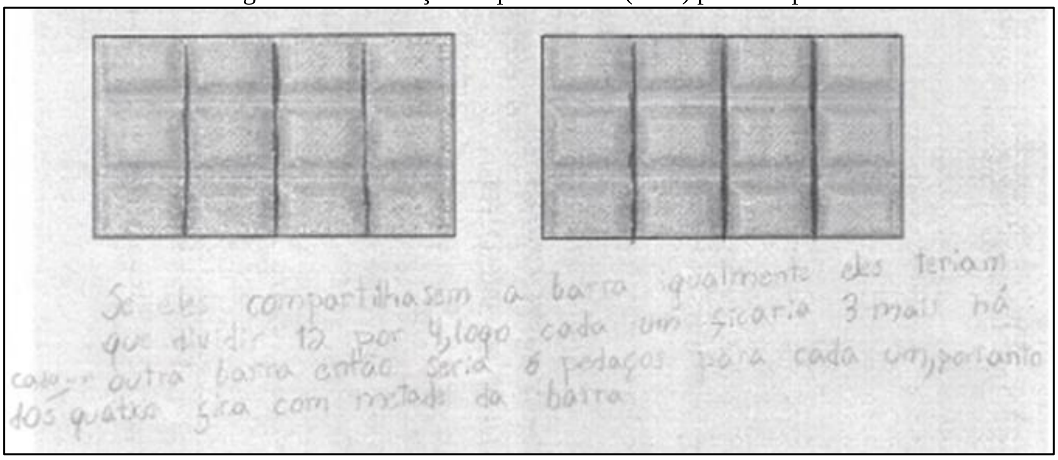
Problema 2 - Quatro amigos participaram de uma gincana e ao completar uma prova receberam 2 barras de chocolate. Se eles compartilharam as barras igualmente, quantas partes do todo cada um recebeu?



Fonte: Stein; Possamai (2021, p. 28)

Como resultado, 5 grupos dividiram a barras ao meio enquanto o grupo 4 particionou cada barra de chocolate em 4 partes, sendo assim iria ficar com uma parte de quatro de cada barra, conforme mostra a Figura 20.

Figura 20 - Resolução do problema 2 (AT1) pelo Grupo 4



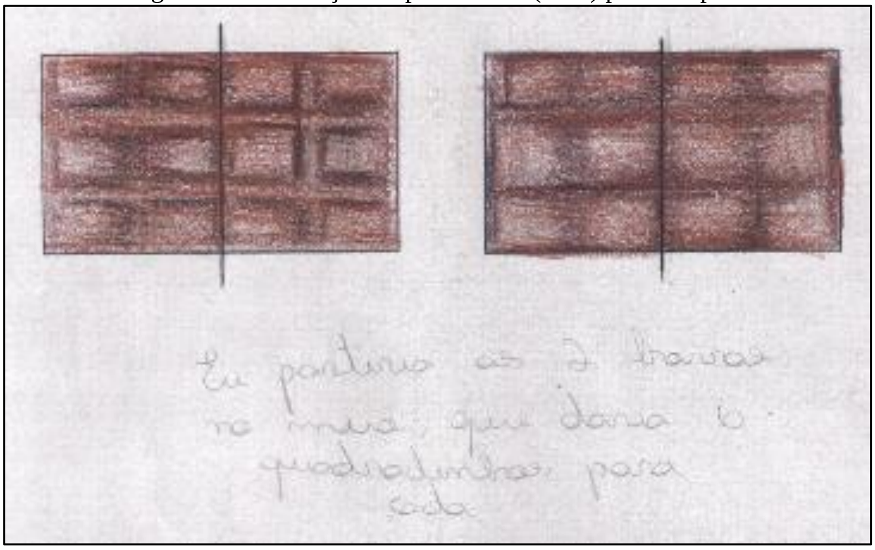
Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

Na etapa da plenária, o Grupo 4 apresentou o raciocínio utilizado, justificando sua resposta.

> Grupo 4: Se eles compartilhassem a barra igualmente, eles teriam que dividir 12 por 4, logo, cada um ficaria com 3 quadradinhos pequenos de cada barra.
>
> Professora: Por que fazer a partição em 4 partes em cada barra?
>
> Grupo 4: É mesma coisa que o outro grupo, cada um ficará com metade da barra.

Enquanto os demais grupos utilizam estratégias iniciais, como mostra a Figura 21, o grupo 4 já apresenta estratégias intermediárias de pensamento fracionário, coordenando compartilhadores em cada unidade.

Figura 21 - Resolução do problema 2 (AT1) pelo Grupo 1

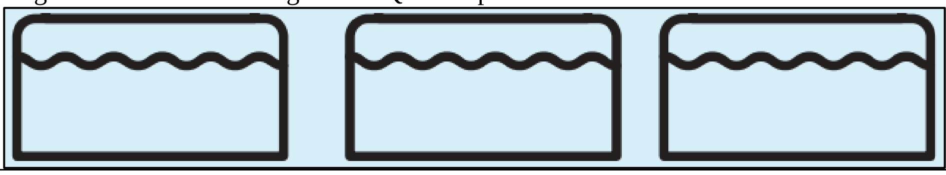


Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

Em seguida, os estudantes resolveram o terceiro e o quarto problema. O terceiro problema trata de três pedaços de bolo para serem particionados igualmente entre dois amigos, como ilustra a Figura 22:

Figura 22 - Problema 3 (AT1)

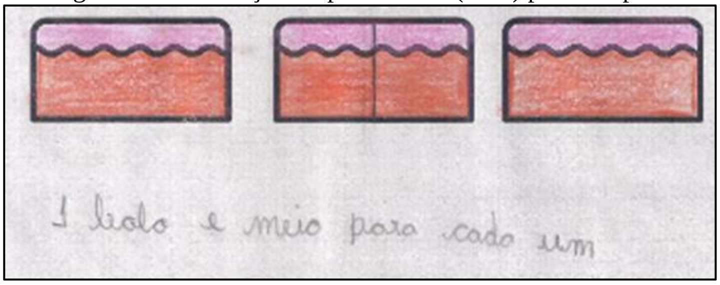
Problema 3 - Ana Vitória levou para a escola 3 pedaços de bolo de chocolate (de mesmo tamanho) e decidiu compartilhar igualmente com seu amigo Caio. Quantas partes do todo cada um recebeu?



Fonte: Stein; Possamai (2021, p. 29)

Os grupos 2, 4, 5 e 7 concluíram que cada amigo ficaria com um bolo e meio, utilizando as estratégias iniciais. Como mostra na Figura 23:

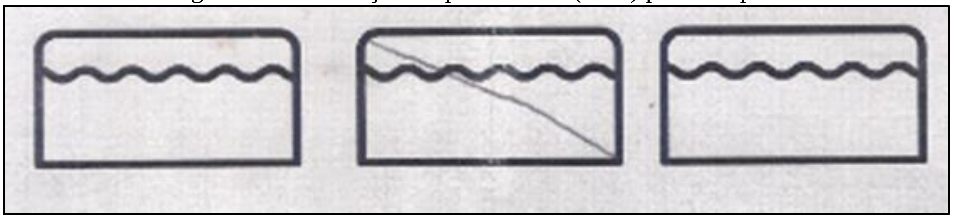
Figura 23 - Resolução do problema 3 (AT1) pelo Grupo 2



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

O grupo 7 fez a partição da metade na diagonal, como mostra na Figura 24:

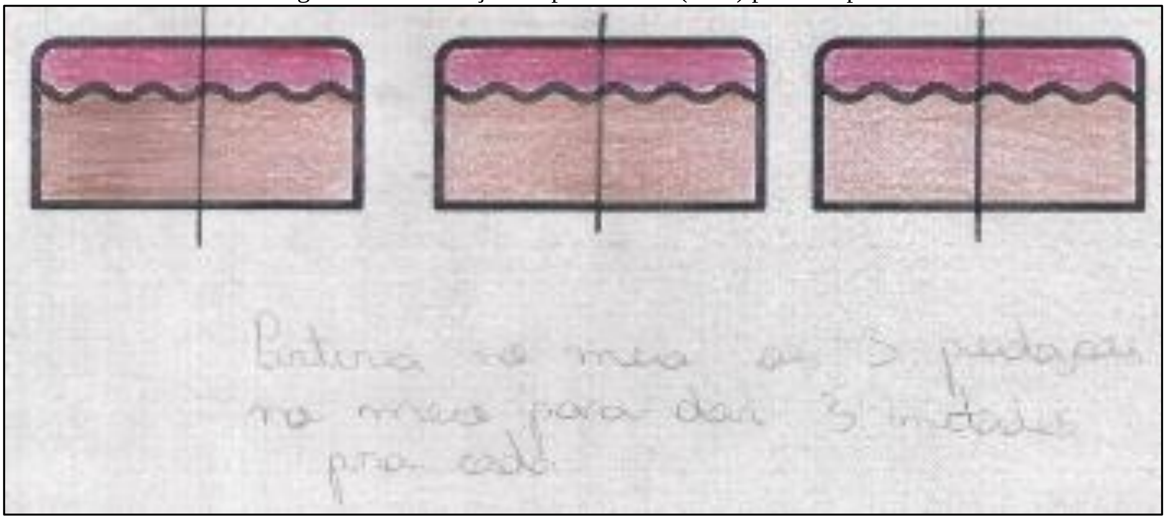
Figura 24 - Resolução do problema 3 (AT1) pelo Grupo 7



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

Os grupos 1 e 8 particionaram cada pedaço de bolo ao meio, utilizando a ideia de distribuir metades, considerada uma estratégia intermediária do raciocínio fracionário, como ilustra a Figura 25.

Figura 25 - Resolução do problema 3 (AT1) pelo Grupo 1



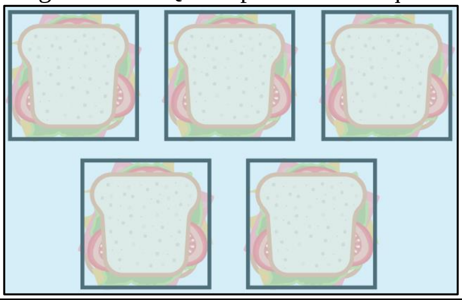
Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

Na etapa da Busca de Consenso, esse problema não gerou muita discussão, nem nos pequenos grupos nem na socialização, mesmo assim, essa é uma etapa fundamental para que os estudantes percebam diferentes formas de raciocínio e de representação, ajudando a “[...] a ativar essas ideias ou os ‘pontos’ que eles simplesmente não tinham considerado” (VAN DE WALLE, 2009, p. 60).

No quarto problema são cinco sanduíches para serem particionados em quatro amigos, como ilustra a Figura 26.

Figura 26 - Problema 4 (AT1)

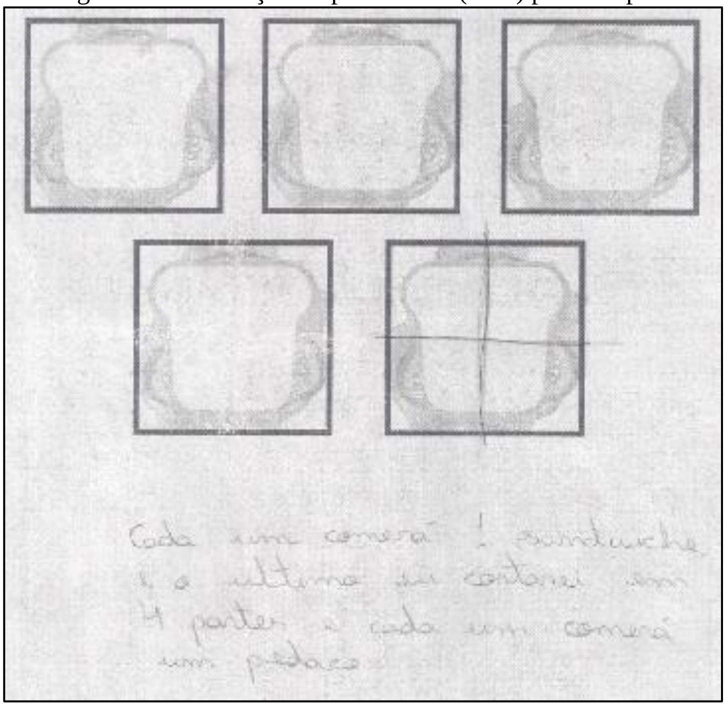
Problema 4 - Alguns amigos organizaram um piquenique. Alice levou 5 sanduíches feitos com pão de forma para compartilhar com os amigos. Como um dos amigos faltou, Alice e os 3 amigos que foram ao piquenique decidiram particionar os sanduíches igualmente. Qual a parte do todo que cada um recebeu?



Fonte: Stein; Possamai (2021, p. 30)

Os grupos 1, 2, 4, 5 e 7 concluíram que cada amigo receberá um sanduíche inteiro mais uma parte de quatro de um sanduíche para cada um, como mostra a Figura 27.

Figura 27 - Resolução do problema 4 (AT1) pelo Grupo 1

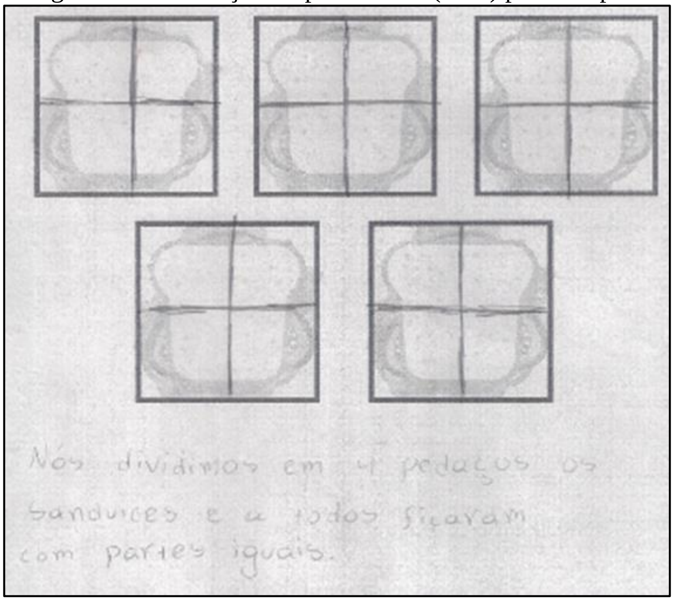


Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

A estratégia indicada na Figura 27, caracteriza-se como estratégia inicial do raciocínio fracionário, uma vez que os estudantes ainda não avançam em utilizar compartilhadores em todas as unidades.

O grupo 8 pegou cada sanduíche e dividiu em 4 partes iguais, também com evidências intermediárias, como mostra na Figura 28:

Figura 28 - Resolução do problema 4 (AT1) pelo Grupo 8



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

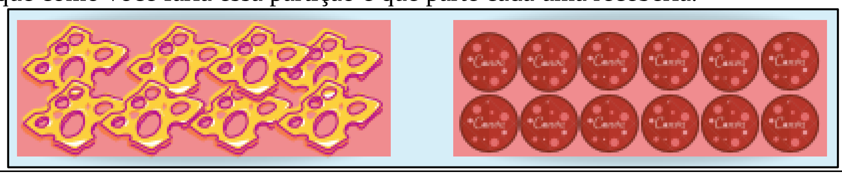
Na etapa da Plenária, quando o grupo 8 apresentou todos concordaram com a ideia do grupo.

No problema 5, havia duas situações, na primeira eram duas pizzas retangulares, uma de queijo e uma de calabresa, para serem compartilhadas entre três amigos, sendo que todos gostam dos dois sabores de pizza, como ilustra a Figura 29. Cabe ressaltar que mudamos as figuras do Produto Educacional, para que os estudantes não perdessem o foco com os recheios, na Figura 29, já se tem a versão corrigida.

Figura 29 - Problema 5: situação 1 (AT1)

Problema 5 - Thalia, Yasmim e Stefani se juntaram para a noite do pijama. A mãe de Thalia fez duas pizzas caseiras em formas retangulares, uma de queijo e a outra de calabresa para as meninas jantarem. Como ficaria cada uma das situações:

a) **Situação 1**: as três amigas gostam dos dois sabores de pizza e decidiram particioná-las igualmente. Explique como você faria essa partição e que parte cada uma receberia.

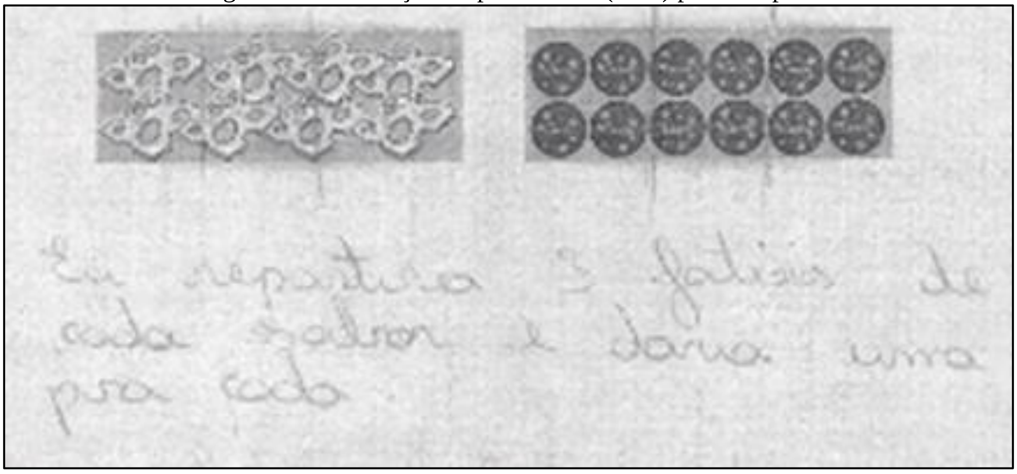


Fonte: Stein; Possamai (2021, p. 31)

Os grupos, no primeiro momento, tiveram dificuldades em particionar em 3 a pizza de queijo pela quantidade de queijos representados na figura. A professora fez perguntas e realizou discussões nos pequenos grupos sobre a importância do tamanho da pizza ou a quantidade de recheio que tinha sobre a pizza. Os estudantes afirmavam que era o tamanho da pizza.

Nessa situação, os grupos 1, 2, 5 e 7 particionaram as pizzas em 3 cada uma e concluíram que cada um ficará com um pedaço de cada pizza, como mostra a Figura 30:

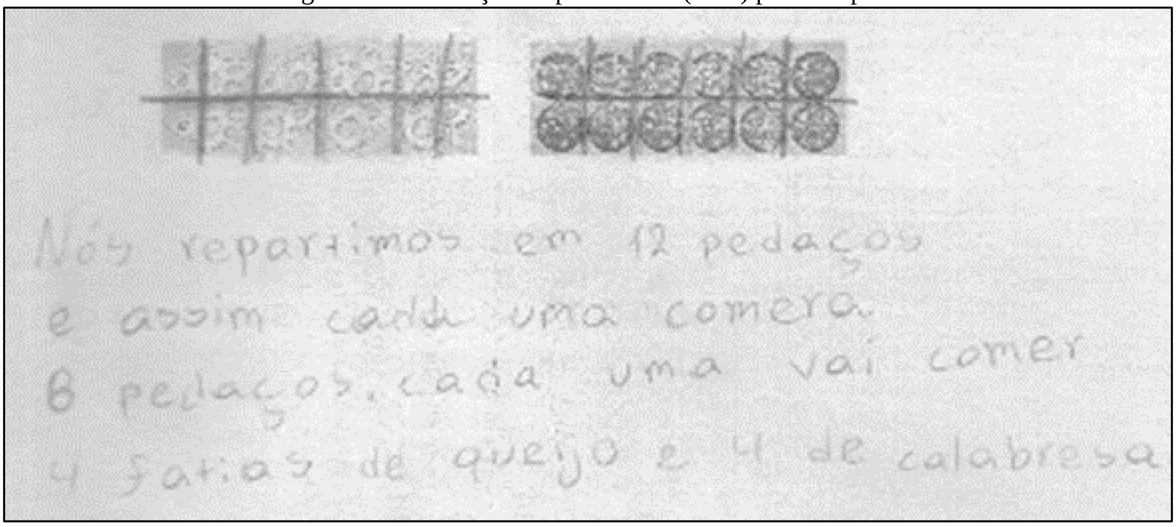
Figura 30 - Resolução do problema 5 (AT1) pelo Grupo 1



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

O grupo 8 particionou cada pizza em 12 pedaços menores, concluindo que cada um comerá 4 pedaços de cada pizza, como mostra a Figura 31:

Figura 31 - Resolução do problema 5 (AT1) pelo Grupo 8



Fonte: Acervo de Pesquisa

Na socialização do resultado da Figura 31, pelo grupo 8, houve questionamentos, conforme transcrição:

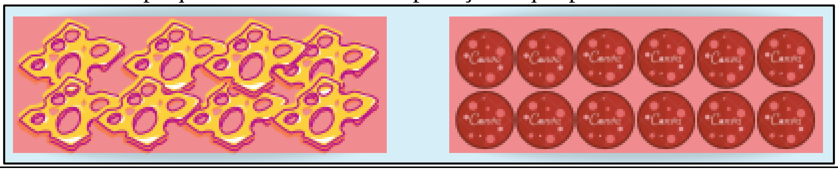
> O grupo 7: Professora, esse grupo particionou em 12 fatias e nós em 3, só que nós fizemos pedaços maiores e eles menores.
>
> Professora: Vocês acham que dá a mesma quantidade?
>
> Grupo 7: Sim, porque são menores, mas mesma quantidade.

Os grupos concluíram, pela discussão, que, mesmo dividindo em partes diferentes, o que mudava era o tamanho do pedaço. Essas ideias iniciais abrangem relações que formam a base necessária para uma compreensão mais sofisticada de fração e de frações equivalentes (EMPSON, 2002; MACK, 1995).

Na situação 2, havia duas pizzas retangulares, uma de queijo e uma de calabresa, para serem compartilhadas em três, sendo que Thalia gostava apenas de queijo, Yasmim apenas de calabresa, e Stefani dos dois sabores, como ilustra a Figura 32.

Figura 32 - Problema 5: situação 2 (AT1)

b) **Situação 2**: Thalia gosta apenas do sabor queijo, Yasmim apenas do sabor calabresa, e Stefani gosta dos dois sabores. Explique como você faria a partição e que parte cada uma receberia



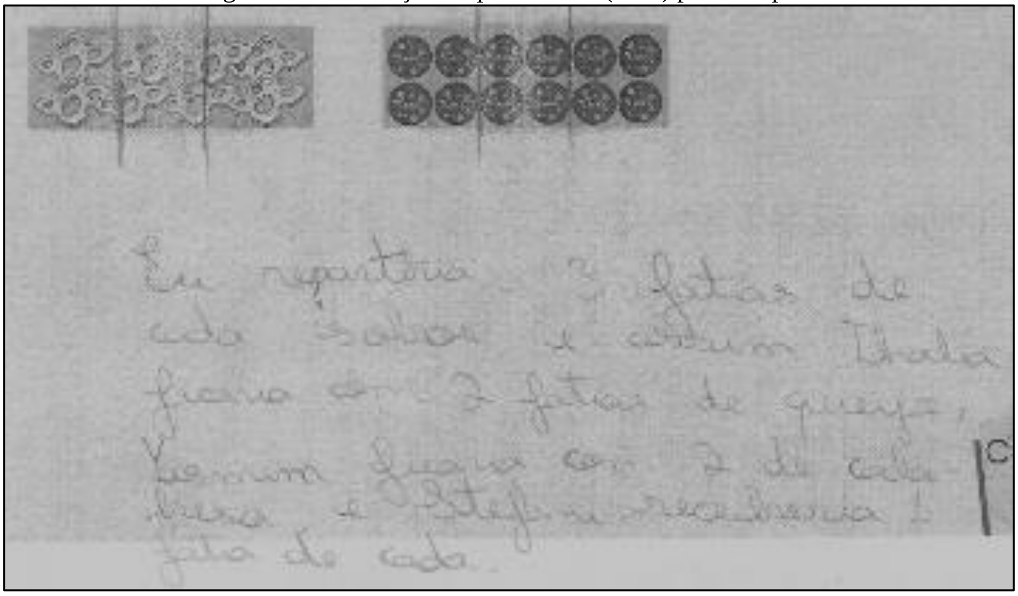
Fonte: Stein; Possamai (2021, p. 31)

Nessa situação, os estudantes, no primeiro momento, queriam dividir cada pizza ao meio, porém a professora ficou questionando-os e fazendo-os pensar sobre.

> Professora: "se você dividir ao meio, cada um ficará com a mesma quantidade?" os estudantes no mesmo momento refletiam e afirmavam que não.

Todos os grupos particionaram as pizzas em três partes, concluindo que: Thalia ficaria com 2 pedaços de queijo, Yasmin, com 2 pedaços de calabresa e a Stefani 1 pedaço de cada sabor, como mostra a Figura 33:

Figura 33 - Resolução do problema 5 (AT1) pelo Grupo 1



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

No momento da discussão, na etapa da Busca de Consenso, quando o grupo 2 apresentou.

> Grupo 2: Thalia recebeu 2 pedaços de pizza de queijo, Yasmin 2 pedaços de calabresa e Stefania 1 pedaço de queijo e 1 de calabresa.
>
> Professora: Explique de que forma você fez a partição.
>
> Grupo 2: Pegamos cada pizza e dividimos em 3 partes.
>
> Professora: Por que você acha que assim é a forma correta?
>
> Grupo 2: Não sei.... é que se eu dividisse ao meio, a Stefani ficaria com duas metades. Por isso não dá ao meio e dividi em 3 partes.

Nesse momento a professora questiona-os mesmo quando estão corretos, para que possam justificar e argumentar suas respostas. Nesse aspecto, Van de Walle (2009, p. 37) enfatiza:

> Exija explicações para acompanhar todas as respostas. Assim, o pedido para uma explicação não sinalizará que uma resposta esteja incorreta, como as crianças inicialmente acreditarão. As respostas corretas podem não representar o pensamento conceitual que você assumiu. As respostas incorretas podem ser apenas o resultado de um erro facilmente corrigível. Exigindo explicações, os alunos aprendem que o raciocínio em matemática é importante e útil.

No sexto problema, eram seis crianças para particionar sete pacotes de bolachas igualmente entre eles, como ilustra a Figura 34.

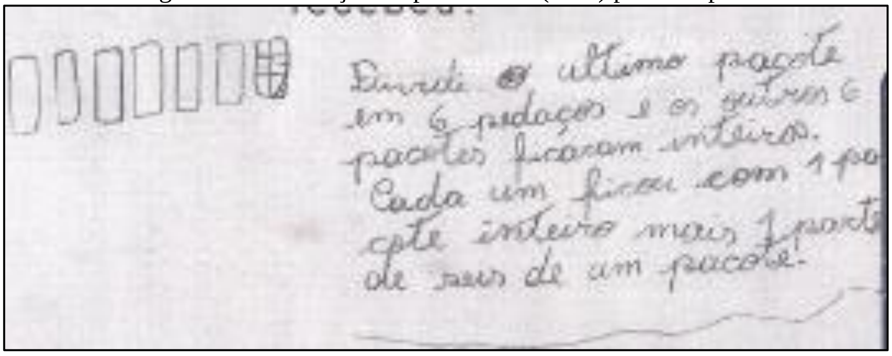
Figura 34 - Problema 6 (AT1)

Problema 6 - Seis crianças combinaram de levar pacotes de bolacha para compartilhar na hora do recreio. No dia combinado cada um levou seu pacote de bolacha favorito, com exceção de Jeison que levou dois pacotes. Conforme o combinado, eles decidiram compartilhar igualmente as bolachas. Qual a parte em relação ao todo que cada um recebeu?

Fonte: Stein; Possamai (2021, p. 32)

Todos os grupos concluíram, na etapa de Busca de Consenso, que cada criança ficará com um pacote de bolacha inteira e o sétimo pacote iriam particionar entre as crianças da mesma forma, como ilustra a [Figura 35](#).

Figura 35 - Resolução do problema 6 (AT1) pelo Grupo 7



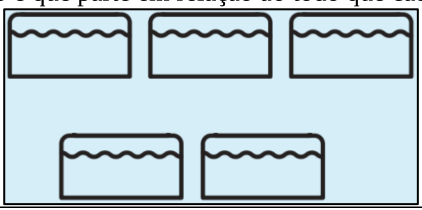
Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

No momento da socialização, como todos os grupos chegaram à mesma conclusão, houve pouca discussão. Essa estratégia utilizada também é intermediária, uma vez que utiliza como princípio o número de compartilhadores.

No problema 7, eram cinco pedaços de bolo do mesmo tamanho para serem compartilhados igualmente entre três amigos, como mostra a [Figura 36](#).

Figura 36 - Problema 7 (AT1)

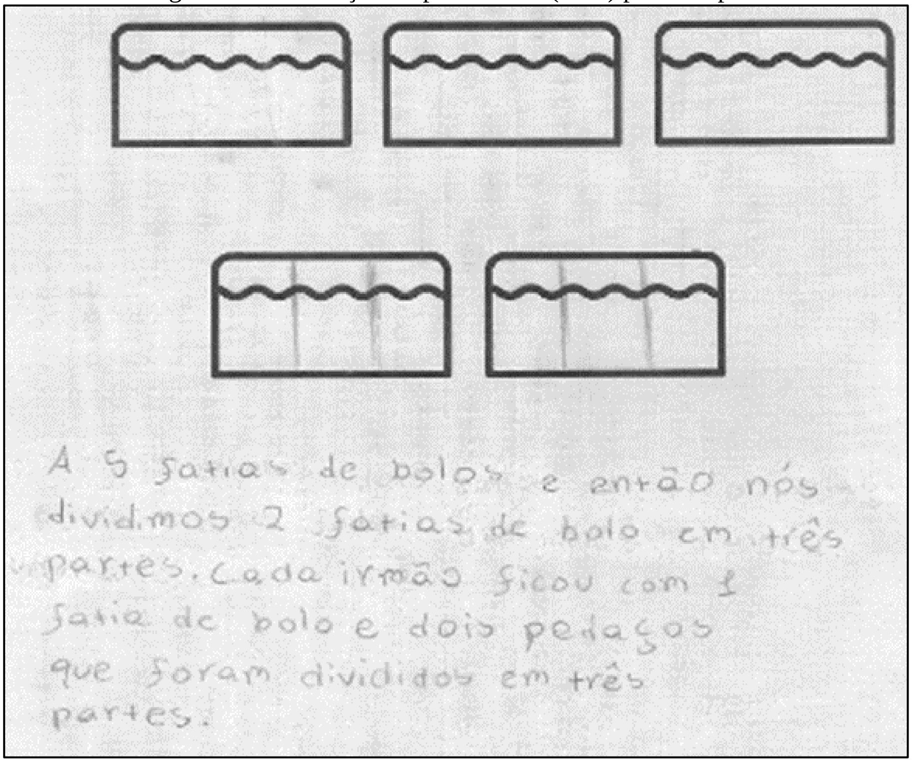
Problema 7 - Sobraram 5 pedaços de bolo de chocolate, de igual tamanho para o café da manhã. Os irmãos Brayan, Eduarda e Elias decidiram particionar esses pedaços de modo que cada um recebesse igual parte. Explique como você faria a partição e que parte em relação ao todo que cada um receberia.



Fonte: Stein; Possamai (2021, p. 33)

Os grupos particionaram de forma que cada um ficará com um pedaço inteiro de bolo e os dois pedaços de bolo particionaram em 3 partes iguais cada pedaço, como mostra a [Figura 37](#):

Figura 37 - Resolução do problema 7 (AT1) pelo Grupo 8



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

No momento da socialização:

> Grupo 1: São três irmãos e 5 fatias de bolo, cada irmão ficará com 1 pedaço inteiro mais 2 partes de 6.
>
> Professora: Por que 2 partes de 6?
>
> Grupo 1: Porque são dois pedaços de bolo dividido em três partes cada, 2 pedaços que cada um comeu dividido em 6 no total.
>
> Grupo 2: Mas, cada um ficou com uma parte de cada pedaço que foi dividida em três, então são duas partes de 3.
>
> Grupo 1: Não, mas 3 + 3 de cada pedaço é igual a 6 e foram comidos 2 partes de 6.
>
> Grupo 2: Mas olhando para cada fatia separadamente e juntando os dois dá 2 pedaços de 3.
>
> Grupo 1: Aaaaaah, pensando assim, daí sim!

No momento da discussão, percebe-se que os próprios estudantes começaram a debater e justificar suas próprias respostas e concluir sem precisar muito da intervenção da professora. Stewart (2005, p. 32, tradução nossa) enfatiza que “[...] o conceito de fração se distingue da simples ação de dividir um todo em partes iguais, mas baseia-se na compreensão da relação entre a parte e o todo” e essa relação aparece na discussão dos estudantes, que os fez refletir sobre o entendimento de fração na relação parte-todo, em detrimento do entendimento de razão – quantos pedaços são tomados em relação ao total de pedaços obtidos.

No problema 8, têm quatro fitas para enfeitar igualmente seis cestas, como ilustra a Figura 38.

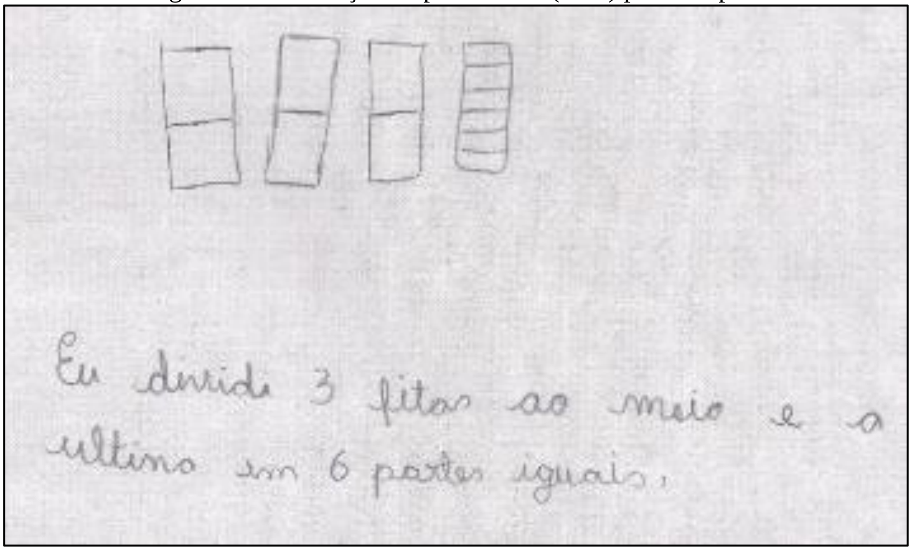
Figura 38 - Problema 8 (AT1)

Problema 8 - Para enfeitar a cesta de páscoa, Ester tem 4 fitas amarelas, todas de igual comprimento. Ela decidiu cortá-las para enfeitar 6 cestas de páscoa de modo que cada uma utilizasse a mesma quantidade de fita que as demais. Utilizando toda a fita disponível, explique como você faria os cortes e que parte de fita cada cesta utilizaria

Fonte: Stein; Possamai (2021, p. 34)

Os grupos 2, 3, 4, 5, 7 e 8 particionaram 3 fitas ao meio e 1 fita em 6 partes iguais, como mostra na Figura 39:

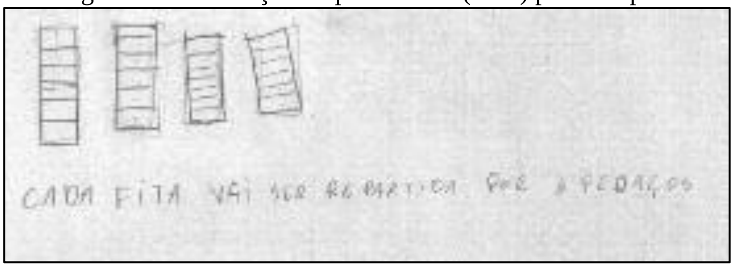
Figura 39 - Resolução do problema 8 (AT1) pelo Grupo 2



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

O grupo 1 particionou cada fita em 6 partes iguais, como mostra a Figura 40:

Figura 40 - Resolução do problema 8 (AT1) pelo Grupo 1



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

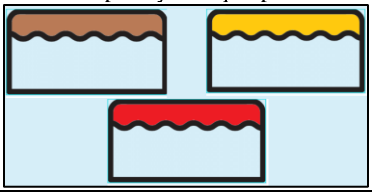
Quando o grupo 1 apresentou a sua solução, todos concordaram e não houve muitas discussões nesse problema. Todos os estudantes utilizaram estratégias intermediárias, porém os grupos que utilizaram a solução da Figura 40 continuaram a distribuir metades, enquanto o Grupo 1 coordenava os compartilhadores em cada unidade.

No nono problema, havia duas situações, sendo que na primeira havia três tortas, todas com o mesmo tamanho, uma de chocolate, outra de morango e a terceira de banana. Elas deviam ser compartilhadas entre 12 crianças, como ilustra a Figura 41.

Figura 41 - Problema 9: situação 1 (AT1)

Problema 9 - Para um piquenique em que participaram 12 crianças, Dona Maria resolveu fazer três tortas. Pense e resolva as seguintes situações:

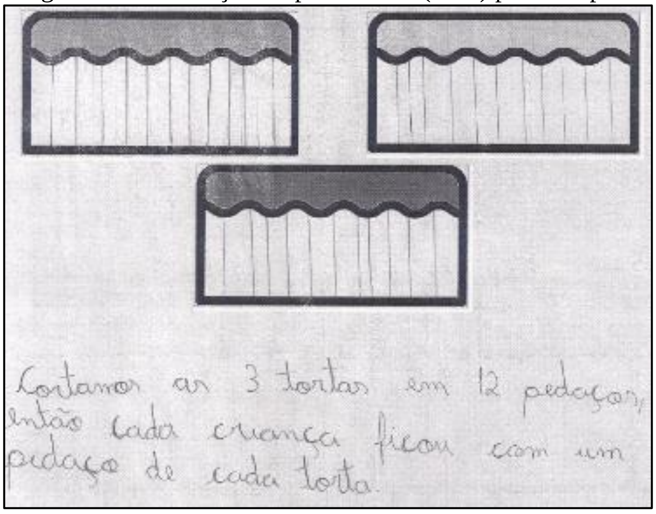
a) Uma torta era de chocolate, a outra era de morango e a terceira era de banana. Todas tinham igual tamanho e todas as crianças gostavam desses sabores. Elas decidiram particionar as tortas igualmente entre elas. Explique como você faria a partição e que parte cada uma receberia.



Fonte: Stein; Possamai (2021, p. 35)

Todos os grupos particionaram cada torta em 12, concluindo que cada um receberia um pedaço pequeno de cada torta, como ilustra a Figura 42.

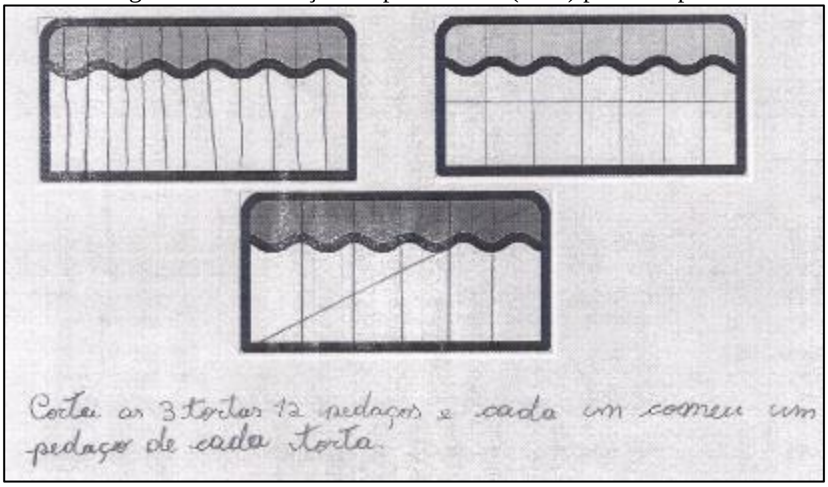
Figura 42 - Resolução do problema 9 (AT1) pelo Grupo 8



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

O Grupo 7 fez a partição da torta em diferentes formas, como mostra a Figura 43:

Figura 43 - Resolução do problema 9 (AT1) pelo Grupo 7



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

No momento da socialização foi notável que os outros grupos não tinham essas percepções em diferentes formas. Os outros grupos até argumentaram que ao cortar uma torta não se corta, dessa forma, na diagonal, como ilustra a discussão:

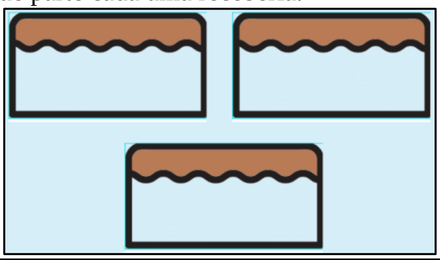
> Grupo 5: Mas, professora, se cortar na diagonal não será pedaços do mesmo tamanho.
>
> Grupo 7: Mas está repartido em 12 partes.
>
> Grupo 5: Não do mesmo tamanho.
>
> Grupo 7: aaah, verdade.

O erro foi analisado com naturalidade durante a plenária e os estudantes conseguiram avaliar a necessidade de que a partição pode acontecer utilizando representações distintas, mas deve preservar as partes com mesmo tamanho.

Na situação 2, eram três tortas de chocolate do mesmo tamanho para serem compartilhadas entre 12 crianças, como ilustra a Figura 44.

Figura 44 - Problema 9: situação 2 (AT1)

b) As três tortas são de chocolate e eles decidiram fazer a partição de modo que os pedaços tivessem o maior tamanho possível, mas que ainda assim cada um recebesse igual parte dos demais. Explique como você faria a partição e que parte cada uma receberia.

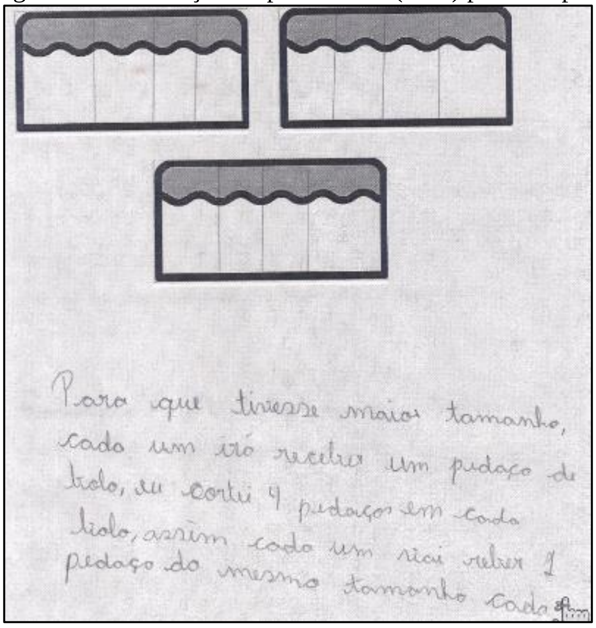


Fonte: Stein; Possamai (2021, p. 36)

Essa diferença entre as duas situações visava estimular os estudantes a utilizarem estratégias posteriores, de modo que a primeira situação demandava que se pensasse em compartilhadores para cada unidade e a segunda abrisse para mais possibilidades.

Todos os grupos associaram que tinham que ser pedaços com o maior tamanho possível, então, como eram 12 crianças e 3 tortas, pegaram 12 dividido por 3 que é igual a 4, portanto particionaram cada torta em 4 pedaços. Concluindo que cada um receberia um pedaço do mesmo tamanho. Todos os grupos associaram a divisão, como ilustra a Figura 45.

Figura 45 - Resolução do problema 9 (AT1) pelo Grupo 2



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

Como mostra a Figura 45, os estudantes criaram o mesmo número de partes que os compartilhadores, caracterizando-se como estratégias posteriores. Esse avanço no senso fracionário é estimulado, também, pelo fato de os problemas envolverem contextos de partição do mundo real, uma vez que "fornecer um contexto do mundo real incentiva as crianças a usarem suas estratégias intuitivas de resolução de problemas, em vez de depender de procedimentos (FAZIO, SIEGLER, 2011, p. 18, tradução nossa)".

A etapa de formalização, passo 9 da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, foi utilizada após a resolução e socialização dos 9 problemas, sendo enfatizada as diferentes estratégias utilizadas pelos estudantes das tarefas de compartilhamento.

Como resultado dessa primeira atividade, os estudantes compreenderam a ideia de particionamento, trazendo seu conhecimento informal para refletirem sobre o conceito de parte-todo, relacionado ao entendimento de frações. Não houve nenhum indicativo ou menção pelos estudantes da nomenclatura de fração para representar os resultados obtidos, bem como a professora não inseriu conexões que relacionassem com representações simbólicas ou mesmo com nomes apresentados verbalmente ($\frac{1}{3}$ ou um terço). Porém, cabe salientar que essa primeira etapa é importante uma vez que:

> Permitir que as crianças escolham suas próprias ferramentas e façam suas próprias representações para resolver problemas de compartilhamento igualitário, no entanto, pode promover uma interessante diversidade de pensamento, o que pode contribuir para uma compreensão mais rica da matemática das frações. (EMPSON, 2002, p. 35, tradução nossa)

Assim, o propósito de cada problema era incentivar os estudantes a desenvolverem um conhecimento informal sobre frações e avançar nos níveis de estratégias de particionamento usados. No Quadro 10 , são apresentadas as estratégias na resolução dos problemas pelos grupos que fazem parte desta análise (G1, G2, G4, G5, G7, G8). Cabe ressaltar que os G3 e G6 eram formados por estudantes que não assinaram o termo de consentimento.

Quadro 10 - Estratégias na Resolução dos Problemas

PROBLEMAS	Estratégias Iniciais	Estratégias Intermediárias	Estratégia Posterior
1	Todos os grupos		
2	G1, G2, G5, G7, G8	G4	
3	G2, G4, G5, G7	G1, G8	
4	G1, G2, G4, G5, G7	G8	
5		Todos os grupos	
6		Todos os grupos	
7		Todos os grupos	
8		Todos os grupos	
9 (a)		Todos os grupos	
9 (b)			Todos os grupos

Fonte: Autoras (2021)

Pode-se verificar no Quadro 10 que os estudantes foram avançando nas estratégias utilizadas, além disso, analisando a natureza dos problemas e a solução apresentada pelos grupos evidencia-se que eles se envolveram em um contexto de “compartilhamento justo”, realizado com base em suas experiências cotidianas. Assim, nessa primeira atividade, os estudantes puderam avançar no desenvolvimento do senso fracionário, compreendendo a ideia de fração como parte-todo. As discussões promoveram o entendimento informal de frações equivalentes, quando os estudantes confrontavam as respostas diferentes dos grupos.

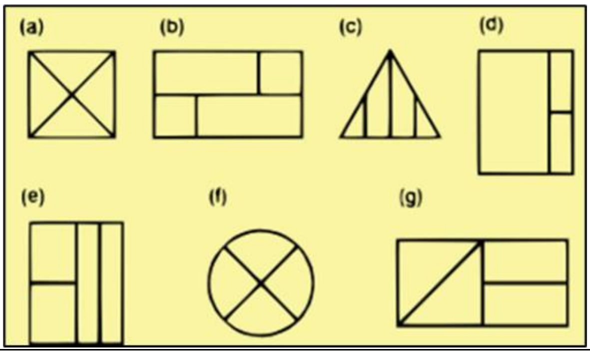
Na sequência, os estudantes foram apresentados aos problemas da atividade denominada Tarefas de Compartilhamento, os quais envolvem a ideia de fração em diversas situações que envolvem compartilhamento.

Essa segunda atividade é composta de 10 problemas, tendo como objetivo desenvolver a nomenclatura de fração, utilizando a relação parte-todo, bem como significar as frações por meio do uso de modelos de área, comprimento e conjunto e desenvolver a ideia de uma referência para o todo de uma fração. Enquanto na primeira atividade, todos os problemas envolviam situações do mundo real, nessa segunda há diversas questões, cujo contexto é a própria Matemática.

O problema 1 tem 5 desenhos e era para os estudantes justificarem os que estavam particionados em quartos e o que não estavam explicando o motivo, como ilustra a Figura 46.

Figura 46 - Problema 1 (AT2)

Problema 1 - Identifique quais dos desenhos estão particionados em quartos. E os que não estão, explique o motivo.



Fonte: (STEIN; POSSAMAI, 2021, p. 41)

Antes de iniciar a resolução, a professora questionou: O que é particionado?

> Grupo 8: Dividido
>
> Professora: Dividido em quê?
>
> Grupo 8: Dividido em partes iguais.
>
> Professora: Tá, e particionado em quartos?
>
> Grupo 5: Dividido em quatro partes iguais.

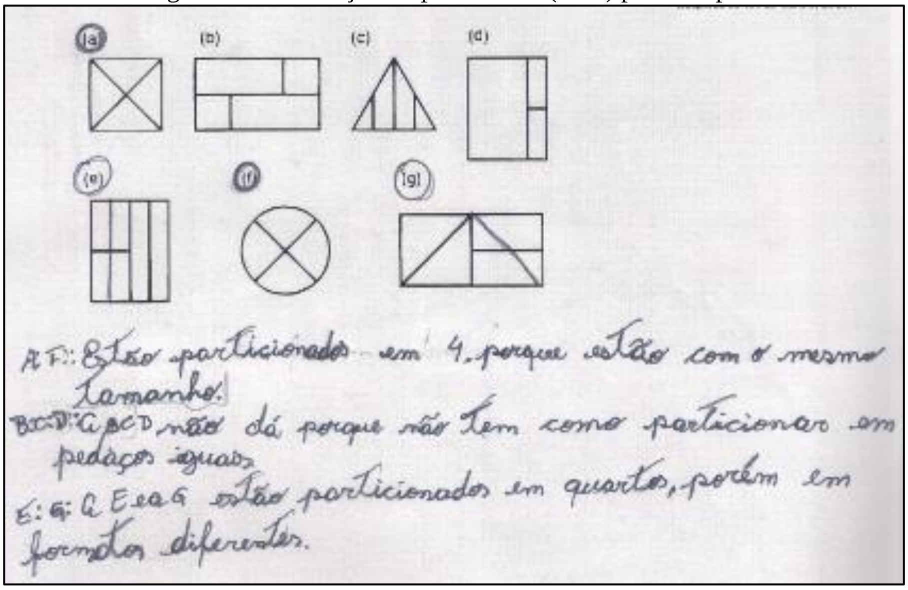
Esse questionamento visava avaliar o entendimento dos problemas da primeira atividade, uma vez que, devido à pandemia, os estudantes frequentavam a escola de forma escalonada, ou seja, iam uma semana para escola e na seguinte ficavam em casa. Mesmo com esse afastamento da escola, verificou-se que os estudantes haviam produzido significado e compreensão para o que foi construído na primeira atividade.

Na etapa de Resolução do Problema pelos estudantes e, concomitantemente, na etapa de Observar e Incentivar pela professora, houve bastante discussão nos pequenos grupos sobre a letra **e** e **g**, por não possuírem o mesmo formato. A professora, em todos os pequenos grupos, questionou ‘por que a letra e não está particionado em quartos?’ e os grupos intuitivamente respondiam justificando que não tinha o mesmo formato.

Então a professora questionava: ‘você acha que se não tiver o mesmo formato, terá tamanhos diferentes? Se vamos comprar refrigerante nos supermercados, todos que têm 2 litros, tem o mesmo formato?” Automaticamente, conseguiam perceber, e a professora deixava-os discutir nos pequenos grupos.

Na etapa Plenária, houve pouca discussão no grande grupo, pois todos os grupos já haviam percebido essa ideia de partição em quatro, apesar de não terem o mesmo formato, como ilustra a Figura 47.

Figura 47 - Resolução do problema 1 (AT2) pelo Grupo 7



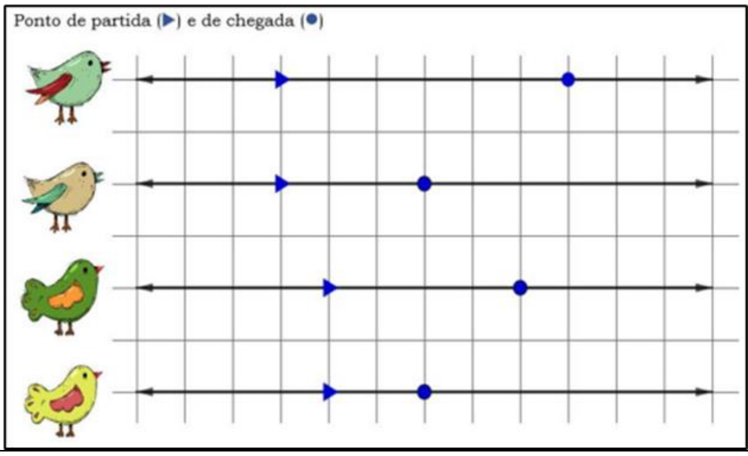
Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

Na etapa da Busca de Consenso, todos os grupos chegaram na mesma conclusão, de que a, e, f e g estavam particionados em quartos e os outros não. Destacaram que a letra **e** e **g** estavam particionados em quartos, porém não tinham o mesmo formato.

O problema 2 é sobre os passarinhos que estavam caminhando pela fiação, e Eliseu pegou seu caderno quadriculado e começou a fazer anotações sobre a partida e a chegada de cada passarinho, e analisando cada passarinho qual a fração que representava a distância percorrida por cada um, como mostra a Figura 48.

Figura 48 - Problema 2 (AT2)

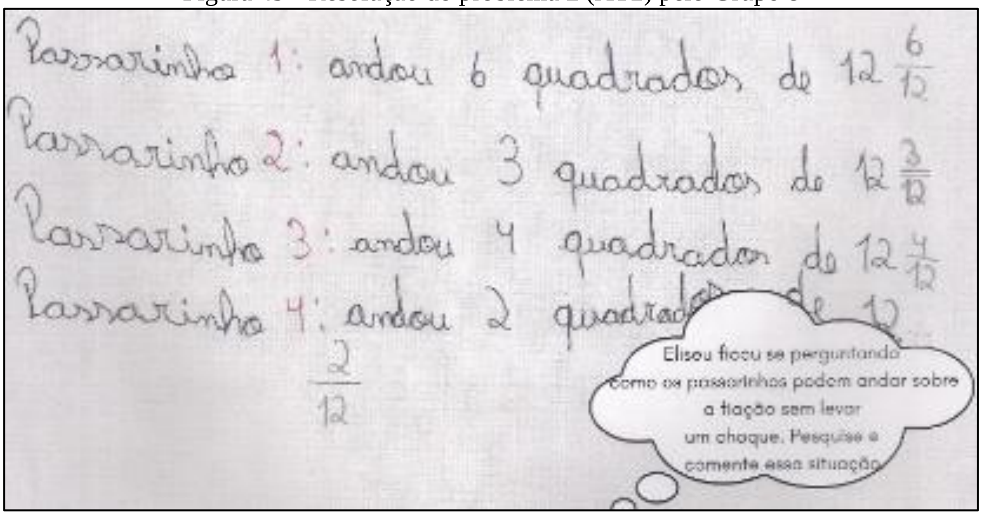
Problema 2 - Eliseu estava entediado olhando para os postes de iluminação e observou que os passarinhos estavam caminhando pela fiação. Ele pegou seu caderno quadriculado e começou a registrar o ponto de partida e de chegada de cada passarinho. Analise o desenho e indique qual a fração que representa a distância percorrida por cada passarinho.



Fonte: (STEIN; POSSAMAI, 2021, p. 42)

Os grupos 5, 7 e 8 conseguiram representar que o 1° passarinho andou 6 de 12 $\left(\frac{6}{12}\right)$; o 2° passarinho andou 3 de 12 $\left(\frac{3}{12}\right)$; o 3° passarinho andou 4 de 12 $\left(\frac{4}{12}\right)$; e o 4° passarinho andou 2 de 12 $\left(\frac{2}{12}\right)$ como mostra a Figura 49. A representação fracionária (simbólica) emergiu nesses grupos de forma natural, relacionando com os conhecimentos prévios de anos anteriores.

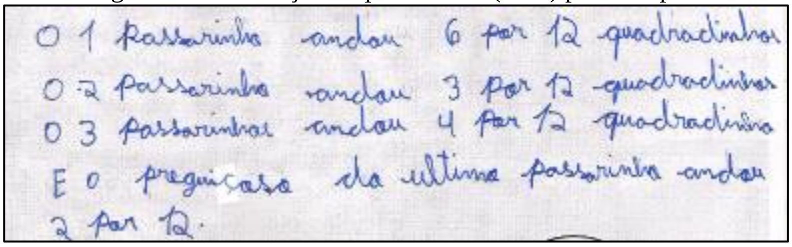
Figura 49 - Resolução do problema 2 (AT2) pelo Grupo 8



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

O Grupo 5 ainda destacou que o último passarinho era muito ‘preguiçoso’, pois havia andado apenas 2 quadrados, como ilustra a Figura 50:

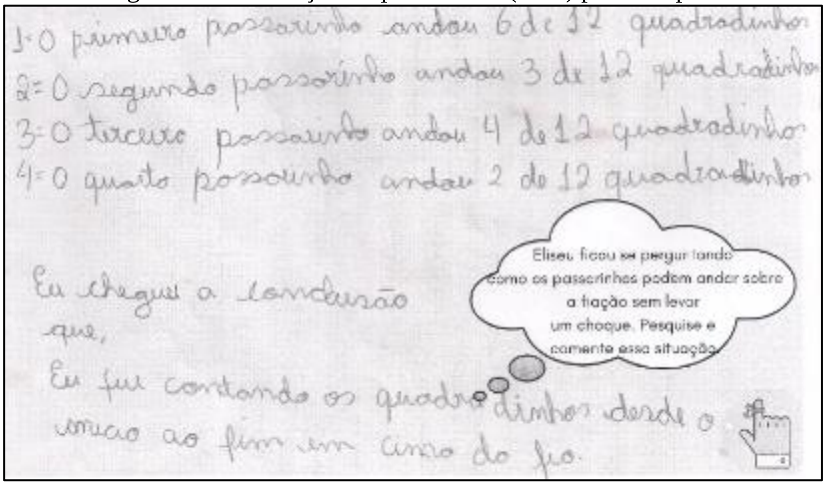
Figura 50 - Resolução do problema 2 (AT2) pelo Grupo 5



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

Esses grupos conseguiram representar na forma escrita de fração, mas os grupos 1, 2 e 4 apenas representaram em forma escrita o percurso de cada passarinho, como mostra a Figura 51:

Figura 51 - Resolução do problema 2 (AT2) pelo Grupo 2



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

No momento da socialização, a professora formalizou o conteúdo de fração destacando o que cada passarinho percorreu sobre o todo, usando simbologia Matemática para representar as frações. Nesse aspecto, Van de Walle (2009, p. 328) ressalta que:

> O modo como escrevemos as frações com um número na parte superior e outro na parte inferior de uma barra é uma convenção – um acordo arbitrário de como representar frações. [...] Como uma convenção, cai na categoria de coisas que você simplesmente informa aos alunos. Porém, uma boa ideia é tornar a convenção muito clara por meio da demonstração que eles lhe dirão o que os números da parte superior e da inferior significam.

Assim, esses dois primeiros problemas permitiram avaliar a introdução de simbologia pertinente aos conceitos de fração trabalhados e todos os estudantes tiveram sucesso nessa transição. Tem-se evidenciado a importância de se trabalhar o conhecimento informal e desenvolvimento do senso fracionário de modo que, na passagem dos números naturais para as frações, os estudantes relacionem os significados produzidos com a ideia de partição e compartilhamento.

Os problemas seguintes tinham como intuito tornar essa convenção clara e significativa para os estudantes, pedindo explicações no contexto das situações para os números usados nas representações.

O problema 3 traz que Vinicius tem 6 cartas de Pokémon, Sérgio tem 4 cartas e Rhyan tem 2 cartas, solicitando qual a fração do total de cartas que Sérgio possui, como mostra a Figura 52.

Figura 52 - Problema 3 (AT2)

Problema 3 - Vinícius tem 6 cartas de Pokemon, Sérgio tem 4 cartas e Rhyan tem 2 cartas. Qual a fração do total de cartas que Sérgio possui?

Fonte: Stein; Possamai (2021, p. 43)

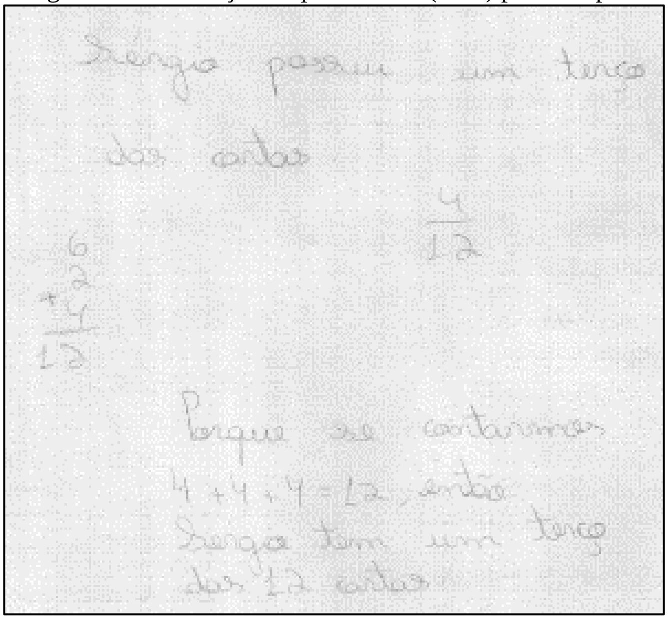
Todos os grupos compreenderam e resolveram de forma rápida sem gerar muitas dúvidas, concluíram que era 4 sobre 12 $\left(\frac{4}{12}\right)$.

Todos os grupos usaram a representação simbólica de fração e no momento da socialização os grupos apresentaram, mas o grupo 1 apresentou intuitivamente a simplificação de fração, como apresenta no diálogo:

> Grupo 1: Sérgio possui um terço das cartas, porque se contarmos 4+4+4 = 12, então Sérgio tem $\frac{1}{3}$ das 12.
>
> Professora: Vocês concordam com esse grupo?
>
> Grupo 2: Sim, professora, faz muito sentido. Sérgio tem 4 e o total é 12, então 4*3=12, por isso pode dizer que é $\frac{1}{3}$.

Na Figura 53 ilustra a resolução do Grupo 1.

Figura 53 - Resolução do problema 3 (AT2) pelo Grupo 1



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

Nessa discussão apresentada pelo grupo é possível perceber que os estudantes produzem significado para o numerador como a quantidade de partes tomadas e para o denominador o que está sendo contado. Esse tipo de atividade é importante uma vez que:

> As questões parte-todo são desafiadoras e ainda muito efetivas em ajudar os alunos a refletir sobre os significados do numerador e do denominador. Elas também são um bom caminho para verificar se os estudantes realmente compreendem os significados do numerador e do denominador, pois as tarefas obrigam eles a usar aqueles significados, e não apenas recitar uma definição (VAN DE WALLE, 2009, p. 331)

Com esse mesmo intuito, o problema 4 traz que Sara levou 4 squishies[6], Paola levou 2 squishies e Maria Eduarda levou 3 squishies, pedindo qual é a fração do total de squishies dessas três amigas que Paola levou, como ilustra a Figura 54.

Figura 54 - Problema 4 (AT2)

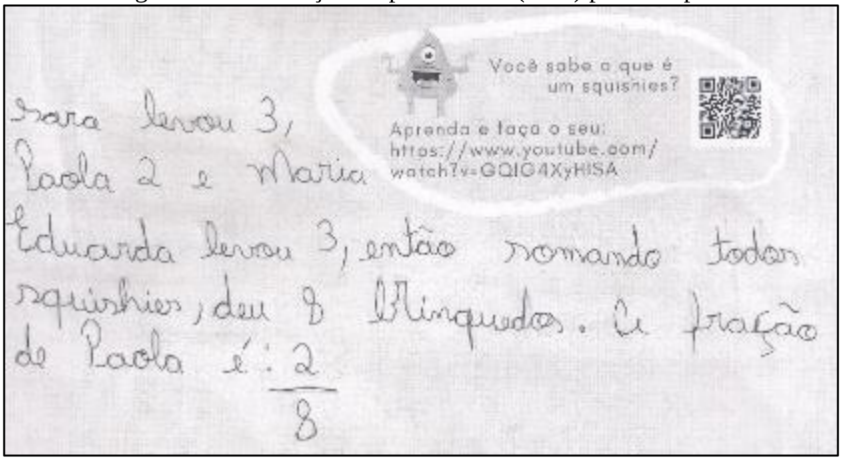
Problema 4 - Três amigas levaram, para brincar no recreio, os seus squishies (brinquedos macios que podem ser apertados). Sara levou 3 squishies, Paola levou 2 squishies e Maria Eduarda levou 3 squishies. Qual a fração do total de squishies dessas três amigas que Paola levou?

Fonte: Stein; Possamai (2021, p. 44)

Todos os grupos representaram como $\frac{2}{8}$ levando o que Paola tinha sobre o total de squishies, como mostra a Figura 55:

[6] Squishies são bichinhos de apertar construídos pelos alunos em suas atividades de brincadeira e diversão.

Figura 55 - Resolução do problema 4 (AT2) pelo Grupo 8



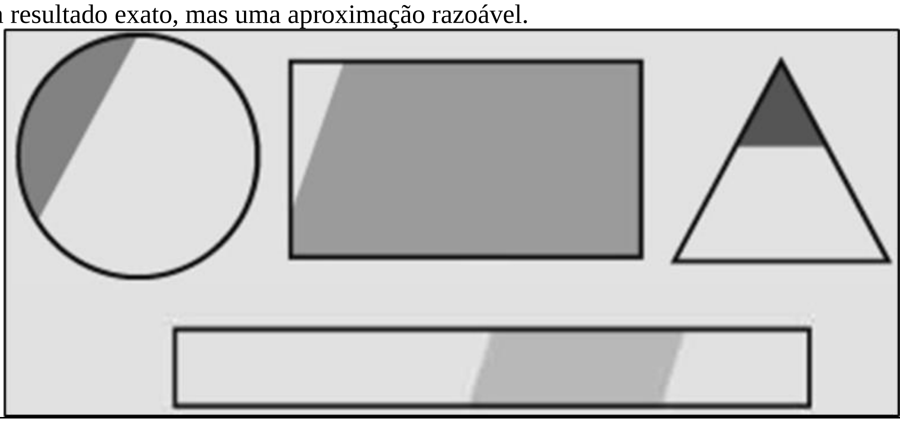
Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

Esse problema evidencia um aspecto importante do entendimento de fração que é entender qual o todo tomado como referência.

Na sequência, enfatizando a ideia de todo, no problema 5 é apresentada uma imagem na qual tinham quatro desenhos geométricos e é para escrever uma fração que fosse uma boa estimativa para cada um dos desenhos geométricos, como mostra a Figura 56.

Figura 56 - Problema 5 (AT2)

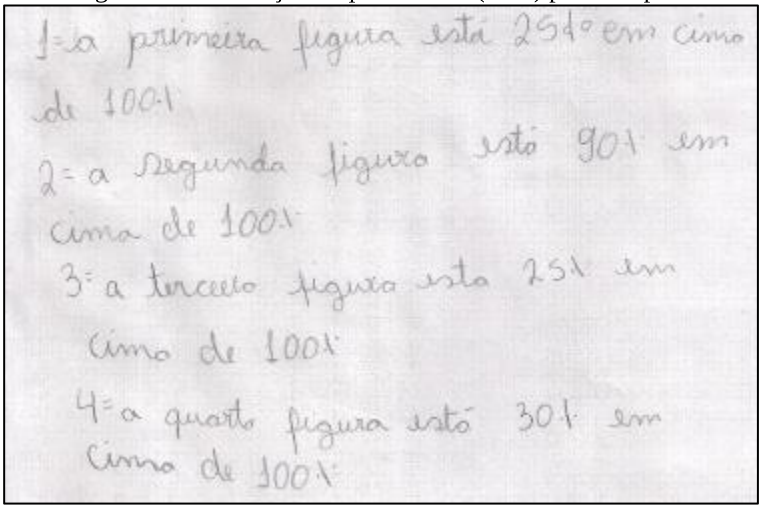
Problema 5 - Escreva uma fração que seja uma boa estimativa para cada uma das figuras. Estimar não significa encontrar um resultado exato, mas uma aproximação razoável.



Fonte: (STEIN; POSSAMAI, 2021, p.45)

Os grupos 1, 2 e 4 fizeram a representação por porcentagens, como mostra a Figura 57:

Figura 57 - Resolução do problema 5 (AT2) pelo Grupo 2

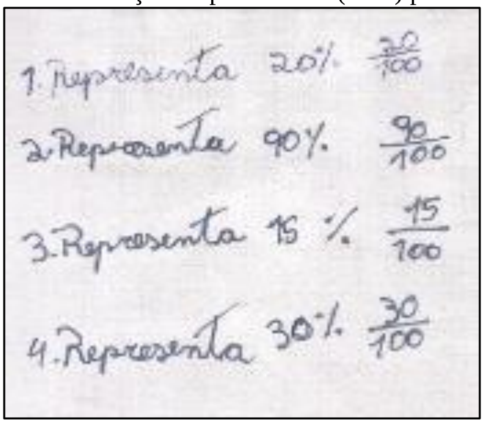


1= a primeira figura está 25% em cima de 100%
2= a segunda figura está 90% em cima de 100%
3= a terceira figura está 25% em cima de 100%
4= a quart figura está 30% em cima de 100%

Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

Os grupos 5, 7 e 8 representaram na forma de porcentagem e, também, na forma de fração, como apresenta a Figura 58:

Figura 58 - Resolução do problema 5 (AT2) pelo Grupo 7



1. Representa 20% $\frac{20}{100}$
2. Representa 90% $\frac{90}{100}$
3. Representa 15 % $\frac{15}{100}$
4. Representa 30% $\frac{30}{100}$

Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

No momento da socialização:

> Grupo 7: A primeira figura 20% ou $\frac{20}{100}$.
>
> Professora: Por que ou $\frac{20}{100}$?
>
> Grupo 7: Porque $\frac{20}{100}$ representa 20% professora. Assim, na figura 2 que é 90% ou $\frac{90}{100}$.

Os grupos que não haviam representado em forma de fração conseguiram compreender a ideia dos grupos. Essa resolução relacionando com porcentagem não era esperada pela professora/pesquisadora e evidencia um aspecto importante da Resolução de Problemas, que é a conexão entre as grandes ideias da Matemática e, especialmente, com os conteúdos que fazem parte do repertório de conhecimentos aprendidos. Nesse sentido, corroboram Allevato e Onuchic (2019, p. 7) ao indicarem que "certamente, a resolução de problemas "reais" envolve os estudantes e promove o estabelecimento e o uso de conexões".

Nesses problemas, os grupos apresentaram estimativas diferentes, o que pode acontecer e é aceitável que haja respostas distintas e nesse aspecto Van de Walle (2009, p. 333) ressalta que:

> Escute sem julgar as ideias de vários alunos e discuta com eles por que qualquer estimativa particular poderia ser uma boa estimativa. Não existe resposta correta única, mas as estimativas devem estar dentro do campo de proximidade. Se as crianças tiverem dificuldade em apresentar uma estimativa, pergunte se eles acham que a quantidade está mais próximo de 0, 1/2 ou 1.

No problema seguinte, a relação parte-todo foi explorada no sentido inverso, fornecendo uma fração para que os estudantes construíssem outras a partir do entendimento do todo de referência, como ilustra a Figura 59.

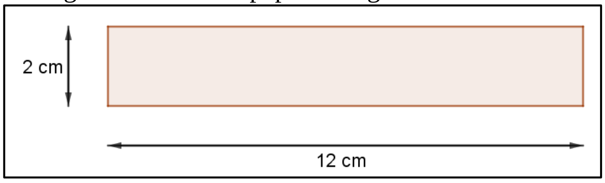
Figura 59 - Problema 6 (AT2)

Problema 6 - Você recebeu uma tira de papel que representa três quartos de um todo.
- Produza tiras que representem as frações indicadas a seguir.
- Na sequência, compare-as e discuta o que você pensou com os colegas.
- Depois, cole suas tiras aqui e escreva a que conclusões você e os colegas chegaram.

Fonte: Stein, Possamai (2021, p. 46 – 47)

A partir de uma tira de papel, entregue aos estudantes com a indicação que representava $\frac{3}{4}$ do todo, indicada na Figura 60, eles tiveram que construir outras representações, conforme solicitado.

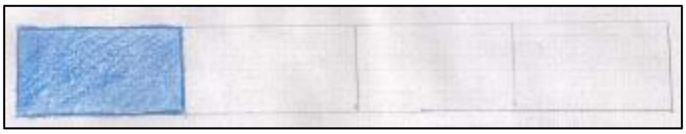
Figura 60 - Tira de papel entregue aos estudantes



Fonte: Autoras (2021)

Inicialmente foi pedido que eles construíssem uma tira de papel que representasse $\frac{1}{4}$ do todo. Todos os grupos fizeram a tira de 16cm de comprimento e 2cm de largura, para representar $\frac{1}{4}$ do todo como mostra a Figura 61:

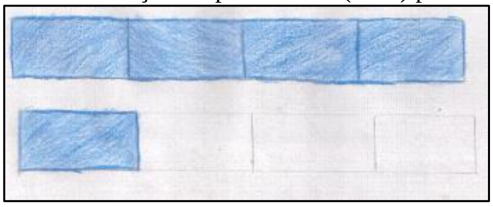
Figura 61 - Resolução do problema 6 (AT2) pelo Grupo 2



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

A segunda fração que era para eles representarem era $1\frac{1}{4}$ do todo, e os grupos fizeram duas tiras de 16cm de comprimento e 2cm de largura como mostra a Figura 62:

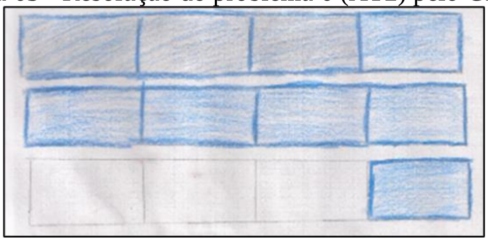
Figura 62 - Resolução do problema 6 (AT2) pelo Grupo 2



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

A terceira fração que foi solicitada para eles representarem era $2\frac{1}{4}$ do todo, e os grupos fizeram três tiras de 16cm de comprimento e 2cm de largura como mostra a Figura 63:

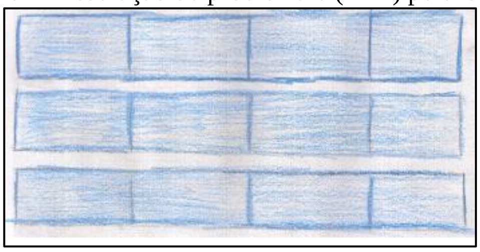
Figura 63 - Resolução do problema 6 (AT2) pelo Grupo 2



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

E por fim, a quarta era 3 inteiros e os grupos fizeram três tiras de 16cm de comprimento e 2cm de largura como mostra a Figura 64:

Figura 64 - Resolução do problema 6 (AT2) pelo Grupo 2



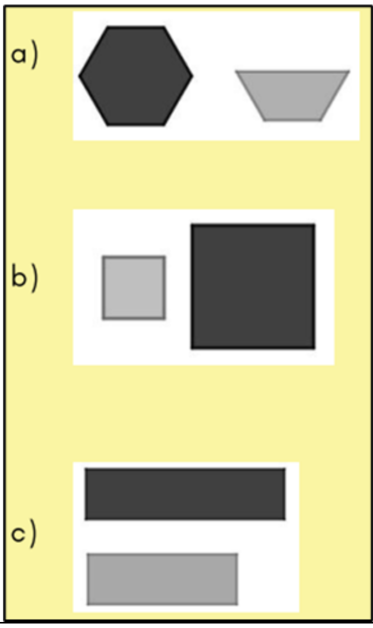
Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

No momento da socialização não houve tantas discussões, pois todos os grupos fizeram a mesma representação com as tiras.

No sétimo problema tem 4 desenhos que é para representar a fração do todo, a seguir a Figura 65 representa esses desenhos.

Figura 65 - Problema 7 (AT2)

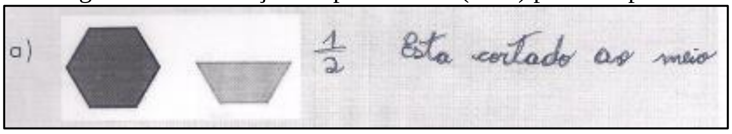
Problema 7 - Na figura, temos desenhado a parte (em cinza) e o todo (em preto). Indique qual a fração que a parte representa do todo.



Fonte: (STEIN; POSSAMAI, 2021, p. 48)

Na letra a os grupos 1, 5, 7 e 8 representaram na forma escrita de fração $\frac{1}{2}$, como mostra a Figura 66:

Figura 66 - Resolução do problema 7 (AT2) pelo Grupo 7



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

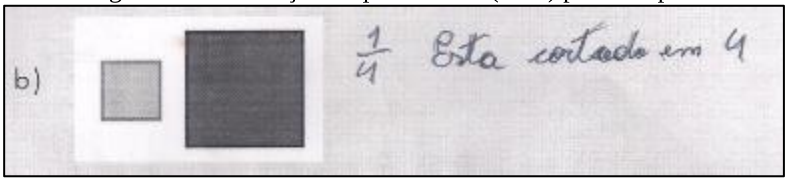
Os grupos 2 e 4 trazem a ideia de porcentagem escrevendo em forma fracionária $\frac{50}{100}$ ou seja 50% de 100%, como mostra a Figura 67:

Figura 67 - Resolução do problema 7 (AT2) pelo Grupo 2

Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

Na letra b os grupos 1, 5, 7 e 8 representaram na forma escrita de fração $\frac{1}{4}$, como mostra a Figura 68:

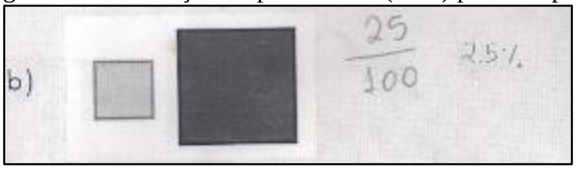
Figura 68 - Resolução do problema 7 (AT2) pelo Grupo 7



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

Os grupos 2 e 4 trazem a ideia de porcentagem escrevendo em forma fracionária $\frac{25}{100}$, ou seja 25% de 100%, como mostra a Figura 69:

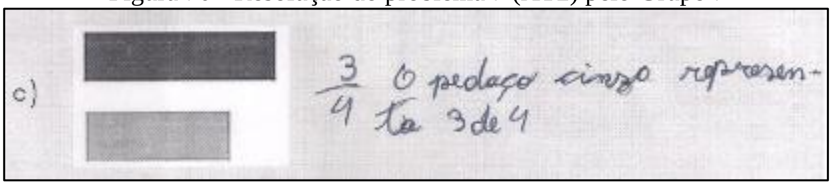
Figura 69 - Resolução do problema 7 (AT2) pelo Grupo 2



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

Na letra c, os grupos 1, 5, 7 e 8 representaram na forma escrita de fração $\frac{3}{4}$, como mostra a Figura 70:

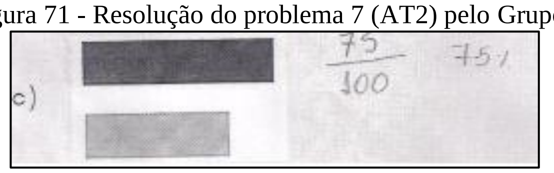
Figura 70 - Resolução do problema 7 (AT2) pelo Grupo 7



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

Os grupos 2 e 4 trazem a ideia de porcentagem, escrevendo em forma fracionária $\frac{75}{100}$ ou seja 75% de 100%, como mostra a Figura 71:

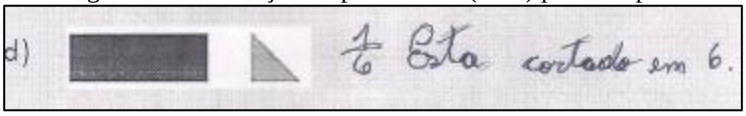
Figura 71 - Resolução do problema 7 (AT2) pelo Grupo 2



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

Na letra d, os grupos 1, 5, 7 e 8 representaram na forma escrita de fração $\frac{1}{6}$ destacando que cabem 3 quadrados, ou seja, 6 metades de um quadrado, como mostra a Figura 72:

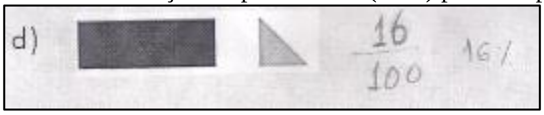
Figura 72 - Resolução do problema 7 (AT2) pelo Grupo 7



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

Os grupos 2 e 4, na letra d, realizaram por estimativa, alegando que a fração que representava era de $\frac{16}{100}$ ou seja 16% de 100%, como mostra a Figura 73:

Figura 73 - Resolução do problema 7 (AT2) pelo Grupo 2



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

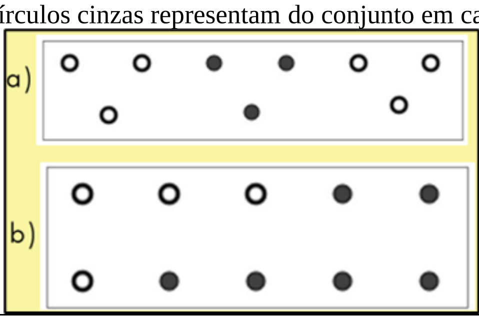
No momento da socialização, quando o grupo 2 e 4 apresentaram, eles estavam fazendo por uma boa estimativa, sem saber justificar o porquê de 16%. Nas outras figuras sabiam justificar por representar uma porcentagem exata.

Esses dois últimos problemas envolvem o entendimento sobre o tamanho das frações, especialmente com o uso de materiais manipulativos.

No oitavo problema a finalidade era a mesma, porém usando conjuntos para relacionar a parte com o todo. Na Figura 74 ilustra o problema 8.

Figura 74 - Problema 8 (AT2)

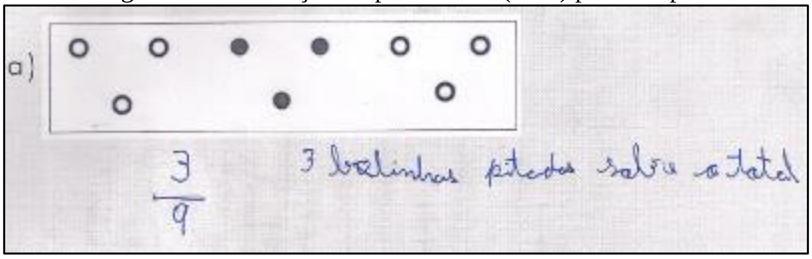
Problema 8 - Qual a fração os círculos cinzas representam do conjunto em cada imagem?



Fonte: (STEIN; POSSAMAI, 2021, p. 49)

Todos os grupos representaram $\frac{3}{9}$ alegando que eram 3 círculos cinzas sobre o total, como mostra a Figura 75:

Figura 75 - Resolução do problema 8 (AT2) pelo Grupo 5



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

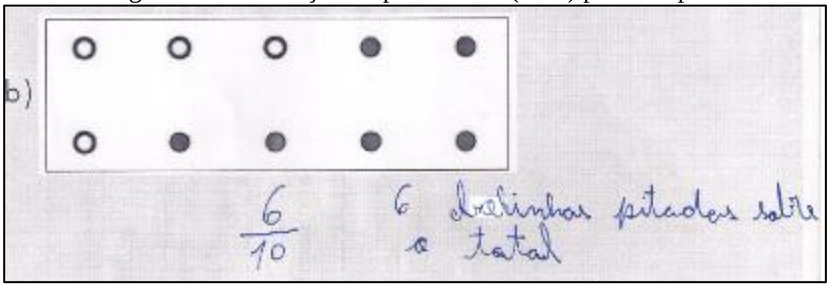
No momento da socialização a professora questiona os grupos:

> Professora: Se eu representar como $\frac{1}{3}$, o que acham sobre essa representação?
>
> Grupo 7: Sim!
>
> Professora: Mas por que sim?
>
> Grupo 7: Se dividirmos 9 por 3 dá 3, então 1 parte de 3 pintadas e mais 2 partes de 3 não pintadas, dando $\frac{1}{3}$.
>
> Professora: Tá, mas $\frac{3}{9}$ e $\frac{1}{3}$ representam a mesma fração?
>
> Grupo 7: Sim! Porque se pegar $\frac{3}{9}$ e dividir por 3 dá $\frac{1}{3}$.

Essa discussão evidencia que eles conseguem informalmente comparar frações e entender a equivalência de frações.

Na letra b, todos os grupos representaram $\frac{6}{10}$, concluindo que 6 círculos cinzas sobre o total, como mostra a Figura 76:

Figura 76 - Resolução do problema 8 (AT2) pelo Grupo 5



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

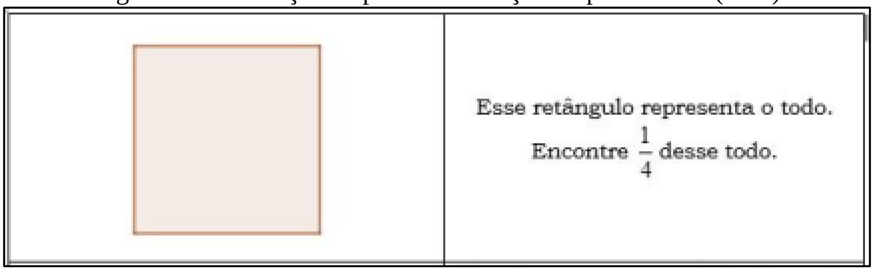
Nesse problema, o todo de referência é entendido como sendo o conjunto de objetos, e os subconjuntos compõem as partes fracionárias, permitindo que os estudantes se concentrem no número de partes iguais do todo, ao invés do tamanho do conjunto, uma vez que “[...] o conceito de fração distingue-se da simples ação de dividir um todo em partes iguais (lógicofísico processual), mas baseia-se na compreensão da relação entre a parte e o todo.” (STEWART, 2005, p. 91-92, tradução nossa).

Essas atividades utilizam modelos diferentes para construir um mesmo conceito – material manipulativo, desenhos de formas geométricas (hexágono, quadrado, retângulo e triângulo) e conjuntos – o que permite ampliar a conceitualização de fração dado que “a abordagem geral para ajudar os alunos a construir uma compreensão de frações equivalentes é fazer com que usem modelos para encontrar diferentes nomes para uma fração” (VAN DE WALLE, 2009, p. 338).

Na sequência, o problema nove envolvia diferentes representações, de modo que os estudantes transitassem na relação parte-todo utilizando modelos distintos, apresentando justificativas para o entendimento produzido.

A Figura 77 apresenta a primeira situação do problema.

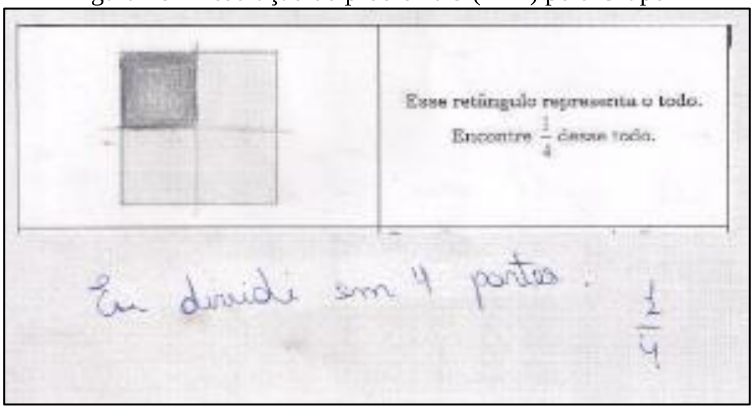
Figura 77 - Ilustração da primeira situação do problema 9 (AT2)



Fonte: (STEIN; POSSAMAI, 2021, p. 50)

Todos os grupos particionaram em quatro partes iguais como mostra a Figura 78:

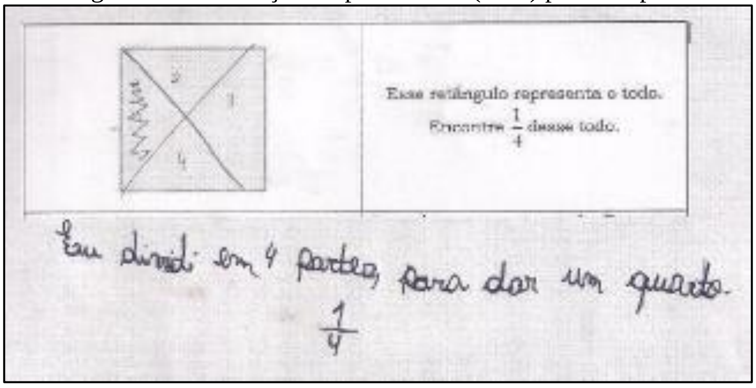
Figura 78 - Resolução do problema 9 (AT2) pelo Grupo 1



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

O grupo 5 particionou em 4 partes iguais, mas fez a partição na diagonal como mostra a Figura 79:

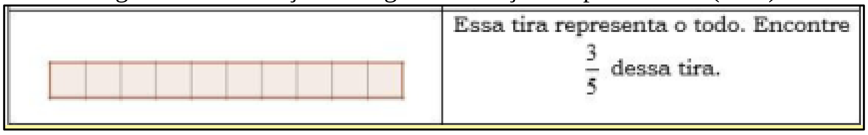
Figura 79 - Resolução do problema 9 (AT2) pelo Grupo 5



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

A seguir, a Figura 80 ilustra a situação 2 do problema.

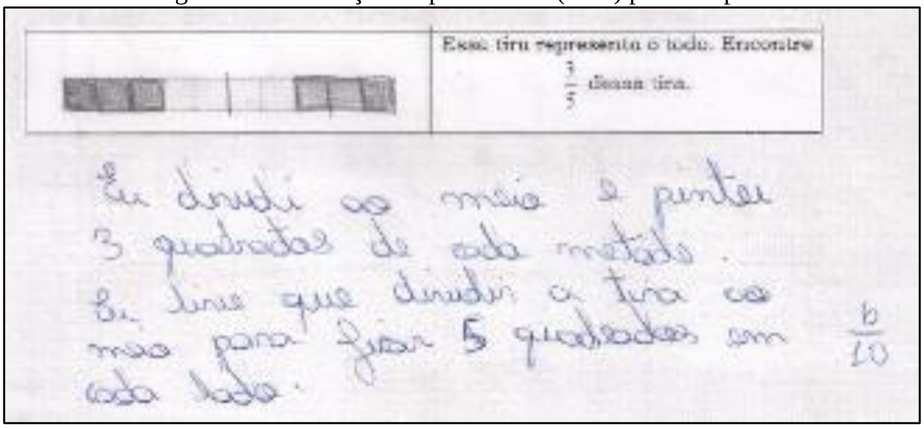
Figura 80 - Ilustração da segunda situação do problema 9 (AT2)



Fonte: (STEIN; POSSAMAI, 2021, p. 50)

Os grupos 1, 2, 4, 7 e 8 dividiram a tira ao meio para representar o denominador 5 e pintaram 3 quadrados de cada lado da divisão, concluindo que $\frac{3}{5}$ dessa tira representava 6 quadrados do todo, como a Figura 81 ilustra.

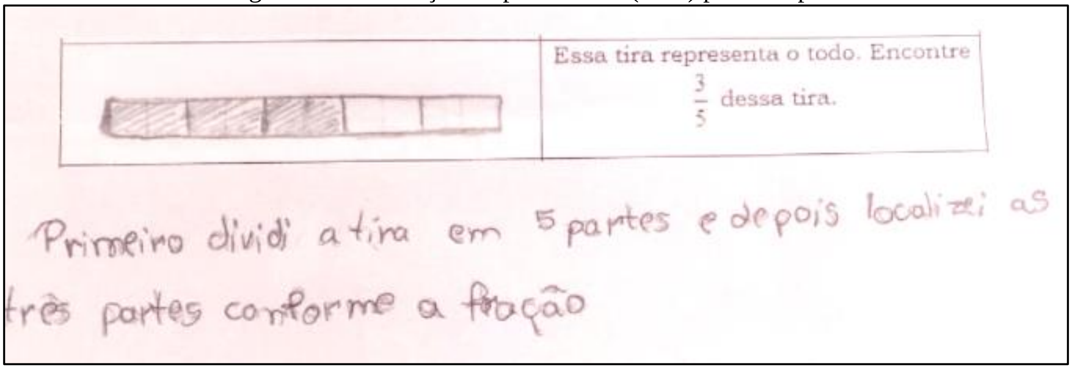
Figura 81 - Resolução do problema 9 (AT2) pelo Grupo 1



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

O grupo 7 representou que 10 dividido por 5 é igual a 2, então multiplicaram o 2 por 3 que resultou em 6, concluindo que $\frac{3}{5}$ dessa tira representou 6 quadrados, como ilustra a Figura 82.

Figura 82 - Resolução do problema 9 (AT2) pelo Grupo 7

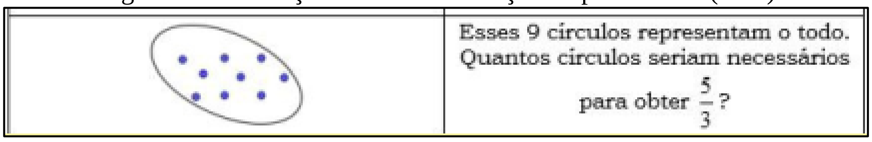


Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

A Figura 81 demonstra o raciocínio de metades repartidas, quando o grupo divide a tira ao meio e em cada metade pinta três partes de cinco, já na Figura 82, o grupo representou de outra forma, particionando o todo em cinco partes iguais e pintando três partes dessas cinco. É um problema com uma resposta única, porém soluções diferentes.

Na sequência, tem a situação 3 como mostra a Figura 83:

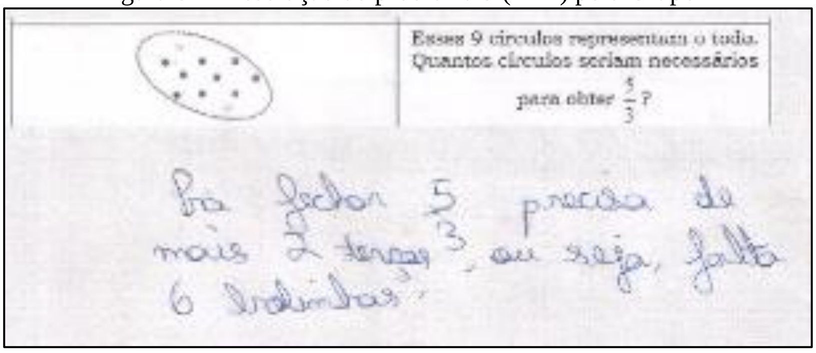
Figura 83 - Ilustração da terceira situação do problema 9 (AT2)



Fonte: (STEIN; POSSAMAI, 2021, p. 50)

Todos os grupos representaram que $\frac{5}{3}$ é maior que o todo, se o todo é $\frac{3}{3}$ falta mais $\frac{2}{3}$ para obter $\frac{5}{3}$, ou seja, os grupos concluíram que faltam 6 bolinhas, como ilustra a Figura 84:

Figura 84 - Resolução do problema 9 (AT2) pelo Grupo 1

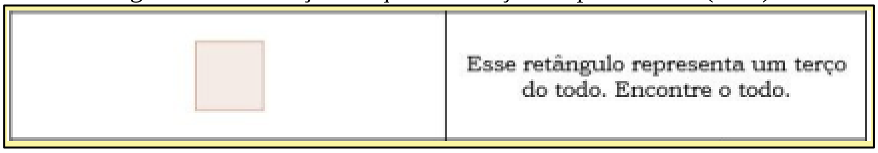


Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

Nesse item, verifica-se que os estudantes trazem o entendimento de adição e subtração de fração de mesmo denominador.

A Figura 85 mostra a quarta situação do problema:

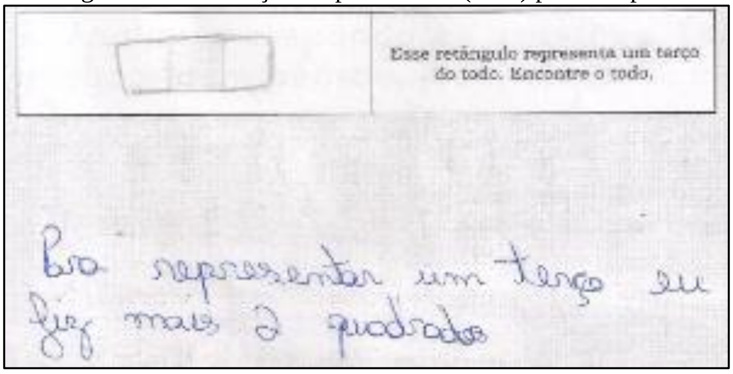
Figura 85 - Ilustração da quarta situação do problema 9 (AT2)



Fonte: (STEIN; POSSAMAI, 2021, p. 51)

Todos os grupos fizeram mais dois quadrados do mesmo tamanho, para encontrar o todo, como ilustra a Figura 86:

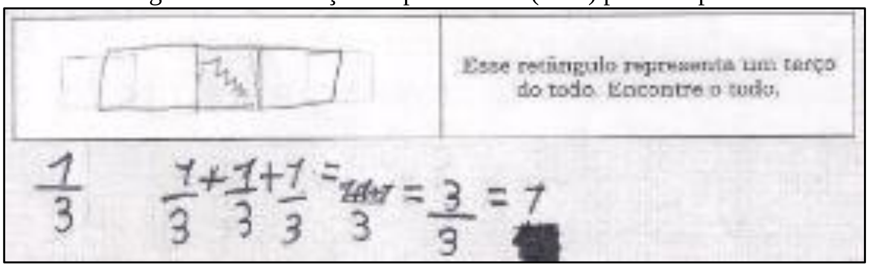
Figura 86 - Resolução do problema 9 (AT2) pelo Grupo 1



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

O grupo 5 fez a representação com adição de frações $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1$, como ilustra a Figura 87:

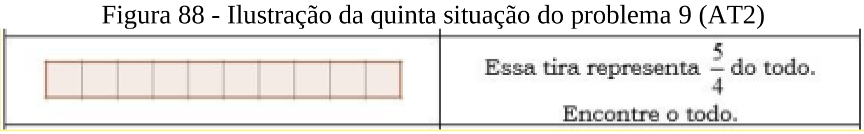
Figura 87 - Resolução do problema 9 (AT2) pelo Grupo 5



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

Na sequência, a quinta situação do problema, como ilustra a Figura 88.

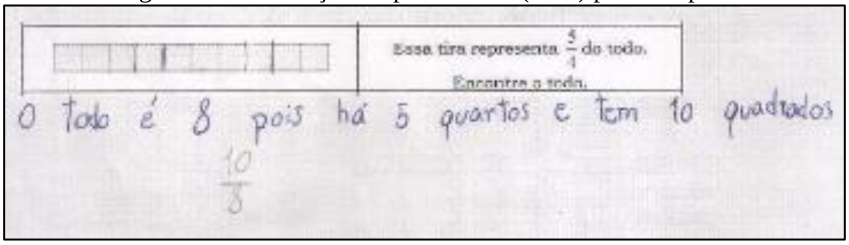
Figura 88 - Ilustração da quinta situação do problema 9 (AT2)



Fonte: (STEIN; POSSAMAI, 2021, p. 51)

Todos os grupos concluíram que $\frac{5}{4}$ era maior que o todo, dividiram a tira em duas partes de 4 e concluíram que 8 quadrados é o todo, como mostra a Figura 89:

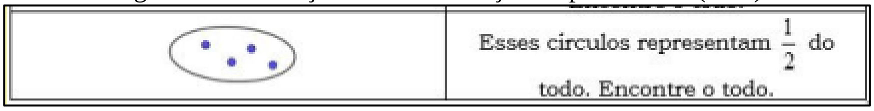
Figura 89 - Resolução do problema 9 (AT2) pelo Grupo 4



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

A seguir a situação 6, como ilustra a Figura 90:

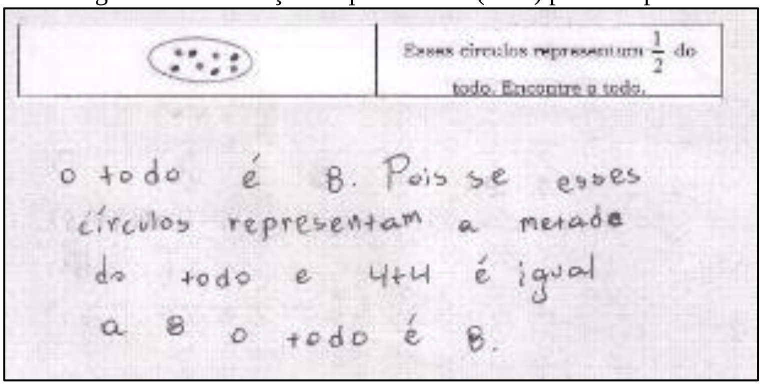
Figura 90 - Ilustração da sexta situação do problema 9 (AT2)



Fonte: (STEIN; POSSAMAI, 2021, p. 51)

Todos os grupos compreenderam que $\frac{1}{2}$ é metade, então para chegar no todo era fazer mais uma metade, ou seja, mais 4 bolinhas. Essa ilustração está na Figura 91:

Figura 91 - Resolução do problema 9 (AT2) pelo Grupo 8



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

Esse problema evidenciou que além do entendimento de fração por parte-todo e do todo de referência, os estudantes conseguiram estabelecer a compreensão de frações equivalentes e conseguiram realizar operações de adição e subtração de frações, conceitos estes não formalizados pela professora/pesquisadora.

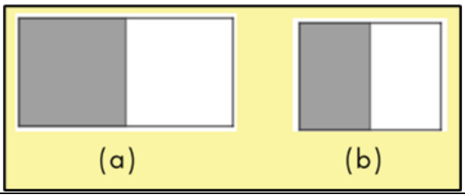
Por fim, o problema dez tinha uma figura com dois retângulos e ambos particionados ao meio, e em relação à fração que cada um desses retângulos representa do todo é para justificar se é maior, menor ou é igual as frações. A Figura 92 ilustra o problema dez.

Figura 92 - Problema 10 (AT2)

Problema 10 - Na Figura está destacado em cinza a parte do todo. A fração que cada parte representa do todo

- é maior em (a) do que em (b),
- é menor em (a) do que em (b) ou
- é igual em (a) e em (b)?

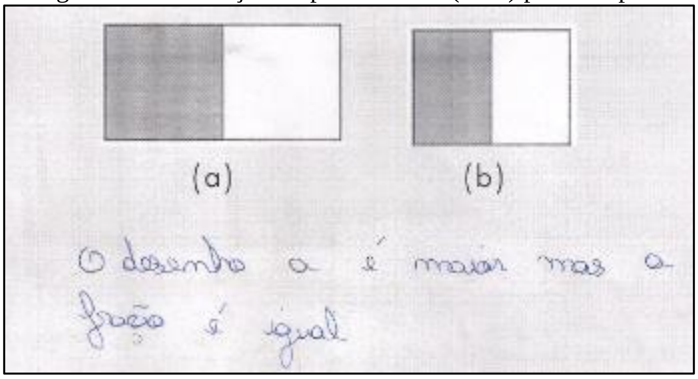
Justifique sua resposta.



Fonte: (STEIN; POSSAMAI, 2021, p. 52)

Todos os grupos concluíram que a fração é a mesma, o que muda é o tamanho dos retângulos como ilustra a Figura 93:

Figura 93 - Resolução do problema 10 (AT2) pelo Grupo 1



Fonte: Acervo de Pesquisa (2021)

Esse fechamento permitiu reforçar o entendimento do conceito de fração, o que possibilita que se avance para outros contextos.

A professora continuou a utilizar as atividades apresentadas no Produto Educacional, porém estas não estão analisadas nesta dissertação devido ao atraso na aplicação das atividades causado pela situação de pandemia.

6.1 RETOMANDO OS RESULTADOS À LUZ DOS CRITÉRIOS DE ANÁLISE

Analisando os problemas resolvidos pelos estudantes, percebe-se que as atividades “desenvolvendo senso fracionário” e “tarefas de compartilhamento - representação” possibilitaram um modo de olhar e pensar diferente sobre frações, trazendo o entendimento do conceito relacionado com a representação.

Os problemas desenvolvidos na perspectiva da Resolução de Problemas, foram desafiadores para a professora, pois rompem com o modelo da repetição, mas trazem uma Matemática significativa, a qual a professora foi mediadora do processo, deixando de dar respostas para fazer perguntas.

> Os professores são responsáveis pela qualidade das tarefas matemáticas em que os alunos se envolvem. Os professores devem escolher e desenvolver tarefas que possam promover o desenvolvimento da compreensão dos alunos de conceitos e procedimentos de uma forma que também estimule sua capacidade de resolver problemas e raciocinar e comunicar matematicamente. (STEWART, 2005, p. 14, tradução nossa).

Em especial, os problemas da atividade "desenvolvendo o senso fracionário", trazem a ideia e o intuito de compreender a partição e desenvolver estratégias de compartilhamento, por meio do conhecimento informal dos estudantes. Nessa atividade, inicialmente, os estudantes tiveram dificuldades em envolver-se nas discussões e no trabalho em grupo, mas isso foi sendo superado à medida em que eles se habituaram com as aulas norteadas pela metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. A cada problema resolvido foi notável que houve uma compreensão das frações com base na ideia de particionamento e na relação parte-todo.

Analisando os problemas da atividade "tarefas de compartilhamento – representação", com os quais o objetivo é desenvolver a nomenclatura de frações utilizando a relação parte-todo, verifica-se que os estudantes foram desenvolvendo compreensões importantes para avançarem no entendimento de frações equivalentes e no conceito da fração como operador.

> Tarefas de fração devem ser projetadas para obter-se uma variedade de estratégias e representações dos alunos. Os resultados do estudo indicam que com instrução adequada e envolvimento em atividades significativas, os alunos são capazes de resolver problemas relativos à partilha justa e à ordem e equivalência de frações. (STEWART, 2005, p. 175, tradução nossa).

O compartilhamento justo é essencial no desenvolvimento da compreensão dos estudantes sobre as frações, e foi notável que a principal dificuldade encontrada pelos estudantes ocorreu quando eles tiveram que compartilhar objetos, se o número de objetos não fosse um múltiplo do número de ações iguais. Stewart (2005) resssalta que essa dificuldade é amenizada à medida que os estudantes avançam em atividades que explorem diferentes formas de particionamento, de modo que a rede de conhecimento existente sobre frações conflita com os novos significados produzidos.

Ainda cabe ressaltar que a segunda atividade despertou maior interesse e entusiasmo dos estudantes, na proporção que iam desenvolvendo cada problema, trabalhando com mais autonomia e passando a tomar decisões com base na discussão e no trabalho do grupo, validando e refutando os resultados uns dos outros.

Por fim, para avaliar o aprendizado dos estudantes foi solicitado que cada um deles resolvessem individualmente as questões do Quadro 11, sendo que só era entregue uma questão após terem resolvido e devolvido a anterior.

Quadro 11 - Questões resolvidas pelos estudantes individualmente

1. Suponha que você tenha duas pizzas do mesmo tamanho, e corte uma delas em seis pedaços do mesmo tamanho, e a outra você corte em oito pedaços do mesmo tamanho. Se você pegar um pedaço de cada pizza, qual o pedaço maior? Descreva com suas palavras como você pensou para resolver a questão.
2. Para você, o que é maior 1/6 ou 1/8? Lembrando que você precisa justificar como pensou.
3. Na fração 4/6, o que significa o 4 e o 6? Justifique como pensou.

Fonte: Autoras (2021)

Todos os estudantes, que fizeram parte da análise desta pesquisa, responderam adequadamente as questões, evidenciando compreensão da relação parte-todo. Em especial, nas duas primeiras questões, os estudantes fizeram relações com a ideia de partição para justificar suas respostas, sendo que, curiosamente, todos contextualizaram com a ideia de uma pizza sendo compartilhada.

Na terceira questão, os estudantes descreveram adequadamente o numerador como aquele que conta as partes tomadas e o denominador como aquele que determina a partição do todo, sendo que alguns desenharam e explicaram, e outros apenas escreveram com palavras suas respostas.

Além disso, os relatos evidenciaram que os estudantes se sentiram aprendendo Matemática enquanto faziam Matemática, sendo os protagonistas na construção do conhecimento.

Estudante L: “Nunca gostei de tanto de Matemática”

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o objetivo de avaliar implicações do uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas sob o Ensino de Frações, inicialmente, fez-se uma revisão bibliográfica sobre as diferentes concepções de problemas, diferentes abordagens da Resolução de Problemas, tipos e analise de problemas, bem como uma discussão mais ampla sobre a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, que norteou o desenvolvimento desta pesquisa. Também foi construída uma revisão frente ao ensino e aprendizagem de fração, retomando aspectos que evidenciam dificuldades da transição entre os números naturais e os racionais, forma de superação desses obstáculos, cuidados didáticos para com esse conteúdo, bem como diferentes raciocínios que podem ser desenvolvidos pelos estudantes na compreensão de frações.

Com a construção do referencial, pode-se perceber a importância de uma prática de ensino fundamentada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, o que possibilita que o estudante seja o protagonista de sua própria aprendizagem, desenvolvendo, desta forma, sua autonomia, criatividade e senso crítico. Sendo assim, para o ensino fundamentado na Resolução de Problemas para o estudo de Frações, seguiu-se os dez passos propostos por Allevato e Onuchic (2014), que norteiam o trabalho através desta metodologia.

Com o intuito de validar os problemas construídos, estes foram aplicados com 14 estudantes de uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental – Anos Finais. No que se refere às contribuições, destaca-se a autonomia desenvolvida pelos estudantes durante o processo de aprendizagem significativa sobre fração e na resolução dos problemas propostos. Nesse aspecto, verificou-se a importância dos conhecimentos prévios na resolução de problemas, para assim, compor e construir novos conhecimentos matemáticos.

Cabe ressaltar que a exposição do ponto de vista e a resolução do problema pelos estudantes foram características desenvolvidas ao longo da aplicação.

Quanto ao envolvimento e aceitação dos estudantes em relação à proposta, mostraram-se bem interessados do início ao fim da realização das atividades; apesar de que apenas duas atividades terem sido analisadas nesta pesquisa, todo a sequência didática (de seis atividades) foi realizada pelos estudantes.

A resolução dessas atividades proporcionou aos grupos pesquisados o papel de investigadores, colocando-os a tarefa de construir os conceitos e características referentes à fração.

Os estudantes tiveram mais interesse em resolver a atividade 2, pois sentiram-se mais desafiados para obter a solução, e os contextos eram “da própria matemática” e não do cotidiano, uma vez que o nível de complexidade dos problemas foi, consideravelmente, ampliado e fazendo com que eles debatessem e discutissem mais sobre as ideias.

Outro aspecto relevante foi que ocorreu um desenvolvimento de um trabalho colaborativo, os estudantes trabalhavam em grupos, discutiam e analisavam os problemas, sendo respeitado o distanciamento entre os estudantes.

Com relação às dificuldades encontradas na aplicação desta proposta, foi no início que os grupos tiveram fragilidade em discutir e analisar nos pequenos grupos, pois os estudantes não estavam habituados com esta abordagem de ensino e costumavam solicitar o acompanhamento da professora em muitas situações.

Outra dificuldade em relação ao tempo necessário para execução dos problemas, deu-se devido o momento pandêmico, este fez com que a prática pudesse acontecer apenas em março e abril de 2021, por isso decidiu-se limitar a análise, apesar da aplicação ter sido realizada na íntegra.

A partir do referencial teórico, elaborou-se um Produto Educacional composto com 6 atividades, proporcionando a construção de conceito e características em relação à fração através da Resolução de Problemas.

Portanto, a metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas proporcionou uma aprendizagem com compreensão de Matemática sob frações, percebendo que eles podem fazer Matemática.

Nos trabalhos futuros, as outras atividades podem ser examinadas, pode-se, também, ampliar o contexto desta pesquisa analisando a validade dessa sequência didática e do material construído na formação inicial ou continuada de professores que ensinam matemática. Além disso, cabe ampliar a construção da sequência didática abordando multiplicação e divisão de frações, bem como as relações com números decimais e porcentagem.

Por fim, considera-se que a pesquisa realizada permitiu que as ações da professora efetivassem uma prática baseada na metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, trazendo problemas interessantes, acreditando nos estudantes, não apontando erros e, sim, fazendo desse equívoco uma oportunidade, questionando-os para refletirem sobre suas decisões e fazendo um trabalho colaborativo.

O professor que tem essas ações, jamais voltará apenas a ensinar da forma dita ‘tradicional’, pois com a metodologia de ensino Resolução de Problemas você vê o estudante dando significado, tendo interesse e fazendo sentindo para ele. E é com este sentimento que, eu, Suelen, encerro esta trajetória.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o computador à Resolução de Problemas fechados:** Análise de uma experiência. 2005. 378 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005. Disponível em:https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/102164/allevato_nsg_dr_rcla.pdf?sequenc e=1&isAllowed=y. Acesso em: 18 mai. 2019.

ALLEVATO, N. S. G. Trabalhar através da Resolução de Problemas: Possibilidades em dois diferentes contextos. **VIDYA EDUCAÇÃO**, Santa Maria, v. 34, n. 1, p.209-232, jun. 2014

ALLEVATO, N. S. G.; FERREIRA, R. B. **Leitura e escrita na aprendizagem matemática através da resolução de problemas**. *In*: Leituras e escritas na educação matemática. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando Matemática na sala de aula através da Resolução de Problemas. **Boletim GEPEM,** Rio de Janeiro, v. 55, p. 1-19, dez. 2009.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? *In*: ONUCHIC, Lourdes de La Rosa *et al.* (Org.). **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35-52.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. As conexões trabalhadas através da Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática. **REnCiMa**, São Paulo, v. 10, p. 01-14, 2019.

ALLEVATO, N. VIEIRA, G**. Do ensino através da resolução de problemas abertos às investigações matemáticas: possibilidades para a aprendizagem**. Quadrante, v. XXV, N° 1, 2016.

BEHR, M.J.; LESH, R.; POST. T.R; SILVER, E.A. Rational number concepts**.** In: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.), **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press: Nova York, 1983, p. 91-126.

BEZERRA, F. J. B. **Introdução do conceito de número fracionário e de suas representações: uma abordagem criativa para a sala de aula**. 2001. 220 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001. Disponível: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/18487. Acesso em: 05 janeiro 2021.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini**. São Paulo: Moderna, 2015. 6º ano Manual do professor.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação.** Porto: Porto Editora, 1994. 336 p.

BRITO, A. F. **Os logaritmos no material do apoio ao currículo do Estado de São Paulo, à Luz da Resolução de Problemas**. Dissertação (Mestrado de Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2017.

BUTTS, T. Formulando Problemas Adequadamente. *In*: KRULIK, S.; REYS, R.E. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. São Paulo: Atual, 1997, p.32-48.

CAI, J.; LESTER, F. Porque o ensino com resolução de problemas é importante para a aprendizagem do aluno? **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 60, p. 147-162, jan./jun. 2012. Tradução: BASTOS, A. S. A. M; ALLEVATO, N. S. G.

CALLAHAN, L.G.; HIEBERT, J. Decimal Fractions. **The Arithmetic Teacher**, 1987, p. 22-23.

CLEMENT, L.; TERRAZZAN, E. A. Atividades Didáticas de Resolução de Problemas e o Ensino de Conteúdos Procedimentais. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias,** Buenos Aires, v. 6, n. 1, p.87-101, jul. 2011.

COMMON CORE STATE STANDARDS INITIATIVE. **Common Core State Standards for Mathematics.** [s. l.] [s.d.] Disponível em: http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf. Acesso em: 01 dez. 2020.

CRUZ, M. S. S. **Resolvendo adição de frações através de estimativas**. 2003. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2003. Disponível: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/8752. Acesso em: 05 janeiro 2021.

DANTE, L. R. **Teláris matemática**, 6º ano: ensino fundamental, anos finais. Manual do Professor, 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

EMPSON, S. B. Organizando Diversidade no Pensamento de Fração Inicial. Em LITWILLER, B.; BRIGHT, G. (Eds.), **Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions**, Yearbook, NCTM, 2002, p. 29-40.

FAZIO, L.; SIEGLER, R. **Educational practices series: teaching fractions**. Athens: International Bureau of Education, 2011.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia** - saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 2003

GAY, G.; SILVA, W. R. **Araribá mais: Matemática**, 6º ano: ensino fundamental, anos finais. Manual do Professor, 1. ed. São Paulo: Moderna, 2018.

HUINKER, D. Examining dimensions of fractions operation sense. *In*: LITWILLER, B.; BRIGHT, G. (Eds.), **Making sense of fractions, ratios, and proportions**, Yearbook, NCTM, 2002. p. 72-78

KAUARK, F. S.; MANHÃES, F. C.; MEDEIROS, C. H. **Metodologia da Pesquisa:** Um guia prático. Itabuna: Via Litterarum, 2010. p. 1-88.

LAMON, S. J. Rational Numbers and Proportional Reasoning: Toward a Theoretical Framework for Research. In: LESTER Jr., F. K. (Ed.). **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**: a project of the national council of teachers of mathematics. NTCM, 2007. p. 629-668

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers**. 2 ed. Industrial Avenue Mahwah, New Jersey, 2008.

LAPPAN, G.; PHILLIPS, E. Teaching and learning in the Connected Mathematics Project. *In*: L. Leutzinger (Ed.), **Mathematics in the middle. Reston**, Va.: National Council of Teachers of Mathematics. p. 83-92. 1998.

LEAL JUNIOR, L. C.; ONUCHIC, L. R. Ensaios sobre compreensões em matemática em perspectiva de Resoluções de Problemas: Uma análise percussiva de atividades ao zapeamento. **HIPÁTIA**, São Paulo, n. 2, p. 230-249, dez. 2019.

LESTER JR, F. K. **Mathematical Problem Solving Project Technical Report I**: Documents Related to a Problem-Solving Model. Part B: Mathematical Problem Solving in the Elementary School-Some Educational and Psychological Considerations. Final Report. Bloomington: Indiana University, 1977. Disponível em: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED168834.pdf. Acesso em: 01 jun. 2021.

MACK, N. K. **Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge**. Journal for Research in Mathematics Education, v. 26, p. 422-441, 1995.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. A fração nas perspectivas do Professor e do Aluno dos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental. **Bolema**, Rio Claro, n. 31, p. 23-40, 2008.

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental**. 2005. 238 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005. Disponível: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11111. Acesso em: 05 janeiro 2021.

MOUTINHO, L. V. **Fração e seus diferentes significados: um estudo com alunos das 4ª e 8ª séries do ensino fundamental**. 2005. 218 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005. Disponível: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11112. Acesso em: 05 janeiro 2021.

MORAIS, E. C. **Ensinar-aprender frações em um curso de formação continuada para professores dos anos iniciais do ensino fundamental: conhecimentos e dificuldades evidenciadas**. 2010. 120 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Belém, 2010. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Disponível: http://repositorio.ufpa.br/jspui/handle/2011/2676. Acesso em: 05 janeiro 2021.

NCTM. **An Agenda for Action:** Recommendations for School Mathematics of the 1980s. 1980. Disponível em: http://www.nctm.org/flipbooks/standards/agendaforaction/index.html. Acesso em: 15 abril 2020.

NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics.** Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

NÓBREGA-THERRIEN, S. M.; THERRIEN, J. Trabalhos Científicos e o Estado da Questão: reflexões teórico-metodológicas. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, n. 30, p. 05-16, 2004.

ONUCHIC, L. R**. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. *In*: BICUDO, M.A.V (Org.) PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONCEPÇÕES E PERSPECTIVAS. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, L. R. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos? **Revista Espaço Pedagógico**, Passo Fundo, n. 1, p. 88-104, 2013.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática,** Rio Claro, v. 25, n. 41, p.73-98, dez. 2011. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/72994/2-s2.0-84873689803.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 28 abr. 2019.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. As diferentes "Personalidades" do Número Racional trabalhadas através da Resolução de Problemas. **Boletim de Educação Matemática,** Rio Claro, v. 21, n. 31, p.79-108, 2008.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**; tradução /de/ Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro, Interciência, 1978. 196p. 31 ilust. Do original em inglês: How to solve it.

POLYA, G. **Mathematical Discovery**: on Understanding, Learning and Teaching Problem Solving. (Combined ed.). New York: John Wiley & Sons, 1981.

POLYA, G. O Ensino por meio de Problemas. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, SBM, n. 7, p. 11-16, 1985.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo.

SANTOS, A. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental**. 2005. 203 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005. Disponível: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11116. Acesso em: 05 janeiro 2021.

SANTOS, P. C. A. **USO DO MATERIAL CONCRETO: UM FATOR FACILITADOR DA ENSINAGEM DE FRAÇÕES COM ALUNOS DE 5ª SÉRIE**. 2010. 71 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Franciscana, Santa Maria, 2010. Disponível: http://www.tede.universidadefranciscana.edu.br:8080/handle/UFN-BDTD/437. Acesso em: 05 janeiro 2021.

SANTOS, C. O. **O movimento conceitual de fração a partir dos fundamentos da lógica dialética para o modo de organização do ensino**. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2017. Disponível: http://www.riuni.unisul.br/handle/12345/2071. Acesso em: 05 janeiro 2021.

SCHOENFELD, A. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *In*: GROUWS, D. A (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, 1992. p. 334 – 370.

SCHULZ, M. A. **Números racionais e suas representações com base no ensino híbrido**. 2017. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Regional de Blumenau, 2017. Disponível: http://www.bc.furb.br/docs/DS/2017/362609_2_1.pdf. Acesso em: 05 janeiro 2021.

SIEGLER, R. *et al*. **Developing Effective Fractions Instruction for Kindergarten Through 8th Grade**. Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, 2010. Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education.

SILVA, A. J. O. **APRENDIZAGEM DO CONCEITO FRAÇÃO: UM EXPERIMENTO DE ENSINO BASEADO NA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL**. 2018. 261 fl. Dissertação (Programa de Pós-Graduação STRICTO SENSU em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia-GO, 2018. Disponível: http://tede2.pucgoias.edu.br:8080/handle/tede/4065. Acesso em: 05 janeiro 2021.

SILVA, V. G.; ALMEIDA, P. C. A.; GATTI, B. A. Referentes e critérios para a ação docente. **Caderno de Pesquisa**, São Paulo, v. 46, n. 160, p.286-311, jun. 2016. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/cp/v46n160/1980-5314-cp-46-160-00286.pdf. Acesso em: 10 jul. 2019

SMITH, J. P. The Development of Students' Knowledge of Fractions and Ratios. *In*: LITWILLER, B.; BRIGHT, G. (org). **Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions**. Yearbook (National Council of Teachers of Mathematics), 2002. p. 3-17

STEIN, S. S.; POSSAMAI, J. P. **Aprendizagem de frações por meio da Resolução de Problemas**. 2021. Produto Educacional (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Regional de Blumenau Centro de Ciências Exatas e Naturais, Santa Catarina, 2021. 92 p.

STEWART, V. **Making Sense of Students' Understanding of Fractions: An Exploratory Study of Sixth Graders' Construction of Fraction Concepts Through the Use of Physical Referents and Real World Representations**. 2005. Dissertation (the Department of Middle and Secondary Education in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy) – Florida State University, 2005. Disponível em: https://diginole.lib.fsu.edu/islandora/object/fsu:168517/datastream/PDF/view. Acesso em: 07 jun. 2021.

TRIPP, D. Pesquisa-ação: uma introdução metodológica. **Educação e pesquisa**, v. 31, n. 3, p. 443-466, 2005. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/ep/v31n3/a09v31n3.pdf. Acesso em: 15 abril 2019.

VALLILO, S. A. M. **A LINGUAGEM MATEMÁTICA NO ESTUDO DE NÚMERO RACIONAIS: UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), São Paulo, 2018. Disponível: http://hdl.handle.net/11449/154226. Acesso em: 05 janeiro 2021.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino Fundamental:** Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. Tradução: Paulo Henrique Colonese.

VAN DE WALLE, J. A; BAY-WILLIAMS, J. M; KARP, K. S., LOVIN, L. **Teaching Student-Centered Mathematics:** Developmentally Appropriate Instruction for Grades 6–8. 2 ed. Pearson, 2014. p. 104-142. 3 v.

VASCONCELOS, I. C. P. **Números fracionários: a construção dos diferentes significados por alunos de 4ª a 8ª series de uma escola do ensino fundamental**. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007. Disponível: http://hdl.handle.net/10183/13739. Acesso em: 05 janeiro 2021.

WEINBERG, S. L.; KRULIK, S.; RUDNICK, J. A. **Roads to Reasoning:** Developing Thinking Skills Through Problem Solving. Chicago, 2002.