UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA
LUCIANE CORRÊA DO NASCIMENTO ISIDORO

MODO DE ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE FRAÇÃO: O CONHECIMENTO REVELADO POR ACADÊMICAS DE PEDAGOGIA

Tubarão
2019

LUCIANE CORRÊA DO NASCIMENTO ISIDORO

MODO DE ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE FRAÇÃO: O CONHECIMENTO REVELADO POR ACADÊMICAS DE PEDAGOGIA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Educação da Universidade do Sul de Santa Catarina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação.

Orientadora: Prof.ª Josélia Euzébio da Rosa, Dr.ª

Tubarão

2019

LUCIANE CORRÊA DO NASCIMENTO ISIDORO

MODO DE ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE FRAÇÃO: O CONHECIMENTO REVELADO POR ACADÊMICAS DE PEDAGOGIA

Esta dissertação foi julgada adequada à obtenção do título de Mestre em Educação e aprovada em sua forma final pelo curso de Mestrado em Educação da Universidade do Sul de Santa Catarina.

Tubarão, 12 de fevereiro de 2019.

____

Prof.ª e orientadora Josélia Euzébio da Rosa, Dr.ª
Universidade do Sul de Santa Catarina

____

Prof.ª Marta Sueli de Faria Sforni, Dr.ª
Universidade Estadual de Maringá

____

Prof. Ademir Damazio, Dr.
Universidade do Extremo Sul Catarinense

____

Prof.ª Yalin Brizola Yared, Dr.ª
Universidade do Sul de Santa Catarina

Ao meu esposo, **Marcio**, agradeço sua compreensão, paciência e amor.

Ao meu primogênito **Márlon**, e sua esposa **Karol**, pelo carinho e apoio em todos os momentos dessa caminhada.

Ao neto **Miguel**, que embora não tenha conhecimento disso, iluminou de modo especial os meus pensamentos, motivando-me a buscar mais conhecimentos.

Em especial ao meu caçula **Eduardo**, por ser meu companheiro de todas as horas. E, além disso, foi parceiro em meus desabafos e angústias, não apenas como ouvinte, ao contrário, sempre apresentava uma palavra de conforto que me fazia refletir sobre cada situação. Dudu, agradeço o companheirismo, carinho e compreensão!

E, finalmente, a **Hanna**, minha companheirinha de madrugadas.

AGRADECIMENTOS

Ninguém vence sozinho...

Agradeço a **Deus**, pela dádiva da vida. Obrigada por me permitir errar, aprender e crescer.

A todos que de algum modo participaram deste momento.

À minha orientadora, professora Dr.ª **Josélia Euzébio da Rosa**, por quem tenho profunda admiração. “Pessoa” que, ao longo desta caminhada, orientou-me com compreensão, paciência, inteligência, dedicação e sabedoria. Sou grata por acreditar em mim, até mesmo quando nem eu acreditava, pelos tantos elogios e incentivos. Por proporcionar inúmeros momentos de estudos e conversas descontraídas, que foram fundamentais para meu crescimento. Você foi e está sendo mais que orientadora: para mim sempre será MESTRE e AMIGA.

Aos membros da banca examinadora, Prof. Dr. Ademir Damazio, Prof.ª Dr.ª Marta Sueli de Faria Sforni e Prof.ª Dr.ª Yalin Brizola Yared, que gentilmente compartilharam suas reflexões, contribuindo no desenvolvimento desta pesquisa.

Aos professores, colegas e funcionários da Unisul, por contribuírem na constituição da minha pesquisa. Em especial aos colegas de Mestrado: Aline, Ediane, Laercio, Douglas, Fernando, Jacque, Ingryd, Rafael, Silvia, Dai e Mari, pelas conversas descontraídas e por contribuírem em diversos momentos de minha formação. À secretária do PPGE, Daniela, pela atenção, agilidade e competência no desempenho de sua função.

Às acadêmicas do curso de Pedagogia que participaram do experimento didático-formativo. Sem vocês esta pesquisa não seria possível.

Aos colegas da unidade de relacionamento catarinense do GEPAPe (GPEMAHC/TEDMAT), pelas contribuições e discussões teóricas realizadas durante toda a investigação.

Ao Programa de Bolsas Universitárias de Santa Catarina UNIEDU/Pós-Graduação, pela bolsa concedida para a realização desta pesquisa.

Ao Colégio Dehon, pelo auxílio financeiro; ao diretor Matiolla e à coordenadora Clésia, por me possibilitarem o desenvolvimento da pesquisa; aos professores e colegas que de algum modo contribuíram com a pesquisa. Em especial, às professoras do 4º Ano: Dri, Dai, Fabi e Raquel, por gentilmente me ampararem nos momentos em que mais precisei.

À Escola Municipal João Batista da Silva, à diretora Claudiana, pela sensibilidade em compreender minha necessidade de ausência na escola.

Ao Gabriel e ao Alessandro, por dividirem comigo a mãe e esposa maravilhosa, até mesmo nos finais de semana, momento que ela tem para se dedicar a vocês. (Perdão)

A Mari, pelas disciplinas, apresentações e reflexões realizadas em conjunto e, principalmente, pela preocupação e apoio constantes. Seus conhecimentos e dedicação foram fundamentais para o desenvolvimento de minha dissertação. Obrigada pelo convívio, amizade e generosidade. MARILU, parceria que deu certo!

À minha sempre amiga Carminha, por ter sido minha incentivadora e acreditar em meu potencial. Suas marcas de competência, dedicação e respeito ficarão para sempre em meu coração.

A minha família, em especial as minhas irmãs Lucimar e Rosiane, sempre prontas a me apoiar em tudo nesta vida. Aos sobrinhos(as), cunhados, cunhada, sogro Ivaildo e aos meus sogros Décio e Dega, por apoiarem este momento tão importante de minha vida.

A minha mãe Norma e ao meu pai Geraldino deixo um agradecimento especial, por todas as lições de amor, companheirismo, amizade, dedicação, abnegação, compreensão e perdão que vocês me dão a cada novo dia. Sinto-me orgulhosa e privilegiada por ter pais tão amados. Obrigado por permanecerem ao meu lado.

A vocês, queridos, agradeço e divido a alegria desta experiência.

“[...] Acredito que vocês vão escolher o seu próprio caminho, vão encontrar suas próprias respostas para as perguntas que preocupam vocês [...]. Mas exatamente nisso que reside a essência da busca. Cada um contribui com algo novo para essa busca. E gostaria de desejar para todos [...] sucesso nessa busca.” (REPKIN, 2018)

RESUMO

A presente pesquisa surgiu a partir da necessidade de se repensar o modo de organização do processo de ensino e aprendizagem de Matemática no Brasil, que é predominantemente empírico. Tomamos como contexto de investigação o curso de Pedagogia, mais especificamente a disciplina relacionada à Matemática. A referida disciplina se diz fundamentada na Teoria Histórico-Cultural e em dois de seus desdobramentos: Teoria do Ensino Desenvolvimental e Atividade Orientadora de Ensino. O objetivo foi analisar o processo de conhecimento das acadêmicas de um curso de Pedagogia sobre o modo de organização do Ensino Desenvolvimental de fração. Nesta perspectiva, a pesquisa norteou-se pelo seguinte problema: o que revelam as manifestações das acadêmicas de Pedagogia em relação ao conhecimento sobre o modo de organização do Ensino Desenvolvimental de fração? Temos, como hipótese, que as manifestações das acadêmicas revelarão a apropriação de alguns elementos do modo de organização do ensino de conhecimentos teóricos. Para tanto, desenvolvemos um Experimento Didático~~s~~ Desenvolvimental durante um semestre. Diante da impossibilidade de analisar todos os encontros do semestre, tomamos um isolado: o processo de ensino e aprendizagem de fração, sistematizado por cinco episódios, nos quais explicitamos as compreensões iniciais das acadêmicas sobre o conceito de fração, seus movimentos de superação e o estágio final de apreensão. As manifestações indicam que, incialmente, as acadêmicas compreendiam o conceito de fração empiricamente. Durante o desenvolvimento do Experimento Didático Desenvolvimental, as compreensões iniciais foram desestabilizadas. Nesse processo, surgiu a necessidade de outro modo de organização, no qual foram contemplados alguns elementos característicos do pensamento teórico.

Palavras-chave: Educação Matemática. Ensino Desenvolvimental. Fração. Pedagogia. Conhecimento.

ABSTRACT

This research has arisen from the need to rethink the way of organization of the teaching and learning process of Mathematics in Brazil, which is predominantly empirical. We take as context of investigation the Bachelor of Education, more specifically the subject related to Mathematics. The referred subject is said based on the Historic-Cultural Theory and in two of its further exchanges: Theory of Developmental Teaching and Guiding Teaching Activity. The objective has been to analyze the process of knowledge of the undergraduates of a Bachelor of Education on the way of organization of the Developmental Teaching of fraction. In this perspective, the research has been guided by the following problem: what do the manifestations of the Bachelor of Education undergraduates reveal regarding the knowledge about the way of organization of the Developmental Teaching of fraction? We have, as hypothesis, that the manifestations of the undergraduates will reveal the appropriation of some elements of the way of organization of the teaching of theoretical knowledge. To do so, we have developed a Developmental Didactic Experiment during one semester. Before the impossibility of analyzing all the meetings of the semester, we took an isolate: the teaching and learning process of fraction, systematized by five episodes, in which we have made explicit the undergraduates' initial understandings about the concept of fraction, their overcoming movements and the final stage of comprehension. The manifestations indicate that, initially, the undergraduates understood the concept of fraction empirically. During the development of the Developmental Didactic Experiment, the initial understandings have been destabilized. In this process, the need of another way of organization has arisen, in which some characteristic elements of theoretical thought have been considered.

Key words: Mathematics Education. Developmental Teaching. Fraction. Bachelor of Education. Knowledge.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Subdivisão da unidade de medida 32
Figura 2 – Resultado da comparação de A em relação a E 34
Figura 3 – Medição de B com a unidade de medida E 36
Figura 4 – Representação na reta numérica do *flash* 9 39
Figura 5 – Representação geométrica 40
Figura 6 – Medição de lados e perímetros de pentágonos regulares (Tarefa 2) 41
Figura 7 – Quantas vezes a unidade de medida E se repete no perímetro de medida A? 42
Figura 8 – Síntese dos *flashes* anteriores 43
Figura 9 – Medição do lado (medida C) do pentágono maior com a unidade E 45
Figura 10 – Medida intermediária 47
Figura 11 – Medição do perímetro do pentágono T 49
Figura 12 – Quantas vezes a unidade de medida E se repete no lado do pentágono (C) cujo perímetro mede T? 50
Figura 13 – Subdivisão do comprimento da medida E 51
Figura 14 – Representação da reta numérica 54
Figura 15 – Quantidade de vezes a medida C coube no pentágono de perímetro T 55
Figura 16 – Unidade de medida E 57
Figura 17 – Localização das frações na medida com comprimento E 59
Figura 18 – Localização de $\frac{13}{7}$ na reta numérica 61
Figura 19 – História Virtual Cordasmil (Tarefa 5) 63
Figura 20 – Concreto ponto de partida 70
Figura 21 – Resolução por meio de elementos geométricos, algébricos e aritméticos 71
Figura 22 – Relações presentes no modelo 72
Figura 23 – Proposição de Patrícia no primeiro dia de aula 76
Figura 24 – Proposição de Patrícia sobre representação de fração 78
Figura 25 – Proposição de Patrícia no último dia de aula 83
Figura 26 – Proposição inicial de Patrícia do contexto geométrico 88
Figura 27 – Modelação proposta por Patrícia 89
Figura 28 – Proposição da significação de cada letra no contexto da História Virtual Cordasmil 89
Figura 29 – Proposição da representação dos números fracionários na reta numérica 90

Figura 30 – Representação da unidade de medida básica e intermediária 91
Figura 31 – Resolução aritmética com base no modelo literal... 92

LISTA DE FOTOGRAFIAS

Fotografia 1 – Material para o experimento objetal 64
Fotografia 2 – Medição do terreno 65
Fotografia 3 – Reflexão da acadêmica Bruna sobre dois terços.. 65
Fotografia 4 – Representação da acadêmica Bruna.. 66
Fotografia 5 – Representação da acadêmica Bruna na reta numérica 66
Fotografia 6 – Explicação de Anna Carolina a partir de elementos geométricos, algébricos e aritméticos?.. 67
Fotografia 7 – Inclusão das unidades de medida intermediárias, por Bruna, na reta 67
Fotografia 8 – Subdivisão da unidade em duas partes por Silvia e Ana Paula......................... 68
Fotografia 9 – Caderno de tarefas: conceito de fração 73

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Cronograma de captação de dados no contexto do semestre letivo 23
Quadro 2 – Instrumento avaliativo proposto no primeiro e no último encontro 26
Quadro 3 – Tarefas, episódios e cenas da pesquisa 31
Quadro 4 – Síntese das compreensões iniciais e finais das acadêmicas 96

LISTA DE SIGLAS

GEPAPe – Grupo de Estudos e Pesquisa sobre a Atividade Pedagógica

GPEMAH – Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: Uma abordagem Histórico-Cultural

TedMat – Teoria do Ensino Desenvolvimental na Educação Matemática

UNESC – Universidade do Extremo Sul Catarinense

UNISUL – Universidade do Sul de Santa Catarina

USP – Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 17
2 O PROCESSO PERCORRIDO COM AS ACADÊMICAS 30
2.1 EPISÓDIO 1 – NECESSIDADE DE SUBDIVISÃO DA UNIDADE DE MEDIDA 32
2.1.1 Cena 1 – Medição do segmento com medida A (Tarefa 1) 33
2.1.2 Cena 2 – Medição do segmento com medida B (Tarefa 2) 35
2.1.3 Cena 3 – Contexto geométrico (Tarefa 1) 39
2.2 EPISÓDIO 2 – MEDIÇÃO DE DOIS COMPRIMENTOS NA QUAL UM É TOMADO COMO UNIDADE DE MEDIDA DO OUTRO 41
2.2.1 Cena 1 – Medição do perímetro de medida A (Tarefa 2, item *a*, etapa I) 42
2.2.2 Cena 2 – Medição do lado (medida C) do pentágono com perímetro de medida T (Tarefa 2, item *a*, etapa II) 44
2.2.3 Cena 3 – Medição do perímetro do pentágono de medida T (Tarefa 2, item *a*, etapa III) 47
2.2.4 Cena 4 – Medição com a unidade de medida intermediária menor que a grandeza a ser medida (Tarefa 2, item *b*, etapa I) 50
2.2.5 Cena 5 – Medição do perímetro do pentágono de medida T (Tarefa 2, item *b*, etapa II) 53
2.3 EPISÓDIO 3 – CONSTRUÇÃO DO COMPRIMENTO COM MEDIDA C A PARTIR DA UNIDADE E: $C = \frac{5}{7}$E (TAREFA 3) 57
2.3.1 Cena 1 – Construção de um segmento de reta com base na relação entre um valor aritmético e uma unidade de medida (Tarefa 3) 58
2.4 EPISÓDIO 4 – CONSTRUÇÃO DA RETA NUMÉRICA E LOCALIZAÇÃO DO PONTO CORRESPONDENTE A $\frac{13}{7}$ (TAREFA 4) 60
2.4.1 Cena 1 – Relação de igualdade e desigualdade entre números fracionários na reta numérica (Tarefa 4) 60
2.4 EPISÓDIO 5 – SITUAÇÃO DESENCADEADORA DE APRENDIZAGEM – HISTÓRIA VIRTUAL CORDASMIL (TAREFA 5) 63
2.5.1 Cena 1 – Movimento de síntese das reflexões anteriores 64
3 PENSAMENTO EMPÍRICO E TEÓRICO – MOVIMENTO DE TRANSIÇÃO E SUPERAÇÃO 74
3.1 CONHECIMENTO EMPÍRICO 75

3.2 CONHECIMENTO TEÓRICO 82
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS 95
REFERÊNCIAS 101
ANEXO 105
ANEXO A – Termo de Livre Consentimento 106

Carta ao leitor (a)

Imagine que você foi convidado (a) para lecionar em uma turma de quinto ano de uma escola da Rede Estadual de Educação de Santa Catarina, a partir de amanhã. Durante todo o período vespertino, você deverá ensinar fração.

É importante ressaltar que o professor anterior ainda não abordou esses conceitos.

Você tem que planejar essas aulas e enviar, agora, o plano de ensino ao diretor da escola com ações detalhadas (explicações, experimentos, reflexões, exercícios, atividades) para cinco aulas sobre fração.

Além disso, você não tem tempo disponível para pesquisar sobre o assunto. Portanto, o plano de ensino terá que ser elaborado a partir do que você já sabe sobre fração.

Como você faria esse plano de ensino? Sugerimos que você o faça antes de iniciar a leitura da presente dissertação. Ao final do texto voltaremos a conversar com você sobre esse seu plano de ensino.

Destacamos que será muito importante essa elaboração antes do início da leitura da dissertação para que a leitura se constitua em uma tarefa de estudo, a partir de um problema desencadeador.

1 INTRODUÇÃO

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), a atual sociedade exige um olhar inovador e inclusivo, voltado às questões do aprender. Esse cenário requer a necessidade de reconhecer-se histórica e culturalmente. Para além do acúmulo de informações, faz-se necessário o desenvolvimento de capacidades que possibilitem o avanço no processo de aprendizagem. Compreender que os estudantes, como também os professores, necessitam

> aprender a aprender, saber lidar com a informação cada vez mais disponível, atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais, aplicar conhecimentos para resolver problemas, ter autonomia para tomar decisões, ser proativo para identificar os dados de uma situação e buscar soluções, conviver e aprender com as diferenças e as diversidades (BRASIL, 2017, p. 14).

Para o documento em referência, o conhecimento matemático é indispensável a todos, seja por sua aplicação no contexto contemporâneo ou por seu emprego na formação crítica dos cidadãos. Nesse sentido, possibilitará, aos estudantes, identificar que esses conhecimentos são essenciais para o "desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição)" (BRASIL, 2017, p. 264).

Não há, na Base Nacional Comum Curricular, a opção por uma determinada corrente epistemológica. Diferentemente do que ocorre nos documentos oficiais de Santa Catarina, desde 1991, a Secretaria Estadual de Educação catarinense adota a Teoria Histórico-Cultural. Nessa perspectiva, não basta a formação crítica, tal como propõe a Base. Esta precisa ser em nível teórico.

Em Santa Catarina, alguns professores recorrem aos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural para organizar o ensino. Contudo, como quase não há material para subsidiar esse trabalho, a maioria deles acaba por organizar o ensino com base em proposições divergentes à proposta teórica. De acordo com esse referencial, a escolarização tem por finalidade o desenvolvimento teórico, caso contrário os conteúdos são empíricos e, indissoluvelmente, o método também (HOBOLD, 2014; GALDINO, 2016).

O teor empírico gera obstáculos no desenvolvimento do pensamento teórico contemporâneo, tal como sugere a proposta curricular catarinense, apoiada em Davýdov (1982) e Davídov (1988).

> O pensamento teórico, conforme desenvolvido por Davídov (1988), se constitui em uma forma específica do pensamento humano, cujo desenvolvimento exige o

> envolvimento do sujeito em determinado tipo de atividade – a atividade de estudo, a ser realizada sob a orientação das ações e operações vinculadas à instrução, ao ensino e à educação promovidos pela escola. Nos processos educativos viabilizados pela escola, há que se considerar também a importância e a contribuição de outras formas de jogos e brincadeiras, por constituírem importantes estratégias metodológicas a serem utilizadas em diferentes momentos do percurso formativo dos sujeitos (SANTA CATARINA, 2014, p. 39).

Eu, como professora, estou inserida nesse contexto repleto por proposições que não articulam os conhecimentos com vistas ao desenvolvimento do pensamento teórico. Atuo no Ensino Fundamental há 15 anos, atualmente com vinte horas na rede de ensino particular e vinte horas na rede de ensino pública. Durante este tempo, ao ensinar fração, parecia-me que o modo de ensino, através do qual minhas aulas eram organizadas, era insuficiente para que os estudantes realmente aprendessem. Por mais que buscasse metodologias diferenciadas, eles não se apropriavam do conceito.

Ao levar para a sala de aula elementos que possibilitassem a subdivisão do inteiro em partes iguais, como bolo e chocolate, por exemplo, percebia que muitas vezes esses alimentos mais chamavam a atenção dos estudantes do que os conceitos matemáticos. Afinal, sabiam que após realizarem a divisão receberiam parte dele para comerem. Por mais importante que eu considerasse aquela subdivisão, ela não desempenhava seu papel principal: revelar a essência do conceito de fração para os estudantes. Na busca por metodologias, situações e contextos para ensinar esse conceito, sempre me deparei com o dilema de encontrar propostas de ensino que possibilitassem romper a barreira gerada pela organização do ensino tradicional, desenvolvido atualmente em nosso país, no qual prevalecem conteúdos e métodos empíricos (ROSA, 2012).

Mas, se quase não há proposições disponíveis para subsidiar o professor, ao planejar suas aulas, essa realidade tende a ser perpetuada e, portanto, necessário se faz repensar, também, a formação de professores (MATOS, 2017). Neste sentido, propusemo-nos[1] como desafio, no contexto de grupos de pesquisa, refletir sobre o processo de ensino e aprendizagem das acadêmicas matriculadas na disciplina *Fundamentos e Metodologias de Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental* do curso de Pedagogia da Universidade do Sul de Santa Catarina (UNISUL).

---

[1] Ao adotar a primeira pessoa do singular, refiro-me à minha caminhada. Porém, durante o desenvolvimento de uma investigação científica, não trilhamos individualmente e, então, escreveremos na primeira pessoa do plural, uma vez que esta foi desenvolvida no contexto coletivo de três grupos de pesquisa, que realizam suas reflexões organicamente articulados: Grupo de Estudos e Pesquisas sobre a Atividade Pedagógica (GEPAPe –USP), Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural (GEPMAHC - UNESC) e Teoria do Ensino Desenvolvimental na Educação Matemática (TedMat – UNISUL).

O curso de Pedagogia foi criado com a finalidade de melhorar o desenvolvimento da Educação Básica no Brasil. Seu objetivo é formar profissionais conscientes e capazes de exercer a docência na Educação Infantil, nos anos iniciais do Ensino Fundamental e, também, em disciplinas pedagógicas do Ensino Médio, Gestão Escolar com Planejamentos e Avaliação dos Sistemas Educacionais, Educação de Jovens e Adultos, Educação Indígena e outras (BRASIL, 2013). Além disso, é um campo científico que visa a oportunizar a formação de profissionais reflexivos e investigadores da educação e dos métodos de ensinar e aprender (BRASIL, 2013). O curso de Pedagogia constitui-se um campo fértil de investigação por sua natureza articuladora da teoria com a prática com vistas à formação humana, e tem como seu principal objeto a educação escolar.

Foi no contexto de um curso de Pedagogia que desenvolvemos um Experimento Didático Desenvolvimental, neste sentido, buscamos, diferentemente o experimento didático tradicional (empírico), desenvolver em caráter investigativo, a partir da proposição davydoviana o ensino do conceito de fração.

> Na proposição davydoviana, a fração surge diante do problema de medição que se manifesta na relação em que a unidade não cabe quantidade de vezes inteira na grandeza a ser medida. Tal impossibilidade gera a necessidade de um novo método de medição, a ser modelado e apropriado pelos estudantes [...] (FREITAS, 2016, p. 9).

Com base na necessidade de medição, historicamente vivenciada pela humanidade, em que a unidade de medida não cabia um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida, organizamos o Experimento Didático Desenvolvimental com base em Freitas (2016) e Santos (2017). O Experimento Didático Desenvolvimental é uma metodologia de investigação experimental sustentada no método dialético.

> Se caracteriza pela intervenção ativa do pesquisador nos processos psíquicos que ele estuda. Assim, se difere essencialmente do experimento de constatação, que destaca só o estado já formado e presente de uma ou outra estrutura psíquica. A realização do experimento formativo pressupõe a projeção e modelação do conteúdo das novas formações psíquicas a serem constituídas, dos meios psicopedagógicos e das vias de sua formação. Na investigação dos caminhos para realizar este projeto (modelo), no processo do trabalho educativo cognoscitivo com os estudantes, pode-se estudar simultaneamente as condições e as leis de origem, de gênese das novas formações mentais correspondentes. Em nosso ponto de vista, o experimento formativo pode ser chamado de experimento genético-modelador, aquele que forma a unidade entre a investigação do desenvolvimento psíquico dos estudantes, a educação e o ensino (DAVÍDOV, 1988, p. 196, tradução nossa).

Esta metodologia, segundo Davídov (1988), caracteriza-se pela intervenção ativa do pesquisador nos processos mentais que investiga. “Se apoia na organização e reorganização de novos programas de educação e ensino e dos procedimentos para implementá-los” (DAVÍDOV, 1988, p. 196, tradução nossa).

Ao encaminhar esta pesquisa no âmbito da formação universitária de professores, buscamos possíveis respostas que possam subsidiar reflexões, sobre o processo de conhecimento das acadêmicas, no que se refere ao modo de organização de ensino, que visa a ações que possibilitem o desenvolvimento do pensamento teórico. A disciplina que constitui o contexto de investigação organiza o ensino (Conteúdo e Método) com base na epistemologia que sustenta a Proposta Curricular do Estado de Santa Catarina, e um dos seus objetivos é desenvolver o pensamento teórico por via da apropriação dos conceitos científicos. Trata-se, portanto, de uma investigação sobre o processo de apropriação do modo de organização de ensino do conceito de fração, com base nos fundamentos da Teoria Histórico-Cultural, Teoria do Ensino Desenvolvimental e Atividade Orientadora de Ensino, todas sustentadas na teoria materialista dialética do pensamento.

O materialismo dialético é um método e uma teoria científica que nos permite “conhecer as leis mais gerais da natureza, do homem, da sociedade e do pensamento, conhecimento esse indispensável para transformar as coisas” (BAZARIAN, 1994, p. 70). Mediante a totalidade constituída pelo movimento existente entre a natureza, a humanidade e a sociedade, busca-se perceber as mudanças, possivelmente ocorridas no processo de evolução humana. Neste sentido, o conhecimento é o elemento mediador que possibilita a transformação humana, de acordo com suas necessidades. Por outro lado, o conhecimento surge como produto da necessidade vivenciada historicamente pela humanidade.

> Podemos dizer que cada indivíduo *aprende* a ser um homem. O que a natureza lhe dá quando nasce não lhe basta para viver em sociedade. É lhe ainda preciso adquirir o que foi alcançado no decurso do desenvolvimento histórico da sociedade humana. [...] As gerações humanas morrem e sucedem-se, mas aquilo que criam passa às gerações seguintes que multiplicam e aperfeiçoam pelo trabalho e pela luta as riquezas que lhe foram transmitidas e ‘passam testemunho’ do desenvolvimento da humanidade (LEONTIEV, 1978, p. 267, grifos do autor).

Mas, como ocorre essa transmissão de geração em geração? Como podemos organizar um processo tal que promova a possibilidade de o indivíduo aprender a ser uma pessoa? Toda a riqueza produzida por uma geração é transmitida à geração seguinte? Todos os indivíduos são beneficiados pela riqueza produzida por gerações anteriores? Acreditamos que não. Aqui emerge a necessidade social da presente pesquisa, cuja finalidade é refletir sobre as possibilidades de apropriação, pelos indivíduos, das riquezas produzidas pelas gerações precedentes, porém, em seu estágio mais atual de desenvolvimento.

> A apropriação pelo indivíduo das formas culturais é, a nosso ver, um caminho já traçado de desenvolvimento de sua consciência. Se esta proposição for aceita, a tarefa fundamental da ciência será a de determinar como o conteúdo do desenvolvimento espiritual da humanidade se transforma nas formas de desenvolvimento espiritual e como a apropriação destas formas pelo indivíduo se transforma no conteúdo do desenvolvimento de sua consciência (DAVÍDOV, 1988, p. 61, tradução nossa).

O desenvolvimento da consciência do indivíduo depende da relação com o outro, passa por transformações constantes geradas na realidade individual e social. A realidade não é um acumulado de partes, mas uma totalidade articulada, capaz de gerar mudanças qualitativas e quantitativas na mente humana.

Nesse âmbito, a Teoria Histórico-Cultural – que se apresenta com a finalidade de explicar essa dinamicidade da realidade – é constituída por três gerações de pesquisadores. A primeira geração é de L. S. Vigotski, cuja "denominação usualmente dada à corrente psicológica que explica o desenvolvimento da mente humana com base nos princípios do materialismo dialético" (LIBÂNEO; FREITAS, 2006, p. 1). Desse modo, pode-se afirmar que o funcionamento psicológico fundamenta-se nas relações sociais entre o indivíduo e o mundo exterior. A relação das pessoas com o mundo não é uma relação direta, mas mediada pelos sistemas simbólicos. Estes são elementos intermediários entre o sujeito e o mundo.

> A vida social é um processo dinâmico, onde cada sujeito é ativo e onde acontece a interação entre o mundo cultural e o mundo subjetivo de cada um. Neste sentido, e novamente associado a sua filiação marxista, Vygotsky postula a interação entre vários planos históricos: a história da espécie (filogênese), a história do grupo cultural, a história do organismo individual da espécie (ontogênese) e a sequência singular de processos e experiências vividas por cada indivíduo (OLIVEIRA, 2004, p. 38).

Essas experiências ocorrem por meio de um processo dinâmico presente na interação social, acerca do mundo cultural e subjetivo. Os elementos presentes nela fornecem subsídios para o desenvolvimento psicológico do indivíduo (OLIVEIRA, 2004).

Nesta perspectiva teórica, a educação em geral e o ensino em particular "são formas universais e necessárias do desenvolvimento mental". Os indivíduos, ao terem contato com objetos e fenômenos, transformam-nos e são transformados (LIBÂNEO; FREITAS, 2006, p. 3). A pessoa é produtora de sua história e, deste modo, os estímulos externos, historicamente construídos pela humanidade, interferem no desenvolvimento intelectual e social. Em outras palavras, o indivíduo desenvolve a consciência conforme as determinações do meio em que se insere, imprescindivelmente, na e pela atuação nesse meio (RUBINSTEIN, 1978).

Os pesquisadores que compõem a segunda geração e deram prosseguimento ao trabalho de Vigotski foram Alexander Romanovich Luria (1902-1977) e Alexei Nikolaievich

Leontiev (1904-1977). Ao contemplar o mesmo fundamento filosófico, também, buscaram explicar que as relações sociais dos indivíduos se desenvolvem no processo histórico, pertencente ao meio cultural e ao mundo subjetivo.

Na terceira geração, um dos expoentes foi Vasili Vasilievich Davydov. Este, juntamente com seus seguidores, debruçou-se sobre os desdobramentos da Teoria Histórico-Cultural de Vigotski e da Teoria da Atividade de Leontiev para o ensino, o que resultou na Teoria do Ensino Desenvolvimental. Para Davídov (1988), a apropriação das formas da cultura pelo indivíduo é o caminho já elaborado de desenvolvimento de sua consciência. Consequentemente, a tarefa fundamental da ciência é determinar como o conteúdo do desenvolvimento espiritual da humanidade se transforma em suas formas e como a apropriação dessas formas, pelo indivíduo, se transforma no conteúdo do desenvolvimento de sua consciência.

Na especificidade da educação escolar, do conteúdo derivam as metodologias de ensino, que, quando sustentadas no método materialista histórico-dialético, vão além da mera transmissão. É um ensino capaz de proporcionar aos estudantes a aprendizagem do conhecimento teórico e o desenvolvimento das capacidades e habilidades relacionadas a ele, que possibilita novas aprendizagens de forma independente e autônoma.

A Atividade Orientadora de Ensino, elaborada pelo pesquisador brasileiro Manoel Oriosvaldo de Moura, é um dos desdobramentos da Teoria Histórico-Cultural e da Teoria do Ensino Desenvolvimental.

> A atividade orientadora de ensino tem uma necessidade: ensinar; tem ações: define o modo ou procedimentos de como colocar os conhecimentos em jogo no espaço educativo; e elege instrumentos auxiliares de ensino: os recursos metodológicos adequados a cada objetivo e ação (livro, giz, computador, ábaco etc.). E, por fim, os processos de análise e síntese, ao longo da atividade, são momentos de avaliação permanente para quem ensina e aprende (MOURA, 2001, p. 155).

Essa estrutura permite que os sujeitos interajam, mediados por um conteúdo e pela negociação de significados, com o objetivo de solucionar, coletivamente, uma situação-problema.

Com base neste tripé teórico (Teoria Histórico-Cultural, Teoria do Ensino Desenvolvimental e Atividade Orientadora de Ensino), elaboramos e desenvolvemos com acadêmicas um Experimento Didático Desenvolvimental, a fim de investigar o seguinte problema: o que revelam as manifestações acadêmicas de Pedagogia, em relação ao conhecimento sobre o modo de organização do Ensino Desenvolvimental de fração? Temos, como hipótese, que as manifestações das acadêmicas revelarão a apropriação de alguns elementos do modo de organização do ensino de conhecimentos teóricos. O objetivo foi analisar o processo de conhecimento das acadêmicas de um curso de Pedagogia sobre o modo de organização do Ensino Desenvolvimental de fração. Analisamos as manifestações orais, escritas e gestuais das acadêmicas, durante dois encontros formativos com duração de três horas cada, por meio de conversas individuais e coletivas sobre o processo de ensino e aprendizagem do conceito de fração. O Experimento Didático Desenvolvimental foi realizado durante os 15 encontros que compõem a disciplina *Fundamentos e Metodologias de Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental*. As reflexões específicas sobre o modo de organização do Ensino Desenvolvimental do conceito de fração estavam previstas no cronograma da disciplina para os dois últimos encontros. Desse modo, a captação dos dados de pesquisa (manifestações das acadêmicas) foi realizada em três momentos distintos, conforme o quadro 1.

Quadro 1 – Cronograma de captação de dados no contexto do semestre letivo

1º Encontro	**14º Encontro**	**15º Encontro**
Avaliação das compreensões iniciais.	Desenvolvimento das tarefas 1, 2, 3 e 4.	- Desenvolvimento da tarefa 5. - Avaliação das compreensões finais.

Fonte: Elaboração nossa, 2018.

No decurso da análise dos dados, consideramos o movimento de conhecimento constituído pelo ponto de partida, processo (formação) e o produto (produção final das acadêmicas).

A fim de apresentar os resultados da análise, elaboramos episódios. Estes são constituídos por “frases escritas ou faladas, gestos e ações que constituem cenas que podem revelar interdependência entre os elementos de uma ação formadora” (MOURA, 2004, p. 276).

A coleta de dados foi realizada na disciplina de *Matemática*, desenvolvida durante o segundo semestre de 2017. Diante da impossibilidade de analisar todos os encontros, tomamos um isolado: o processo de ensino e aprendizagem de fração. Registramos as compreensões iniciais das acadêmicas sobre o conceito de fração, as manifestações que expressavam o movimento de superação e o estágio final de apreensão. Consideramos a totalidade na interconexão do universal (modo de organização de ensino desenvolvimental) com o particular (elemento mediador – processo de ensino desenvolvido na turma) e o singular (manifestações de cada acadêmica).

A opção pela análise do processo de apropriação pelas acadêmicas do conceito de fração decorre das fragilidades inerentes aos processos de ensino e aprendizagem desse conceito. Esta complexidade é consequência, de acordo com Moreira (2010), de uma formação docente pautada no ensino tradicional.

Ao organizar um Experimento Didático Desenvolvimental, em caráter investigativo, com vistas à superação de algumas limitações do ensino tradicional, propusemo-nos a analisar o processo de conhecimento das acadêmicas de um curso de Pedagogia sobre o modo de organização do Ensino Desenvolvimental de fração.

Partimos da premissa que

> as mudanças nas formas de aprender afetam as formas de ensinar, em vista da subordinação das práticas de ensino à [...] aprendizagem e às ações do aprender e do pensar. Sendo assim, o que se espera da aprendizagem dos alunos também deverá ser esperado de um programa de formação dos próprios professores (LIBÂNEO, 2004, p. 115).

Nesta perspectiva teórica, espera-se que os estudantes aprendam os conceitos científicos e desenvolvam o pensamento teórico. Para que o Experimento Didático Desenvolvimental, durante a formação inicial, se constituísse em um momento de acesso ao pensamento teórico, organizamos o ensino de modo que vislumbrasse a apropriação dos conhecimentos científicos historicamente produzidos.

> [...] os conceitos científicos se caracterizam por constituírem os elementos essenciais da experiência social, as conquistas das gerações anteriores, na forma de imagens abstratas e generalizadas, que os estudantes assimilam convertendo-as em experiência individual própria e em elementos de seu desenvolvimento intelectual (PUENTES; LONGAREZZI, 2017, p. 205).

Assim, desenvolvemos um experimento que criasse possibilidades de apropriação, por parte das acadêmicas do curso de Pedagogia, dos conhecimentos historicamente produzidos pelas gerações anteriores. Ao mesmo tempo, que possibilitasse, a cada acadêmica, a apropriação de elementos geradores de seu desenvolvimento intelectual individual. De acordo com Gamboa (2012, p. 41), “o conhecimento é o resultado da relação entre um sujeito cognoscente e um objeto a ser conhecido”. O sujeito que aprende é capaz de adquirir conhecimentos que possibilitam mudanças de atitude diante da realidade. Partimos do pressuposto que as acadêmicas são capazes de se apropriarem de conhecimentos que possam interferir na atual sistematização do ensino. Acreditamos que envolvê-las em um processo de aprendizagem, na perspectiva em que irão ensinar, seja substancial para o desenvolvimento do ensino nas escolas em que atuarão, uma vez que a maioria das propostas curriculares da região são fundamentadas na Teoria Histórico-Cultural. Logo,

> [...] se a atividade principal do futuro professor é a de promover a atividade de aprendizagem de seus futuros alunos, nada mais oportuno que o professor aprenda sua profissão na perspectiva em que irá ensinar aos seus alunos. Além disso, sendo correto entender que a base do ensino desenvolvimental é a estrutura psicológica da atividade, com base na qual são criadas tarefas para melhor promover a aprendizagem, será importante estabelecer as características da atividade profissional do professor, de modo que isso se constitua como referência para o currículo (LIBÂNEO, 2004, p. 136).

Ao assumirmos que a base do ensino desenvolvimental é a estrutura psicológica da atividade de estudo, concordamos que nesta, se

> [...] reproduzem o processo real pelo qual os homens criam os conceitos [...]. Por isso, o ensino escolar de todas as disciplinas deve estruturar-se de modo que, em forma concisa, abreviada, reproduza o processo histórico real de generalização e desenvolvimento dos conhecimentos (DAVÍDOV, 1988, p. 174, tradução nossa).

O pressuposto é que as tarefas desenvolvidas com as acadêmicas de Pedagogia viabilizaram a generalização e o desenvolvimento do conhecimento teórico. De acordo com Libâneo (2004), uma proposta de ensino e aprendizagem para futuros professores requer pensar no potencial a ser desenvolvido em cada tarefa e sua relevância no processo de aprendizagem, a fim de trazer, para o reflexo consciente[2], as compreensões teóricas desenvolvidas. Por isso, é importante considerar tanto o conteúdo quanto o método de ensino.

> Um importante componente da disciplina é o método de seu ensino, que é determinado pelo conteúdo e o programa da disciplina. Por exemplo, se o conteúdo está estruturado conforme o princípio da ascensão do pensamento do abstrato ao concreto, o método de ensino a ser utilizado pelo professor deve assegurar uma atividade de estudo em cuja realização os estudantes possam assimilar de forma precisa este conteúdo (DAVÍDOV, 1988, p. 194, tradução nossa).

Embora o movimento direcionador seja de ascensão do abstrato ao concreto, o movimento de redução do concreto ao abstrato é condição, ou seja, está subordinado ao mesmo (DAVÍDOV, 1988). Para desencadear tal movimento de pensamento, durante o experimento didático, contemplamos a gênese e o desenvolvimento do conceito de fração, na inter-relação das significações aritméticas, algébricas e geométricas a partir da grandeza comprimento.

---

[2] "O reflexo é o resultado da atividade subjetiva que parte da fonte objetiva e conduz à imagem cognitiva, superando por conteúdo qualquer objeto ou processo tomado separadamente. Só sob essa concepção do reflexo pode-se entender por que o conhecimento se converte em instrumento da atividade prática transformadora do homem" (KOPNIN, 1978, p. 124).

Articulamos as reflexões sobre o conteúdo do conceito de fração, indissociavelmente, ao modo de organização do ensino.

Durante o Estágio de Docência do Mestrado em Educação, no curso de Pedagogia, no primeiro e no último encontro propusemos que as acadêmicas respondessem, na forma escrita, e individualmente, à seguinte situação hipotética (Quadro 2):

Quadro 2 – Instrumento avaliativo proposto no primeiro e no último encontro

Imagine que você foi convidado (a) para lecionar em uma turma de quinto ano de uma escola da Rede Estadual de Educação de Santa Catarina, a partir de amanhã. Durante todo o período vespertino, você deverá ensinar fração. É importante ressaltar que o professor anterior ainda não abordou esses conceitos. Além disso, você não tem tempo disponível para pesquisar sobre o assunto. Portanto, o plano de ensino terá que ser elaborado a partir do que você já sabe sobre fração. Como você faria esse plano? Você tem até às 22h30min de hoje para planejar essas aulas e enviar o plano de ensino ao diretor da escola com ações detalhadas para o período inteiro, ou seja, cinco aulas sobre fração. Elabore o plano de ensino com todas as situações que você desenvolveria nas duas turmas (explicações, experimentos, reflexões, exercícios, atividades...) e entregue até o final do presente encontro (22h30min) para a professora Josélia.

Fonte: Elaboração nossa, 2017.

Nos dois últimos encontros do semestre letivo foram desenvolvidas cinco tarefas sobre o conceito de fração. As quatro primeiras foram elaboradas por Davýdov e colaboradores em russo e publicadas em português por Freitas (2016).[3] A quinta tarefa consiste em uma situação desencadeadora de aprendizagem, a História Virtual de Cordasmil, elaborada pelo professor Manoel Oriosvaldo de Moura (MOURA, 2015) e desenvolvida matematicamente por Santos (2017), com base na proposição davydoviana de ensino. No último encontro, após o intervalo, apresentamos novamente o instrumento avaliativo do primeiro dia.

É importante ressaltar que no decorrer do semestre, antes de chegar ao conteúdo frações, o conceito de número inteiro foi abordado pela professora titular da disciplina a partir da relação de multiplicidade e divisibilidade entre medidas de grandezas discretas e contínuas,

[3] As tarefas davydovianas foram extraídas, por Freitas (2016), das seguintes obras: livro didático (ГОРБОВ et al., 2011), livro de orientação do professor (ГОРБОВ et al., 2006).

cujos valores eram apresentados, a princípio, algebricamente. Além disso, os conceitos de multiplicação e divisão também foram apresentados pela mestranda Mariana Fontes (FONTES, 2019).

As cinco tarefas foram selecionadas por traduzirem a gênese e o desenvolvimento do conceito de fração, com possibilidades de provocar, nas acadêmicas, uma atitude investigativa, se devidamente conduzidas. O confronto entre as reflexões de caráter mais geral e as respectivas particularidades possibilitou a revelação da relação essencial do conceito de fração.

> Ao iniciar o domínio de qualquer matéria curricular, os estudantes, com a ajuda dos professores, analisam o conteúdo do material curricular e identificam nele a relação geral principal e, ao mesmo tempo, constatam que esta relação se manifesta em muitas outras relações particulares encontradas nesse determinado material. Ao registrar, por meio de alguma forma referencial, a relação geral principal identificada, os alunos constroem, com isso, uma abstração substancial do assunto estudado (DAVYDOV, 1988, p. 22, tradução nossa).

Durante o processo de formação das abstrações, as acadêmicas reproduziram modelos objetais, gráficos e literais, o que permitiu o trânsito entre concreto e abstrato. Tratou-se da concretização e abstração da relação geneticamente inicial e universal do conceito de fração em suas manifestações particulares. No trânsito entre as diferentes modelações, manteve-se a mesma relação universal. Esta foi a unidade que assegurou a passagem de um modelo para outro como representação da mesma essência, embora em níveis diferentes de abstração.

> [...] o conhecimento é um processo em que estão presentes, embora em níveis diferentes, o momento da universalidade, da particularidade e da singularidade. Assim, ao separar (abstrair) algum elemento particular ou singular, este elemento não perderá seu vínculo, ainda que muito tênue, com a universalidade. É, portanto, essa articulação entre universalidade, particularidade e singularidade, sempre ao longo de um processo concreto, que permitirá verificar se a abstração que está sendo realizada é verdadeira ou não (TONET, 2013, p. 114).

O trânsito entre universal, particular e singular, realizado pelas acadêmicas no plano mental, foi capturado por meio de suas manifestações no plano externo, por meio da oralidade e da escrita.

Realizamos uma análise dialética da unidade entre o processo (formação) e o produto (produção final das acadêmicas). Procuramos seguir o rigor estabelecido pelo Método do Materialismo Dialético desde o momento de elaboração do projeto que gerou a presente pesquisa, por entendermos que “o método é um meio de obtenção de determinados resultados no conhecimento e na prática” (KOPNIN, 1978, p. 91).

Com a finalidade de atingir o objetivo proposto no projeto de pesquisa, as manifestações das acadêmicas foram obtidas por meio de gravações em áudio e vídeo, registros fotográficos e digitalização de anotações por elas realizadas durante todo o experimento.

Para efeito de organização dos dados, transcrevemos as seis horas de gravação. Tomamos como referência a gravação em áudio, pois a qualidade da captação do som pelo gravador era superior à filmadora. No entanto, quando não era possível detectar as palavras proferidas, recorríamos à filmadora. Na sequência, as fotografias foram inseridas no contexto das falas que lhes deram origem. Além disso, organizamos um arquivo, por acadêmica, com a organização do ensino do conceito de fração elaborado no primeiro e no último encontro.

Durante a análise, perseguimos os seguintes questionamentos: qual o teor conceitual (empírico ou teórico) subjacente à organização do ensino do conceito de fração apresentada no primeiro encontro (primeiro momento)? Qual o teor conceitual (empírico ou teórico) subjacente à organização do ensino do conceito de fração após a realização do Experimento Didático Desenvolvimental (segundo momento)? Quais as manifestações que expressam o movimento de mudança ou permanência do primeiro para o segundo momento?

Para a apresentação dos dados, optamos pela elaboração de episódios, vinculados à unidade de análise, constituídos por: momento inicial; manifestações que expressam o movimento de mudança do primeiro para o segundo momento; momento final, com vistas à observação dos fatos. Com base neste movimento de abstração, por meio da elaboração dos episódios, procedemos às conclusões. Nesse movimento, consideramos que:

> […] a análise dos dados precisa estar orientada não para as possibilidades ideais, mas para os fatos realmente observados; ela não é apodítica ou preditiva, mas precisa ser verdadeira, real; sua ocorrência é posterior à realização da experiência, ela é aposteriorística; surge da indução e a guia, não da intuição; e o mais importante: a análise conduz a generalizações que têm limites e graus, mas que se elaboram a partir das essências. O movimento que fazemos, com o auxílio da análise, que parte da observação dos fatos, passa pela abstração do essencial e logo elabora a generalização, é o que permite a elaboração das conclusões do experimento didático-formativo (AQUINO, 2017, p. 349).

O movimento realizado para atingir o conhecimento da essência abstrata pesquisada ocorreu a partir da observação dos fatos presentes na realidade (manifestações orais e escritas das acadêmicas). Como afirma Kopnin (1978), o processo para atingir o conhecimento, em nível de concreto ponto de chegada, não acontece imediatamente, constitui-se por abstrações.

> O conhecimento não pode passar imediatamente do sensorial-concreto ao concreto pensado. Esse caminho, como todos os outros, é complexo e contraditório. Para atingir

> a concreticidade autêntica, o conhecimento perde temporariamente a concreticidade em geral e passa ao seu próprio oposto: ao abstrato (KOPNIN, 1978, p. 158).

O conhecimento que transcende o concreto sensorial, constituído por seis horas de registro, está permeado de idas e vindas, o que o torna complexo e contraditório. Além das respostas apresentadas por escrito, pelas acadêmicas, ao instrumento avaliativo proposto no primeiro e no último encontro. Isto significa que a produção dos episódios foi um longo e tortuoso processo de elaboração e reelaboração até que estes refletissem, como abstrações, as relações internas do objeto investigado.

Para expormos os resultados da investigação, estruturamos a presente dissertação em quatro partes. A primeira, de caráter introdutório, constitui-se no contexto do investigativo, um movimento que tem como base os fundamentos da Teoria Histórico-Cultural, Teoria do Ensino Desenvolvimental e Atividade Orientadora de Ensino, sustentadas na teoria materialista dialética do pensamento. Na segunda, evidenciamos o movimento ocorrido durante dois encontros sobre fração, desenvolvidas no contexto de um Experimento Didático Desenvolvimental com duração de um semestre. Na terceira, apontamos alguns indícios de aprendizagens por meio da análise comparativa entre as respostas, apresentadas pelas acadêmicas no primeiro e no último encontro, a um mesmo instrumento avaliativo. Essa análise comparativa ocorrerá à luz do processo desenvolvido ao longo do semestre. E, por fim, procederemos às considerações finais.

2 O PROCESSO PERCORRIDO COM AS ACADÊMICAS

Neste capítulo, será apresentada a análise dos dados provenientes do Experimento Didático Desenvolvimental, realizado durante o estágio de docência do Mestrado, com vistas a refletir sobre o processo de ensino e aprendizagem do conceito de fração propiciado na disciplina *Fundamentos e Metodologias de Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental* do curso de Pedagogia da UNISUL. Esta turma estava composta por vinte e uma acadêmicas matriculadas no quarto semestre do curso. Mas, quem são elas? Encontramos diferentes perfis neste grupo, algumas haviam concluído recentemente o Ensino Médio, outras já há muito tempo. A maioria ainda não está lecionando, algumas trabalham no comércio e, por esta razão, apresentam dificuldades para se deslocarem às escolas e realizarem as observações solicitadas pelo curso. Aquelas que trabalham nas escolas, em sua maioria, auxiliam professores titulares e buscam estes ambientes para realizarem suas observações e estágios.

Foi neste contexto que realizamos as apreensões das manifestações das acadêmicas, que foram obtidas por meio de gravações em áudio e vídeo, registros fotográficos e digitalização de anotações por elas realizadas durante todo o experimento. Contudo, como em muitos momentos, o trabalho foi realizado em grupos e estes trabalhavam ao mesmo tempo, só foi possível capturar o diálogo dos grupos que estavam mais próximos do gravador e da filmadora, por essa razão, geralmente se repetem dados dos mesmos grupos no decorrer da análise. Portanto, não se trata da seleção de uma fala em detrimento de outra, mas da utilização daquelas manifestações que os instrumentos capturaram em sua totalidade, o que delimitou a quantidade de acadêmicas que aparecem nas cenas.

Assim, para realizar a análise dos dados, foram selecionadas cenas de cinco episódios. Nas análises, estarão articuladas as etapas do processo de ensino e aprendizagem, juntamente com o desenvolvimento deste processo, por meio do coletivo, visto que consideramos esse processo desenvolvido coletivamente um requisito importante para a aprendizagem.

O Experimento Didático Desenvolvimental fundamenta-se no modo de organizar o ensino, com vistas à superação do ensino tradicional, ou seja, daquele ensino que se desenvolve empiricamente, tal como geralmente ocorre no Brasil (HOBOLD, 2014; GALDINO, 2016 e SANTOS, 2017). Para tanto, fundamentamo-nos naquele que pressupõe o desenvolvimento do pensamento teórico, o ensino desenvolvimental.

O movimento conceitual presente neste capítulo contemplou as tarefas 1, 2, 3, 4 e 5 desenvolvidas em conjunto com as acadêmicas matriculadas na disciplina *Fundamentos e*

Metodologias de Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental, da quarta fase do curso de Pedagogia da UNISUL.[4] Para tanto, organizamos em episódios, cenas e *flashes* que contemplaram as manifestações orais, escritas e gestuais. Esta metodologia configura a "[...] possibilidade de tomada de um elemento observável mediante o qual se pode inferir forma e conteúdo da subjetividade, ao mesmo tempo que permite identificar indícios de internalização de um conteúdo externo" (MOURA, 2010, p. 158). Por escolha das acadêmicas, os nomes citados são reais, pois optaram por não usar nomes fictícios. Nesse sentido, assinaram o termo de consentimento (Anexo A). As transcrições encontram-se organizadas pelo número que indica a posição em que está a fala na discussão e, posteriormente, pelo nome das acadêmicas e da mestranda. Designamos de *flashes* (F) as falas que expressam os momentos mais significativos dentro das cenas.

Para apreender tais indícios, orientamos o movimento de resolução das tarefas com base na proposição davydoviana apresentada por Freitas (2016) e Santos (2017). Elaboramos previamente o referido movimento em *slides*, com as animações, na ordem em que as acadêmicas deveriam se manifestar. Como se adivinhássemos o que elas nos responderiam. Na verdade, nossas perguntas é que geravam as respostas e movimentos de arcos, segmentos, subdivisões de segmentos, entre outros, que apareceriam nos *slides*. As reflexões do processo desenvolvido em sala de aula encontram-se detalhadas no presente capítulo, conforme organização do quadro a seguir:

Quadro 3 – Tarefas, episódios e cenas da pesquisa (continua)

TAREFAS	EPISÓDIOS	CENAS
Qual é o valor das medidas dos segmentos A, B e C, em relação à unidade de medida E?	1 - Necessidade de subdivisão da unidade de medida	1 - Medição do segmento com medida A. 2 - Medição do segmento com medida B. 3 - Contexto geométrico.
Quantas vezes a medida E cabe no lado dos pentágonos com medida T?	2 - Medição de dois comprimentos na qual um é tomado como unidade de medida do outro	1 - Medição do perímetro de medida A. 2 - Medição do lado (medida C) do pentágono com perímetro de medida T. 3 - Medição do perímetro do pentágono de medida T. 4 - Medição com a unidade de medida intermediária menor que a grandeza a ser medida. 5 - Medição do perímetro do pentágono de medida T.
Construa o comprimento com medida C a partir da unidade E. Considerando que C = $\frac{5}{7}$E.	3 - Construção do comprimento com medida C a partir da unidade E: $C = \frac{5}{7}E$	1 - Construção de um segmento de reta a partir da relação entre um valor aritmético e uma unidade de medida.

[4] O referido curso possui apenas uma disciplina voltada ao ensino de Matemática.

(conclusão)

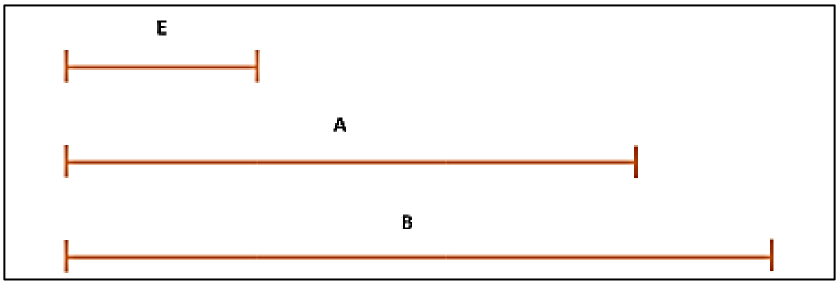
TAREFAS	EPISÓDIOS	CENAS
Construa uma reta numérica e localize o ponto correspondente a $\frac{7}{13}$.	4 - Construção da reta numérica e localização do ponto correspondente a $\frac{7}{13}$.	1 - Relação entre os valores fracionários.
História virtual Cordasmil.	5 - Situação desencadeadora de aprendizagem	1 - Movimento de síntese das reflexões anteriores.

Fonte: Elaboração nossa, 2018.

2.1 EPISÓDIO 1 – NECESSIDADE DE SUBDIVISÃO DA UNIDADE DE MEDIDA

Na introdução desta tarefa, as acadêmicas foram instigadas a pensarem como procederiam para medir cada um dos segmentos (Figura 1). Tinham como instrumento de medição um recorte de cartolina com medida E. Inicialmente, para determinar esta medição, tinham como ponto de partida a observação da imagem, ou seja, foram supondo algumas possibilidades com base no campo visual. Porém, com base apenas na observação não foi possível determinar o número de vezes que a unidade de medida E cabe nas demais medidas. A partir das reflexões é que surgiu a necessidade da introdução do instrumento de medição (recorte de cartolina cujo comprimento media E). Este possibilitou a medição dos demais comprimentos. A tarefa 1 consiste na medição de comprimentos de segmentos de reta. Para tanto, surge a necessidade de subdivisão da unidade de medida no contexto da relação entre medidas A e B com a unidade de medida E.

Figura 1 – Subdivisão da unidade de medida



Fonte: Elaboração nossa, com base em Горбов et al. (2006 apud FREITAS, 2016).

A tarefa tem como ponto de partida um caráter mais geral, no qual os valores das medidas são representados algebricamente por meio de letras. A medição ocorre no contexto geométrico por meio da comparação entre as medidas dos segmentos. Esta possibilita a revelação de seus valores aritméticos. Portanto, trata-se de uma situação que articula álgebra, geometria e aritmética no movimento orientado do geral para o particular.

Partimos do pressuposto que o procedimento desenvolvido durante a resolução da tarefa possibilite a revelação de sua essência e que esta essência constitua a base orientadora para a realização das demais tarefas.

Durante a resolução dessa primeira tarefa, conduzimos o processo de modo que as acadêmicas realizassem as reflexões coletivamente. O presente episódio está constituído por três cenas. As duas primeiras referem-se à medição dos segmentos de medidas A e B, e na terceira cena consta a representação geométrica do resultado das medições.

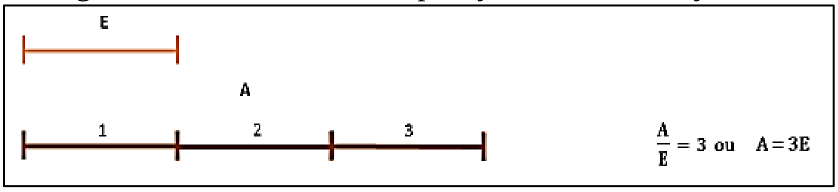
2.1.1 Cena 1 – Medição do segmento com medida A (Tarefa 1)

As acadêmicas leram a tarefa individualmente e constataram a impossibilidade de efetuar a medição com base apenas na observação dos comprimentos dos segmentos. Assim como ocorreu no desenvolvimento histórico da humanidade (CARAÇA, 1951), surgiu a necessidade de um instrumento para mediar o processo de medição, conforme segue.

Transcrição da cena 1:

1*Joyce: – Tem fração e divisão? Aquele da primeira vez eu não fiz [A acadêmica refere-se à avaliação do primeiro dia da disciplina]. Só isso que tem de pergunta? [Refere-se ao enunciado da tarefa].
2*Bruna: – Qual é a tua pergunta mesmo? [Refere-se ao enunciado da tarefa]. Tem que ser com a régua?
3*Mestranda: – Eu trouxe a medida E para vocês.
__________: Nesse momento foram distribuídos recortes de cartolina, em formato retangular, cuja medida de comprimento do lado maior era E.
4*Nilma: – O meu A deu três.
5*Letícia: – Eu não lembro mais como se faz. É um embaixo e outro em cima? Aqui é exato!
6*Mestranda: – Quantos E couberam em A?
7*Letícia: –Três.
8*Mestranda: – Então, nesse caso é necessária a fração?
9*Letícia: – Aqui é exato! Lembro que na escola a professora dizia que embaixo é 1.
10*Mestranda: – Se dividir três por um?
11*Letícia: – Não sei como é que fica, é 1/3?
12*Mestranda: – Será?
13*Anna Carolina: – É só três? Vou botar três [Letícia concorda].
14*Mestranda: – Então, vamos lá, meninas. Ali nós temos segmentos de reta com medida. E, quantas vezes E coube em A?
15*Todas: – Três.
16*Mestranda: – Como podemos representar algebricamente? De que forma?
17*Todas: – A = 3E.
18*Mestranda: – E A dividido por E é igual? $\left[\frac{A}{E} = 3\right]$.
19*Todas: – Igual 3.

20*Figura 2 – Resultado da comparação de A em relação a E



Fonte: Elaboração nossa, com base na produção das acadêmicas (2017) e Freitas (2016).

Com a utilização do instrumento de medição (segmento E), as acadêmicas foram sobrepondo-o no segmento de reta A. Estava no cronograma da disciplina que naquele encontro se iniciaria o estudo das frações. Portanto, quando propusemos as tarefas, já era essa a expectativa das acadêmicas. Por isso que, ao desenvolverem a medição do primeiro segmento, buscaram como resultado um número fracionário e tiveram certa resistência em expressar a resposta com um número inteiro: "*Eu não lembro mais como se faz. É um embaixo e outro em cima? Aqui é exato!*" (LETÍCIA – 5F).

O processo inicial estava pautado na medição do segmento de reta, cujo comprimento media A, por meio da unidade de medida E. Nesse primeiro momento, para efetuar a medição não havia necessidade de subdividir a unidade de medida E, pois esta cabia uma quantidade de vezes inteira no segmento em medição. Então, interviemos com a questão: "*Quantos E couberam em A?"* (MESTRANDA – 6F). "*Três*" (LETÍCIA – 7F). *"Então, nesse caso é necessária a fração?"* (MESTRANDA – 8F). A partir desse questionamento, Letícia reestruturou sua fala e, após a sobreposição do recorte de cartolina no segmento de reta de medida A, afirmou: *"Aqui é exato! Lembro que na escola a professora dizia que embaixo é 1*" (LETÍCIA – 9F). Nesta manifestação a acadêmica recorre à sua memória, e, ao recordar o que a professora havia dito, revela que algo obstaculizou o desenvolvimento do conhecimento. A premissa é que o desenvolvimento do conhecimento "[...] transcorre sob as condições do processo educacional, que constitui uma forma original de colaboração sistemática entre o professor e o estudante" (VIGOTSKI, 2009, p. 244). O modo de ensino, do qual se desenvolveu o processo que gerou o conhecimento é que possivelmente obstaculizou a aprendizagem, pois "[...] a assimilação dos conceitos científicos, é, antes de tudo, a transformação do próprio aluno, seu desenvolvimento. [...] esta transformação é a aquisição, pelo aluno, de novas capacidades, isto é, de novos procedimentos de ação com os conceitos científicos" (DAVÍDOV; MÁRKOVA, 1987, p. 324), o que não é revelado na fala da acadêmica. Mesmo assim, Letícia mostra-se convicta de que o resultado da medição é exato (5F e 9F). Em vez de confirmar sua convicção, questionamos: "*Se dividir três por um?*" (MESTRANDA – 10F). Ainda na expectativa da fração, Letícia (11F) fica em dúvida quanto ao registro do resultado, mas concorda com a opção de Anna Carolina (13F): "*É só três? Vou botar três*".

Ao perceber que as acadêmicas haviam compreendido que na medição em análise o resultado era um número inteiro, demos continuidade às reflexões: *"Como podemos representar algebricamente? De que forma?*" (MESTRANDA – 16F). As acadêmicas respondem que é: *"A=3E"*. A partir da relação de multiplicidade, sugerimos a relação de divisibilidade: $\frac{A}{E} = 3$. Desse modo, podemos concluir que a medida E coube 3 vezes inteiras no segmento de reta de medida A.

Nesse momento, as acadêmicas manifestam indícios de compreensão da necessidade de duas medidas de grandezas para que ocorra a medição. Para tanto, considera-se uma como unidade de medida da outra, aqui representada pela grandeza comprimento. Neste sentido, a ideia de medição constitui-se a partir da sobreposição de ambas. Segundo Rosa (2012), a possibilidade de se determinar a medida de uma grandeza ocorre somente na relação com outra. Mas, quando a unidade de medida não cabe um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida? Essa é reflexão para a cena a seguir.

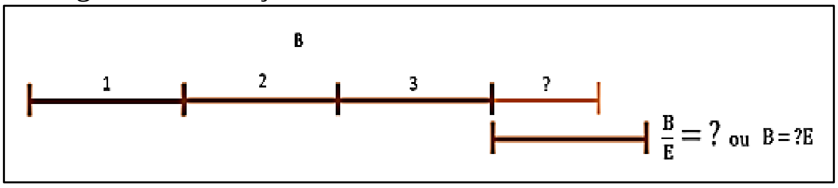
2.1.2 Cena 2 – Medição do segmento com medida B (Tarefa 2)

A próxima tarefa, presente na cena 2, explora a perspectiva de que há um elemento que apresenta uma incógnita, pois não se expressa numericamente seu valor. Neste sentido, destacamos o momento em que surge a percepção da necessidade da subdivisão do inteiro.

Transcrição da cena 2:

1*Mestranda: – Agora vamos verificar no outro segmento de reta de medida B. A unidade de medida E coube quantas vezes em B?
2* Acadêmicas: – Uma, duas, três e meia.
3*Mestranda: – E meio?
4*Nilma: – Deu, o meu deu bem certinho. Ainda dividi o meu no meio. [A acadêmica mostra, com o recorte de cartolina dobrado ao meio, que este cabe na parte do segmento de reta que falta ser medida].
5*Anna Carolina: – Então é o resto.
6*Mestranda: Mas o que é o resto? Temos?
7*Fabiana: – Isso é fração, a gente sabe que é uma fração do E, mas que fração que é eu nunca vou descobrir.
8*Clarisse: – Mas é três [três E]. Porque no meu tinha dado a metade, daí eu botei 3 e depois do lado botei um sobre dois $\left[B = 3\frac{1}{2}E\right]$.
9*Bruna: – Eu também fiz isso.
10*Silvia: – Eu botei três e meio. Só que no caso daquele ali não é.
11*Anna Carolina – No caso do da Lu [Mestranda] deu três, então é [*sic*] dois terços.

12*Letícia: – Por que dois terços?
13*Anna Carolina: – Porque ali no da Lu é dividido em três, porque o da Lu sobra só um pedacinho que é 1/3.
14*Nilma: – Tá certo.
15*Anna Carolina: – No da Lu vai dar três terços $\left[E = \frac{3}{3}\right]$.
16*Nilma: – Tá certo, tá certo.
17*Bruna: – Não entendi.
18*Nilma: – Tá certo, ela dividiu em três, se tu for [*sic*] lá olhar, ela dividiu em três, olha lá. O nosso deu meio por isso [Bruna expressa que compreendeu].
19*Mestranda: – O que devemos observar nessa tarefa?
20*Fabiana: – Que a medida não aparecia.
21*Mestranda: – O que mais podemos pensar nesse momento?
22*Fabiana: – Que nós temos que ter outra medida para poder chegar no [*sic*] comprimento desse segmento ali [parte da medida B menor que uma unidade E].
23*Mestranda: – Como poderia chamar essa outra medida? O que terá que ser feito com a unidade básica E?
24*Silvia: – Subdividir.
25*Fabiana: – Subdividir para conseguir descobrir a medida intermediária que caiba ali.
26*Bruna: – Fracionária?
27*Mestranda: – Porque eu estou subdividindo uma parte inteira.
28*Anna Carolina – Na multiplicação a gente pega uma parte maior, na fração a gente vai diminuir.
29*Fabiana: – Isso.
30*Mestranda: – Como podemos representar isso que está aqui [medição de B com a unidade de medida E] algebricamente?
31*Bruna: – Não faço a menor ideia.
32*Fabiana: – Não sei.
33*Mestranda: – Como irá ficar? O que temos de informação? Como podemos representar?
34*Nilma: – Agora não tem mais meio.
35*Silvia: – Então é A sobre E.
36*Bruna: – Não, é B sobre E $\left[\frac{B}{E}\right]$.
37*Acadêmicas: – B é igual a E com o ponto de interrogação, pois não sabemos o valor [B=E?].
38*Figura 3 – Medição de B com a unidade de medida E



Fonte: Elaboração nossa, com base na produção das acadêmicas (2017) e Freitas (2016).

39*Mestranda: – Retomando. O que nós queremos descobrir aqui? Qual é a essência desse momento? Qual será a necessidade?
40*Silvia: – Verificamos que um segmento de reta pode ser subdividido.

Agora, há uma nova necessidade. Mas, como proceder? Ao iniciarem as sobreposições da unidade de medida E no segmento de reta (medida B), as acadêmicas necessitaram estabelecer um novo método de medição, pois estavam diante de uma nova situação. Verificaram que a unidade de medida E não cabia uma quantidade de vezes inteira no segmento de reta de medida B, conforme apresentado na figura 3. Em outras palavras, as acadêmicas depararam-se com uma nova necessidade ao constatarem que já não seria possível estabelecer a sobreposição da medida E um número inteiro de vezes.

Com a intencionalidade de determinarem quantas vezes a medida E cabia no segmento de medida B, as acadêmicas sobrepuseram a medida E, representada pelo recorte de cartolina, no segmento de medida B: "*Uma, duas, três e meia"* (ACADÊMICAS – 2F). *"E meio?"* (MESTRANDA – 3F). *"Deu, o meu deu bem certinho [...]"* (NILMA – 4F). *"Então é o resto"* (ANNA CAROLINA – 5F). *"Mas o que é o resto? Temos?"* (MESTRANDA – 6F). Estas manifestações expressam que a comparação das medidas não aconteceu como no segmento anterior (medida A), em que a unidade de medida (E) cabia um número inteiro vezes, portanto, o número natural era suficiente.

Neste momento a ideia de subdivisão da unidade se concretiza. As acadêmicas iniciam a reflexão do procedimento de medição gerador do número fracionário: "*Isso é fração, a gente sabe que é uma fração do E, mas que fração que é eu nunca vou descobrir"* (FABIANA – 7F). Na continuidade da conversa há manifestações que indicam a possibilidade de revelação da fração que resulta do experimento objetal: "*Mas é três [Três E]. Porque no meu tinha dado a metade, daí eu botei 3 e depois do lado botei um sobre dois* $\left[\mathrm{B} = 3\frac{1}{2}\mathrm{E}\right]$" (CLARISSE – 8F). "*Eu também fiz isso*" (BRUNA – 9F).

Porém, esse resultado não é único, o que possibilita comparações entre resultados: *"No caso do da Lu deu três, então é [sic] dois terços"* (ANNA CAROLINA – 11F). *"Por que dois terços?"* (LETÍCIA – 12F). *"Porque ali [...] é dividido em três, [...] sobra só um pedacinho que é 1/3"* (ANNA CAROLINA – 13F). Assim, o experimento objetal, ao reproduzir a gênese do conceito, com diferentes unidades de medidas, possibilita que as próprias acadêmicas iniciem o processo de generalização teórica da essência revelada (DAVÝDOV, 1982).

A fim de desencadear o movimento de síntese da essência revelada no experimento objetal, indagamos: "O *que devemos observar nessa tarefa*?" (MESTRANDA – 19F). Fabiana responde: *"Que a medida não apareceria*" (FABIANA – 20F). Cientes da possibilidade de avançar nas reflexões, questionamos: "*O que mais podemos pensar nesse momento?"* (MESTRANDA – 21F). "*Que nós temos que ter outra medida para poder chegar no [sic] comprimento desse segmento ali* [parte da medida B menor que uma unidade E]*"* (FABIANA – 22F).

Na busca por revelar o que as acadêmicas compreenderam por meio da necessidade de se obter outra medida, voltamos a questionar: *“Como poderia chamar essa outra medida? O que terá que ser feito com a unidade básica E?”* (MESTRANDA – 23F). Obtivemos como resposta que é necessário “*subdividir*” (SILVIA – 24F). Neste sentido, revelaram que, por meio da subdivisão da unidade de medida E, torna-se possível identificar a necessidade de: “*subdividir para conseguir descobrir a medida intermediária que caiba ali*” (FABIANA – 25F). Anna Carolina (28F) faz a síntese: “*No caso, na multiplicação, a gente pega uma parte maior, na fração a gente vai diminuir”*. Com base nisso, podemos concluir que as acadêmicas compreenderam que a unidade intermediária será representada pelo elemento menor, cuja medida, aqui estabelecida como medida E, foi subdividida. Neste sentido, a unidade de medida intermediária aparece como elemento mediador, pois “[...] possibilita a representação, na reta numérica, de agrupamentos idênticos que apresentam o mesmo número de unidades, porém com movimentos inversos, os quais expressam a relação interna entre as duas operações” (HOBOLD, 2014, p. 89), multiplicação e divisão. Com base nesta relação interna, a partir da manifestação da acadêmica, possibilitou-se a analogia ao conteúdo fracionário. Prosseguimos: *“Como podemos representar isso que está aqui* [medição de B com a unidade de medida E] *algebricamente?*” (MESTRANDA 30F). Ao realizar esse questionamento, as acadêmicas expressam: *“Não faço a menor ideia”* (BRUNA – 31F). *“Não sei*” (FABIANA – 32F). Persistimos, pois acreditávamos que nossos questionamentos poderiam desencadear uma possibilidade de resposta: *Como vai ficar? O que temos de informação? Como podemos representar?”* (MESTRANDA – 33F). Esses novos questionamentos geraram as seguintes manifestações: *“Então é A sobre E”* (SILVIA – 35F). *“Não, é B sobre E?”* (BRUNA – 36F). A partir dessas asserções, as acadêmicas chegam a um consenso ao definirem que: *“B é igual a E com o ponto de interrogação, pois não sabemos o valor* [B=E?]” (ACADÊMICAS – 37F). As acadêmicas propõem o ponto de interrogação para representar o número fracionário desconhecido.

A fim de enfatizar e de promover o exercício de síntese da medição em análise, finalizamos com as questões: “*[...] O que nós queremos descobrir aqui? Qual é a essência desse momento? Qual será a necessidade?*” (MESTRANDA – 39F). E Silvia faz a síntese: *“Verificamos que um segmento pode ser subdividido”* (SILVIA – 40F).

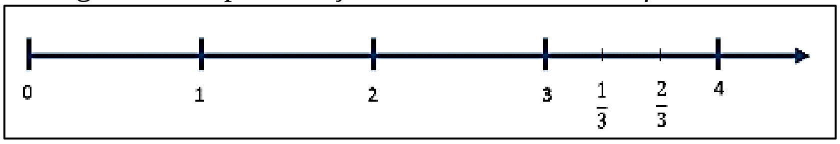
Constatamos, assim, indícios de que houve a compreensão da necessidade inicial, no que tange à essência do que foi percorrido até o momento, visto que apenas a unidade inteira é insuficiente para determinar a solução, ou seja, as acadêmicas subdividem a medida E para determinar o valor do segmento de medida B.

2.1.3 Cena 3 – Contexto geométrico (Tarefa 1)

Após a medição do segmento de medida C, sem dificuldades pelas acadêmicas, sugerimos que representassem os resultados, referentes aos três segmentos, na reta numérica. Portanto, foi representada no contexto geométrico do conceito de número a quantidade de vezes que a medida E coube nos segmentos de medidas A e B.

Transcrição da cena 3:

1*Mestranda: – E agora, onde podemos registrar esses valores?
2*Acadêmicas: – Na reta numérica.
3*Bruna: – É uma reta só pra [*sic*] todas?
4*Mestranda: – Sim, é uma reta só para todas.
5*Anna Carolina: – Mas, eu fiz uma para cada uma, tenho que refazer?
6*Mestranda: – Sim.
7*Silvia: – Tudo junto, eu não sei.
8*Clarisse: – Tem uma fração, né [*sic*]!
9*Bruna: – Entre o número dois e o número três que está faltando [Refere-se ao numerador das frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{3}$], o teu B cabe até aqui $\left[\frac{2}{3}\right]$, sobrou aqui $\left[\frac{1}{3}\right]$, então é um terço que sobrou aqui, tem dois ali, sobra um [Refere-se à subdivisão da medida E em três partes iguais, das quais couberam duas subunidades de E $\left(\frac{2}{3}\right)$ na parte que faltava ser medida em B e restou uma delas $\left(\frac{1}{3}\right)$].
10*Figura 4 – Representação na reta numérica do *flash* 9

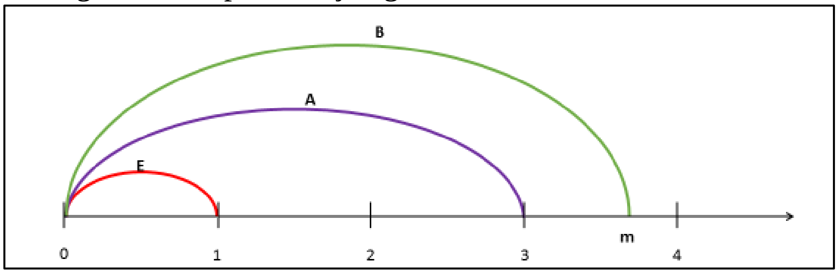


Fonte: Elaboração nossa, com base na produção das acadêmicas no 9F (2017).

11*Mestranda: – Esse é o tamanho completo de E, foi dividido em três partes e vocês tomaram duas delas.
12*Anna Carolina: – Eu pensei que era assim. Tipo, colocar em pedacinho [subdivisões da medida E].
13*Josélia: – Mas é! Do zero ao um é quanto?
14*Anna Carolina: – É um. Então no caso, o três tem que botar aqui [ponto da reta numérica que corresponde ao número três].
15*Josélia: – Então do zero ao três é o quê?
16*Anna Carolina: – É o A.
17*Josélia: – Exatamente.
18*Mestranda: – Temos os segmentos de medida E, A e B. O segmento de medida B eu não sei o número, como podemos representar sem utilizar o ponto de interrogação? O que podemos fazer?
19*Acadêmicas: – Colocar uma letra [sugerimos a letra *m*].
20*Nilma: – Poderia fazer contando o segmento até o três? Não? Fiz assim, contei até o três, o E fui encaminhando, ou é obrigado a fazer direto?
21*Mestranda: – Pode ir direto, porque vamos representar a medida A.
22*Nilma: – Sim, sim.

23*Silvia: – Eu fiz um monte de riscaçada, mas acho que a essência é igual. Não precisa colocar quantas vezes se repete?

27*Figura 5 – Representação geométrica



Fonte: Elaboração nossa, com base na produção das acadêmicas (2017) e Freitas (2016).

As acadêmicas procederam sem dificuldades à representação dos resultados referentes às medidas A e B na reta numérica, uma vez que já haviam estudando o conceito de número inteiro nesse contexto matemático. Como a reta numérica já fazia parte das reflexões sobre o conceito de número nas aulas de Matemática, as acadêmicas sugerem a inclusão da reta na presente tarefa (2F). Algumas representaram os três valores (A, B e C) em uma única reta, outras em três retas diferentes.

Durante esse processo, elas constatam que uma das medidas (B) não corresponde a um número inteiro: "*Tem uma fração, né [sic]*" (CLARISSE – 8F) e Bruna (9F) complementa: "*Entre o número dois e o número três que está faltando* [Refere-se ao numerador das frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{3}$] *o teu B cabe até aqui* $\left[\frac{2}{3}\right]$, *sobrou aqui* $\left[\frac{1}{3}\right]$, *então é um terço que sobrou aqui, tem dois ali, sobra um*". [Refere-se à subdivisão da medida E em três partes iguais, das quais couberam duas subunidades de E $\left(\frac{2}{3}\right)$ na parte que faltava ser medida em B e restou uma delas $\left(\frac{1}{3}\right)$].

A manifestação de Bruna (9F) subsidiou a reflexão de que o resultado da medição vai além do número inteiro. Logo, permite um salto nas reflexões, pois revela o que existe entre um número inteiro e outro. Essa compreensão foi recebida pelas acadêmicas como uma consequência do processo de medição de uma grandeza contínua, o comprimento. De posse apenas das grandezas discretas, tal constatação seria impossível.

Na continuidade do desenvolvimento da tarefa, por meio de questionamentos, orientamos as reflexões sobre a localização de cada uma das medidas (E, A e B) na reta numérica. A conclusão foi que o número de vezes, inteiras ou subdivididas, que cada medida E cabia nas medidas A e B seria onde posicionariam esses elementos na reta numérica. Assim, questionamos: "*Temos os segmentos de medida E, A e B. O segmento de medida B, eu não sei o número, como podemos representar sem utilizar o ponto de interrogação? O que podemos fazer?*" (MESTRANDA – 18F). "*Colocar uma letra*" (ACADÊMICAS – 19F). Revela-se neste momento a compreensão da possibilidade de adoção de uma letra para representar um número desconhecido pela mestranda.

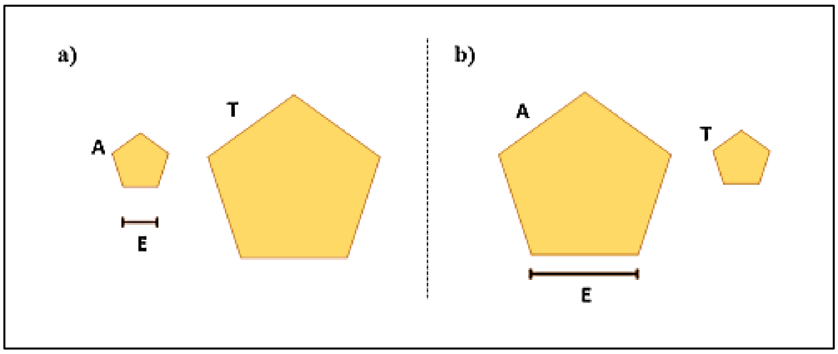
Por meio das medidas propostas, destacamos que, não por acaso, apresentam-se os números envolvidos. O segmento de medida A é igual a 3E, o segmento de medida C é igual a 4E. E entre os números três e quatro é que se encontra a expressão aritmética da medida B como resultado do fracionamento da unidade E.

Durante a medição do segmento com medida B, foram encontrados dois valores diferentes pelas acadêmicas. Isto aconteceu porque o recorte de cartolina utilizado como unidade de medida apresentava distintos comprimentos. Os diferentes resultados possibilitaram a introdução da gênese do conceito de fração que será sistematizada no episódio 2.

2.2 EPISÓDIO 2 – MEDIÇÃO DE DOIS COMPRIMENTOS NA QUAL UM É TOMADO COMO UNIDADE DE MEDIDA DO OUTRO

O Episódio 2 contempla a tarefa 2 constituída por dois itens *a* e *b*. Em ambos há necessidade de se determinar a relação quantitativa entre os comprimentos dos lados e dos perímetros de figuras geométricas bidimensionais na forma pentagonal (Figura 6).

Figura 6 – Medição de lados e perímetros de pentágonos regulares (Tarefa 2)



Fonte: Elaboração nossa, com base em Горбов et al. (2006 apud FREITAS, 2016).

O item *a* é constituído por três etapas: I - Medição do perímetro do pentágono menor, cuja medida algébrica era A, em relação à unidade de medida E. II - Determinação da medida do lado (medida C) do pentágono maior, cujo perímetro media T, a partir da mesma unidade medida E. III – O cálculo de quantas vezes o segmento de medida E cabe no perímetro do pentágono com medida T.

No item *b* da tarefa 2 ocorre o movimento inverso. Se em *a* verificava-se quantas vezes o lado menor caberia no maior, em *b* consiste em determinar quantas vezes o lado maior caberá no menor. Agora trata-se da medição do pentágono menor, cujo comprimento do perímetro também é representado pela letra T e o comprimento de seu lado novamente mede C. A unidade de medida a ser considerada correspondente ao comprimento do lado (medida E) do pentágono maior cujo perímetro mede A. Nesta medição, o segmento de comprimento E (lado do pentágono maior cujo perímetro mede A) não caberá um número inteiro de vezes no lado (C) do pentágono menor e, por consequência, em seu perímetro (T). Em outras palavras, a lateral desse pentágono (T) possui uma medida menor do que aquela que será utilizada na medição.

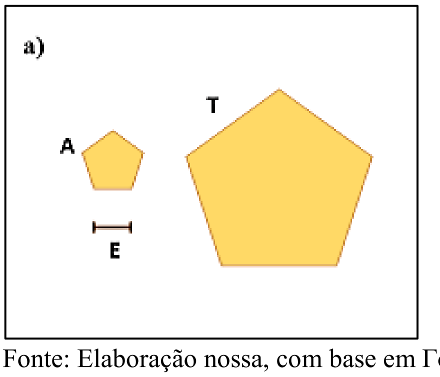
O item *b* é constituído por duas etapas: I - Medição do lado do pentágono menor (C) com a unidade de medida maior (E) e a necessidade de subdivisão da unidade. II - Determinação do valor aritmético do perímetro do pentágono de medida T a partir da unidade de medida intermediária C.

Para realizar o processo de medição, distribuímos os pentágonos impressos para as acadêmicas, tal como apresentamos na figura 6. No decorrer do desenvolvimento da tarefa, apresentamos dois recortes de cartolina que representavam as duas unidades de medida E. O recorte menor durante a resolução do *a* e o maior na realização do *b*. Na sequência, apresentamos três cenas correspondentes, respectivamente, às três etapas percorridas no desenvolvimento da tarefa 2, item *a*.

2.2.1 Cena 1 – Medição do perímetro de medida A (Tarefa 2, item *a*, etapa I)

A cena 1 reflete a primeira etapa de resolução do item *a* da tarefa 2. A medição do perímetro cuja medida algébrica é A será realizada com a unidade de medida E. Vale salientar que E é a medida do comprimento dos lados do pentágono regular de perímetro com medida A (Figura 7).

Figura 7 – Quantas vezes a unidade de medida E se repete no perímetro de medida A?



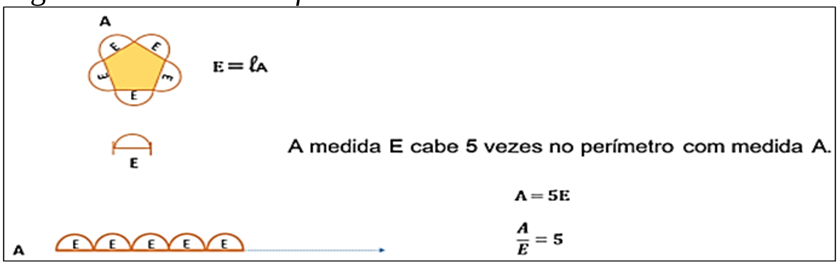
Fonte: Elaboração nossa, com base em Горбов et al. (2006 apud FREITAS, 2016).

Esclarecemos que esta etapa não se tratava de algo novo do ponto de vista de sua essência: medição com a unidade de medida básica. Já esteve presente na resolução da tarefa anterior, além disso, o número inteiro também foi introduzido por meio desta relação durante os encontros do início do semestre letivo pela professora titular da disciplina. Trata-se, pois, da retomada do procedimento apropriado anteriormente para, a partir deste, avançar em direção aos números fracionários conforme expressa a transcrição da cena 1.

Transcrição da cena 1:

1*Mestranda: – Quantas vezes a medida E cabe no perímetro de medida A [item *a*]?
2*Anna Carolina: – 1, 2, 3, 4, 5.
3*Mestranda: – Quantas?
4*Anna Carolina: – Cinco. Não são os lados? O perímetro é o lado. Então cabe cinco.
5*Mestranda: – Podemos observar que se trata de um pentágono regular. Como nós podemos representar algebricamente?
6*Acadêmicas: – A sobre E igual cinco $\left[\frac{A}{E} = 5\right]$.
7*Jéssica: – Ou A igual a cinco E $[A = 5E]$.
8*Mestranda: – Vamos representar geometricamente?
9*Anna Carolina: – É para fazer igual a esse? [Refere-se à reta numérica que foi representada na tarefa anterior].
10*Mestranda: – Sim.
11*Anna Carolina: – Neste caso é aquela normal? [Refere-se, novamente, à reta numérica].
12*Mestranda: – Sim. Então como podemos representar?
13*Acadêmicas: – Coube uma vez, duas vezes, três vezes, quatro vezes, cinco vezes.

Figura 8 – Síntese dos *flashes* anteriores



Fonte: Elaboração nossa, com base na produção das acadêmicas (2017) e Freitas (2016).

15*Josélia: – Pessoal, uma pergunta que a Amanda fez, repete, por favor.
16*Amanda: – É que a básica é E, e o todo é A?
17*Josélia: – Ela quer confirmar que aí não tem intermediária, apenas o todo e a básica.
18*Mestranda: – E é igual ao lado de A? Cabe certinho no lado? Os lados são iguais à medida de E. Assim, estamos dizendo que...?
19*Silvia: – Que E é igual a um lado do A.
20*Anna Carolina: – O A tem cinco lados, cabe cinco vezes. Tem 5E.

A cena 1 diz respeito à determinação da relação do perímetro do pentágono de medida A e a quantidade de vezes que a unidade de medida E se repetirá nele. Adotamos um método de medição, por meio do qual verificamos que a unidade de medida caberia uma quantidade de vezes inteira na grandeza, portanto, sem deixar resto.

Assim, ao serem questionadas sobre essa medição, respondem: “*1, 2, 3, 4, 5*” (ANNA CAROLINA – 2F) com a justificativa de que era por se tratar do perímetro desse pentágono, portanto, caberia cinco vezes. Na representação algébrica, expressam: “*A sobre E igual cinco*” $\left[\frac{A}{E} = 5\right]$ (ACADÊMICAS – 6F), e confirmam: “*Ou, A igual a cinco E*” $[A = 5E]$ (JÉSSICA – 7F). Constatamos, neste momento, que a unidade de medida coube uma quantidade de vez inteira no lado do pentágono (uma vez), do mesmo modo, em seu perímetro (cinco vezes).

Na representação geométrica, as acadêmicas relacionaram com a tarefa anterior. Anna Carolina questionou: “*É para fazer igual a esse?*” [Refere-se à reta numérica que foi representada na tarefa anterior] (9F). Em vista disso, constatamos que a representação da medição na reta numérica foi incorporada pelas acadêmicas em suas ações.

Além disso, a manifestação de Amanda indica apropriação de elementos presentes na unidade básica e unidade intermediária: “*A básica é E e o todo é A?*” (16F). Confirmamos sua pergunta e declaramos que, neste contexto, não há unidade intermediária, apenas o todo e a unidade básica.

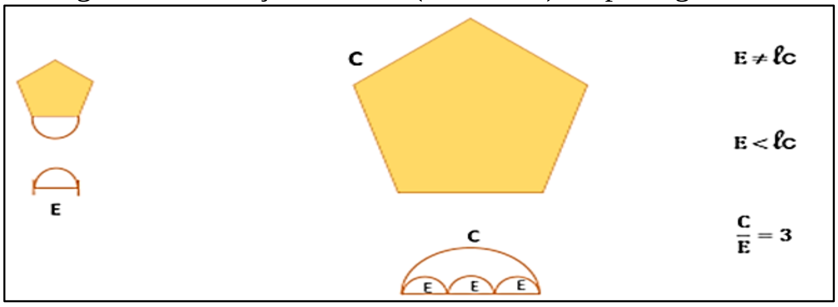
Este item, ao propor a medição dos lados do pentágono, tem o propósito de refletir sobre a relação de igualdade presente em seu desenvolvimento de medição. Para tanto, questionamos: “*E é igual ao lado de A? Cabe certinho no lado? Os lados são iguais à medida de E. Assim, estamos dizendo que...?*” (MESTRANDA – 18F). Silvia completa: “*Que E é igual a um lado do A*” (SILVIA – 19F). Constatam: “*O A tem cinco lados, cabe cinco vezes. Tem 5E*” (ANNA CAROLINA – 20F). Revelam, assim, o movimento de abstração teórica (DAVÝDOV, 1982), por meio da relação de igualdade existente entre a medida do lado do pentágono de perímetro A com a medida de E [LA=E]. Em termos conceituais, a necessidade gerada nessa resolução emprega elementos referentes à obtenção do conceito de número, no qual verificamos que a unidade de medida cabe quantidade de vezes inteira na grandeza sem deixar restos. Cientes de que o processo desenvolvido nesta tarefa não se limita em si mesmo, pois possibilita a ampliação do próprio método de medição, prosseguimos com a aula, como mostra a cena 2.

2.2.2 Cena 2 – Medição do lado (medida C) do pentágono com perímetro de medida T (Tarefa 2, item *a*, etapa II)

O desenvolvimento da tarefa, exposto na cena 2, possibilitou uma nova abstração, gerada a partir da desigualdade da medida dos lados dos pentágonos. Determinamos a medida do lado (medida C) do pentágono maior, a partir da unidade medida E (medida do lado do pentágono menor). Nesta medição, a unidade de medida E já não apresentava relação de igualdade com o lado do pentágono maior (de perímetro T). Frente a este contexto, houve a necessidade de encontrar o número de vezes que a medida E caberia no lado (C) do pentágono (T). A transcrição a seguir remete às manifestações que contemplam o movimento de superação da relação de igualdade entre as medidas para a relação de desigualdade. Neste contexto, a unidade de medida E apresenta um comprimento menor que o lado de medida C.

Transcrição da cena 2:

1*Mestranda: – Quantas vezes a medida E cabe no lado do pentágono com medida C? [Lado do pentágono cujo perímetro mede T].
2*Anna Carolina: – E cabe duas vezes ali [resposta a partir da observação].
3*Bruna: – Cabe duas [resposta a partir da observação].
4*Anna Carolina: – Três vezes [resposta a partir da observação].
5*Clarisse: – Vai caber três vezes [resposta a partir da observação].
6*_______: Nesse momento distribuímos um recorte de cartolina com a medida E.
7*Anna Carolina: – O meu deu três [resposta a partir da medição].
8*Letícia: – O meu deu três.
9*Anna Carolina: – Quantas vezes o E cabe no lado de medida C?
10*Karen: – Cabe no C, ele é o todo, né [*sic*]? [Refere-se ao perímetro do pentágono] Ele cabe só nesse aqui, né [*sic*]? [Nesse mesmo momento, refere-se ao lado do pentágono]. Cabe várias vezes.
11*Anna Carolina: – Três só ali.
12*Bruna: – Apenas em um lado.
13*Karen: – É só em um lado. Depois do perímetro que é T, que é várias vezes.
14*Anna Carolina: – Ela quer saber o lado.
15*Fabiana: – É na reta também?
16*Anna Carolina: – Lado de medida C.
17*Nilma: – Aqui é só lado, eu pensei que aqui fosse tudo.
18*Karen: – No T que é tudo. Fala perímetro, é o todo.
19*Mestranda: – Quantas vezes a medida E cabe no lado do pentágono com medida C?
20*Karen: – Como é que gente representa o lado, pode ser com C mesmo?
21*Nilma: – C sobre E porque a medida básica é o E $\left[\frac{C}{E}\right]$.
22*Anna Carolina: – Olha só, o C é três [C = 3E].
23*Mestranda: – Isso.
24*Figura 9 – Medição do lado (medida C) do pentágono maior com a unidade E



Fonte: Elaboração nossa, com base na produção das acadêmicas (2017) e Freitas (2016).

No desenvolvimento inicial de resolução da etapa II do item *a*, as acadêmicas receberam apenas os dois pentágonos em uma folha impressa. Nossa orientação foi para que determinassem: "*Quantas vezes a medida E cabe no lado do pentágono com medida C?"* [Lado do pentágono cujo perímetro mede T] (MESTRANDA – 1F). As respostas iniciais partiram da observação direta do material impresso, por suposição, da quantidade de vezes que a unidade de medida E caberia no lado de medida C: *"E cabe duas vezes ali*" (ANNA CAROLINA – 2F) e Bruna concorda (3F). Ainda, com base na observação comparada entre as medidas (C e E), as acadêmicas reconsideraram o número de vezes que a medida E caberia no lado com medida C: "*Três vezes"* (ANNA CAROLINA – 4F) e Clarisse confirma: "*Vai caber três vezes*" (5F).

Com vistas à averiguação da resposta, distribuímos um instrumento: o recorte de cartolina com unidade de medida (E). Após realizar a medição, confirmaram: "*O meu deu três*" (ANNA CAROLINA – 7F). "*O meu deu três*" (LETÍCIA – 8F). Ainda neste contexto, Anna Carolina traz novamente o questionamento: "*Quantas vezes o E cabe no lado de medida C?* (9F). Este possibilitou mais reflexões no que diz respeito ao lado (medida C), pois tratava-se de uma medida (E) que caberia mais de uma vez no lado (C). Assim, depois de realizarem a medição, verificaram: *"Cabe no C, ele é o todo?* [Refere-se ao perímetro do pentágono] *Ele cabe só nesse aqui?* [Nesse momento refere-se ao lado do pentágono]. *Cabem várias vezes*" (KAREN – 10F). A acadêmica constata que a medida a ser determinada corresponde ao lado (medida C) do pentágono (medida T), portanto, não se trata do perímetro. Mesmo assim, a medida E caberá mais de uma vez no lado de medida C, diferentemente do item anterior desta tarefa que constava a relação de igualdade. Nesta reflexão, outras acadêmicas também entenderam que seria necessário medir: "*Apenas em um lado?*" (BRUNA – 12F). Karen reafirma: *"É só em um lado"* (13F). Anna Carolina sustenta: "*Ela quer saber o lado"* (14F).

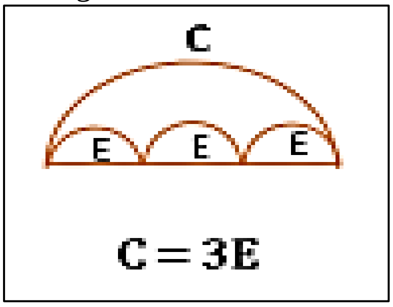
Com as reflexões são exteriorizadas manifestações que apontam para a emergência de algumas abstrações concernentes à relação entre as medidas: "*C sobre E porque a medida básica é o E*" $\left[\frac{C}{E}\right]$ (NILMA – 21F) e vão além: "*Olha só, o C é três*" [C = 3E] (ANNA CAROLINA – 22F). Por meio do recorte de cartolina, que correspondia à unidade de medida E, verificaram que a unidade E repetia-se por 3 vezes quando sobreposta no lado do pentágono (medida T). Por definição das próprias acadêmicas, constatamos que o comprimento do lado com medida C seria 3E. Em outras palavras, a partir da unidade de medida E (unidade básica), as acadêmicas determinaram o valor da unidade intermediária (3) correspondente ao comprimento do lado (medida C), o que nos permitiu prosseguir à próxima cena.

2.2.3 Cena 3 – Medição do perímetro do pentágono de medida T (Tarefa 2, item *a*, etapa III)

A cena 3 foi extraída de uma tarefa que expressa o cálculo do número de vezes que a unidade de medida E cabe no perímetro do pentágono com medida T. Porém, agora, para determinar o valor do perímetro do pentágono de medida T, pela unidade básica (E), utilizaremos a medida intermediária (C), composta de três unidades básicas (E). Logo, C será considerado como elemento mediador deste processo de medição e possibilitará a superação da contagem um a um, conforme expressam as manifestações presentes na transcrição da cena 3. Neste momento, as acadêmicas estavam organizadas em duplas ou trios.

Transcrição da cena 3:

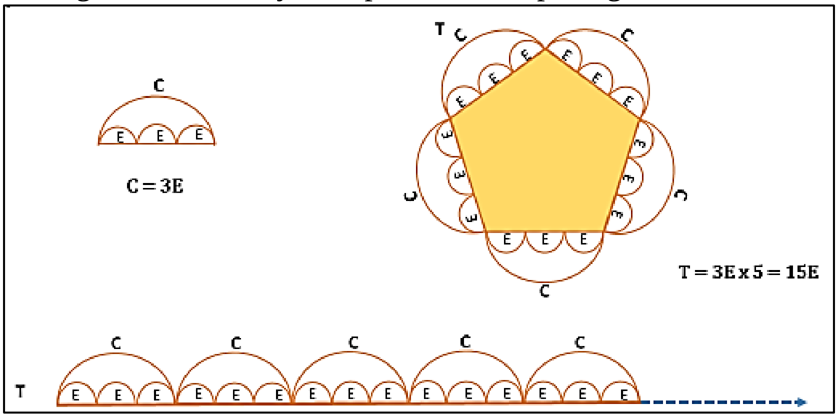
1*Mestranda: – Quantas vezes a unidade de medida E cabe no perímetro do pentágono com medida T?
2*Anna Carolina: – Primeiro tem que ter letras?
3*Mestranda: – Sim.
4*Anna Carolina: – Então coloco C vezes E.
5*Letícia: – Você já sabe que aqui tem cinco [refere-se aos lados].
6*Anna Carolina: – O L é igual a C vezes 5 [Refere-se à medida de C que se repetirá por 5 vezes].
7*Mestranda: – C tem quantos E?
8*Leticia: – Três, então T é igual a três vezes cinco [T=3 × 5].
9*Mestranda: – T está representando o quê?
10*Bruna: – T é igual a cinco vezes três E.
11*Mestranda: – Como vamos representar algebricamente?
12*Bruna: – Cinco C vezes três E [5C × 3E].
13*Anna Carolina: – É cinco C vezes 3 E.
14*Mestranda: – Quantos C você conseguiu colocar aqui? [Refere-se à representação no material da acadêmica] Assim verificamos quantos C tem?
15*Anna Carolina: – Cinco cada, então é 5C e 3E.
16*Letícia: – Algebricamente é assim?
17*Karen: – Qual é a medida básica?
18*Bruna: – É o E, tem três vezes.
19*Anna Carolina: – É quantas vezes o E cabe em cada lado.
20*Figura 10 – Medida intermediária



Fonte: Elaboração nossa, com base na produção das acadêmicas (2017) e Freitas (2016).

21* Mestranda: – O que representa o C e o que é o T?
22*Bruna: – O T é o todo.
23*Karen: – Então T é igual a cinco C vezes três E, é isso? [T=5C × 3E].
24*Bruna: – São cinco lados.
25*Mestranda: – Quantos C você tem, Fabiana?
26*Fabiana: (Fez uma expressão facial de que não compreendeu).
27*Mestranda: – Aqui você está representando só um lado [Refere-se à representação da medida do lado (C) do pentágono].
28*Clarissa: – Então é três.
29*Mestranda: – Quem é que se repetiu aqui?
30*Clarissa: – O E?
31*Fabiana: – Tudo bem, o T é o todo, sabe que aqui embaixo vai a nossa medida intermediária, que é o C.
32*Clarissa: – C é igual a três E.
33*Karen: – Agora nós estamos na reta, o que nós vamos fazer? O cinco que é unidade de medida intermediária?
34*Bruna: – Não.
35*Karen: – É o três.
36*Bruna: – Sim, C vale 3E, porque tem cinco lados e cada lado tem três.
37*Karen: – Então vai ficar 1, 2, 3 um grupo, 1, 2, 3 um grupo...
38*Mestranda: – Quantos E você tem?
39*Nilma: – Quinze, aqui três [Refere-se ao lado de medida C, C=3E].
40*Nilma: – O E que vai dar o valor de C, é isso?
41*Karen: – Depois disso vai ficar o quê? T sobre E?
42*Nilma: – Então faço 3 vezes E que é igual a C [3E = C].
43*Bruna: – Cinco são os números de agrupamentos?
44*Mestranda: – Isso.
45*Bruna: – Então, o C vale 3. Pensa no lado, cada C cabe 3E, então C é igual a 3E [Está explicando para Karen]. Então sabemos que tem cinco lados, aqui vai dar quinze, certo?
46*Karen: – Está.
47*Bruna: – Então vamos multiplicar cada lado [Para determinar o comprimento de medida T, a partir da medida C].
48*Karen: – Aqui eu coloco igual a quinze? [Representação sem utilizar a medida intermediária].
49*Bruna: – Não, porque o T que é o quinze. Agora é como se quisesse fazer a operação inversa. Qual é a nossa medida intermediária e qual é a básica? Em cada lado [C] tem três, então lado C é a nossa medida intermediária.
50*Mestranda: – Temos a representação da medida E e a representação da medida C. Quantas vezes o E coube em C?
51*Acadêmicas: – Três vezes.
52*Mestranda: – E é diferente de um lado de C, é do mesmo tamanho, igual?
53*Acadêmicas: – Não.
54*Mestranda: – O que podemos perceber também?
55*Clarisse: – Que o E é menor que o C.

56*Figura 11 – Medição do perímetro do pentágono T



Fonte: Elaboração nossa, com base na produção das acadêmicas (2017) e Freitas (2016).

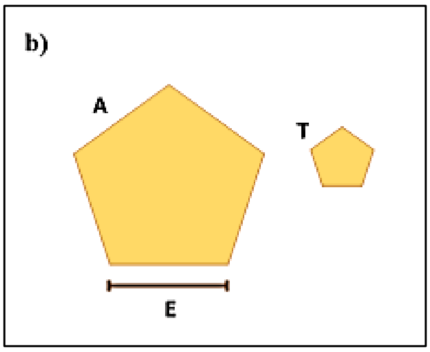
A cena 3 contempla o processo de cálculo do perímetro do pentágono (T), realizado por meio da utilização da unidade intermediária (3). Para desencadear as reflexões que geraram o resultado, levantamos a questão: *"Quantas vezes a medida E cabe no perímetro do pentágono com medida T?"* (MESTRANDA – 1F). Constatamos que havia a necessidade de utilizar a unidade de medida intermediária. No desenvolvimento desta etapa da tarefa 2, as acadêmicas propuseram: "*Então coloco C vezes E*" (ANNA CAROLINA – 4F). Ao verificar a insuficiência de dados para determinar o resultado, Letícia (5F) intervém: *"Você já sabe que aqui tem cinco"* [Refere-se aos lados]. A partir desta reflexão, Anna Carolina (6F) compreende que é necessário determinar o número de vezes que a medida C será repetida: *"O L é igual a C vezes 5?"* [Refere-se à medida de C que se repetirá por 5 vezes]. Nesta representação, para que houvesse o entendimento, estabelecemos a quantidade de vezes que a unidade de medida E caberia na medida C, consequentemente, no perímetro de T: "*T é igual a cinco vezes três E"* (BRUNA – 10F). Neste contexto, encontramos indicadores que demonstram a compreensão das acadêmicas diante da necessidade prevista neste item da tarefa 2 *a*, em que houve o registro de que, ao tomar o 3 (medida C) por 5 vezes, obteríamos 15 unidades básicas. Portanto, a unidade básica (E) repetiu-se por 3 vezes, e gerou a unidade intermediária (C), representadas algebricamente por C=3E, que se repetiu por 5 vezes na medição do perímetro do pentágono (T). Assim, obtivemos o valor do comprimento do perímetro do pentágono maior, representado por T = 3E x 5.

Ao iniciar a representação na reta numérica, as acadêmicas destacam: "*Agora nós estamos na reta, o que nós vamos fazer? O cinco que é unidade de medida intermediária?*" (KAREN – 33F). Atendendo às nossas expectativas, as acadêmicas concluem que: "[...] *C vale 3E, porque tem cinco lados e cada lado tem três"* (BRUNA – 36F). Portanto, a reta numérica ficará representada de três em três unidades: "*Então vai ficar 1, 2, 3 um grupo, 1, 2, 3 um* *grupo...”* (KAREN – 37F). Assim, o movimento de medição, por meio da contagem de três em três, subsidiou a constatação de que não seria o número cinco a unidade de medida intermediária, mas o número três. Portanto, na reta numérica, seriam formados agrupamentos de três em três. De outro modo, se a unidade de medida intermediária fosse cinco, na reta numérica seriam formados agrupamentos de cinco em cinco. Isso porque a unidade de medida intermediária seria cinco vezes maior que a unidade de medida básica. E quando acontece o inverso? Quando a unidade de medida intermediária é menor do que a unidade de medida básica, como proceder? Na próxima cena apresentamos as manifestações que revelam a necessidade de uma medida intermediária menor que a grandeza a ser medida.

2.2.4 Cena 4 – Medição com a unidade de medida intermediária menor que a grandeza a ser medida (Tarefa 2, item *b*, etapa I)

A cena 4 reflete o processo de determinação do número de vezes que o lado maior (medida E) cabe no lado do pentágono menor, representado pela letra T (Figura 12). Nesta medição, o valor geométrico do comprimento do lado a ser medido é C. O segmento de comprimento E (correspondente ao comprimento do lado do pentágono maior cujo perímetro mede A) não cabe um número inteiro de vezes em C (lado do pentágono menor), conforme a primeira etapa de resolução do item *b* da tarefa 2.

Figura 12 – Quantas vezes a unidade de medida E se repete no lado do pentágono (C) cujo perímetro mede T?

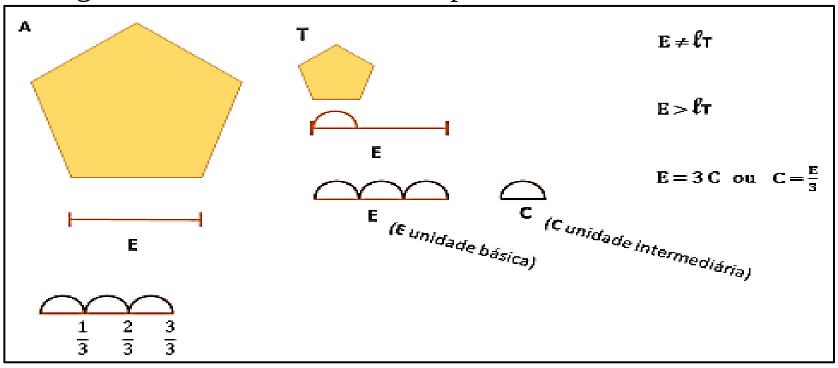


Fonte: Горбов et al. (2006 apud FREITAS, 2016, p. 94).

A seguir apresentamos a transcrição da cena que revela o movimento percorrido no processo de medição do lado do pentágono com medida C a partir da unidade de medida E.

Transcrição da cena 4:

1*Bruna: – Nesse caso não vamos multiplicar, vamos dividir.
2*Anna Carolina: – É, vai dividir.
3*Fabiana: – Antes pegávamos a medida intermediária que era maior, agora vamos ter que dividir a nossa medida intermediária, porque fraciona, sei lá, não sei qual é a palavra.
4*_______: As acadêmicas evidenciam a falta de percepção do processo de divisão e têm dificuldades em mencionar o termo correto.
5*Fabiana: – A nossa medida intermediária que é essa [refere-se à unidade de medida E], tem que dividir.
6*Josélia: – Será que agora essa não é a unidade de medida básica? E a básica, ao invés de ser menor, vai ser a maior?
7*Karen: – Isso, vai dar três.
8*Josélia: – A unidade de medida básica é a E, certo? Só que com a unidade de medida básica não vai dar para responder, é isso?
9*Fabiana: – É.
10*Bruna: – Tá [*sic*] e agora? Ela quer saber quantas vezes essa medida aqui cabe nesse ladinho [refere-se ao lado do pentágono menor].
11*Anna Carolina: – Um terço.
12*Bruna: – Cabe três vezes. C é igual a E dividido por três $\left[C = \frac{E}{3}\right]$.
13*Karen: – Só num lado.
14*Bruna: – É só isso aqui [constata que não cabe inteiro, apenas uma parte].
15*Karen: – Agora o E cabe mais de uma vez no lado. E cabe três vezes. O E cabe em um lado do T?
16*Silvia: – O E cabe menos de uma vez.
17*Karen: – O E cabe aqui dentro?
18*Bruna: – O E cabe menos de uma vez? Não?
19*Karen: – O E é maior ou menor? Assim ele é maior, vai caber mais de uma vez.
20*Bruna: – E é maior que o lado de T.
21*Nilma: – C é um terço de E.
22*Bruna: – O C não é o todo, é um lado do T. Um C de E é igual a um L de T.
23*Karen: – Um terço de E é um lado de T.
24*Mestranda: – A medida E acaba onde?
25*Patrícia: – No três.
26*Fabiana: – Aqui é um terço, mais um terço. Antes eu nem entendia isso.
27*Bruna: – O T é o todo? Aqui seria um terço [C]. O E é representado por três lados de T [E = 3C], um lado de T vale um terço.
28*Mestranda: – Isso.
29*Bruna: – Dois terços, três terços.
30*Figura 13 – Subdivisão do comprimento da medida E



Fonte: Elaboração nossa, com base na produção das acadêmicas (2017) e Freitas (2016).

Ao iniciar as reflexões (cena 4), partimos da ideia de que a unidade de medida E possuía o valor diferente da medida do lado do pentágono (E ≠ C). Portanto, a partir da relação de desigualdade, a unidade de medida (E) é maior que o lado a ser medido (E > C).

Comparamos o comprimento de medida E com o lado do pentágono (medida C). É pertinente destacar que este processo de medição é inverso ao realizado no item *a* da tarefa 2. Neste momento, além de constatarem a relação de desigualdade entre as medidas a serem analisadas, as acadêmicas necessitaram determinar a medida de um comprimento menor (C) que a unidade (E) utilizada no processo de medição.

Questionamos se esta etapa (item *b*) tinha relação com a etapa anterior (item *a*). Neste contexto reflexivo, as acadêmicas expressaram: "*Nesse caso não vamos multiplicar, vamos dividir*" (BRUNA – 1F). "*É, vai dividir*" (ANNA CAROLINNA – 2F). *"Antes pegávamos a medida intermediária que era maior, agora vamos ter que dividir a nossa medida intermediária, porque fraciona, sei lá, não sei qual é a palavra*" (FABIANA – 3F). A partir destas manifestações, iniciou-se o processo de busca por um procedimento para a determinação de uma nova unidade de medida. Assim, temos: "*A nossa medida intermediária, que é essa [Refere-se à unidade de medida E], tem que dividir*" (FABIANA – 5F). Aqui, a acadêmica apresenta elementos atinentes ao item *a*, da tarefa 2, em que a unidade de medida cabia mais de uma vez no segmento a ser medido. Neste momento, orientamos as reflexões em direção à relação inversa entre os dois itens da tarefa. Agora, a unidade de medida básica está representada pelo segmento maior (medida E). Portanto, unidade de medida básica, ao invés de ser menor, é maior (E) que o comprimento a ser medido. E a unidade de medida intermediária é menor (C). Desse modo, no processo real de medição, surge a necessidade de fracionar a unidade de medida.

Com base nesta constatação, Bruna manifesta-se (10F): "*Tá [sic] e agora? Ela quer saber quantas vezes essa medida aqui cabe nesse ladinho*". Anna Carolina (11F) responde, de imediato, que cabe "*um terço*" no lado em medição. Portanto, "*C é igual a E dividido por três* $\left[C = \frac{E}{3}\right]$ (BRUNA – 12F). Assim, a partir do experimento objetal de medição, as acadêmicas constatam que a unidade de medida não coube uma parte inteira no lado do pentágono (C). Ao fracioná-la em três partes iguais, concluem que coube apenas uma das partes $\left(C = \frac{1}{3}E\right)$.

Em outras palavras, as manifestações expressas neste movimento sugerem que a unidade de medida E (unidade de medida básica) necessita ser fracionada em três partes. Uma dessas partes $\left(\frac{1}{3}E\right)$ foi tomada como unidade de medida intermediária (C), utilizada para a medição do lado do pentágono.

Nesta primeira etapa de resolução do item *b* da tarefa 2, constatamos, ainda, que a unidade de medida intermediária C, representada pela fração $\left[\frac{1}{3}\right]$, repetia-se por três vezes na unidade de medida básica (E): "*Aqui é um terço, mais um terço. Antes eu nem entendia isso*" (FABIANA – 26F). "*O T é o todo? Aqui seria um terço* [C]. *O E é representado por três lados de T* [E = 3C], *um lado de T vale um terço*" (BRUNA – 27F).

Assim, as acadêmicas revelam a relação inversa daquela adotada no item *a*, ao constatarem que o comprimento da unidade de medida E é três vezes maior que o lado do pentágono (C) e pode ser expressa por E = 3C. Em síntese, ao não caber uma quantidade de vezes inteira na grandeza em medição, faz-se necessário fracionar a unidade de medida (E). E qual seria o valor aritmético do perímetro de medida T, ao tomarmos C como unidade de medida intermediária? A resposta para essa pergunta está ilustrada na próxima cena.

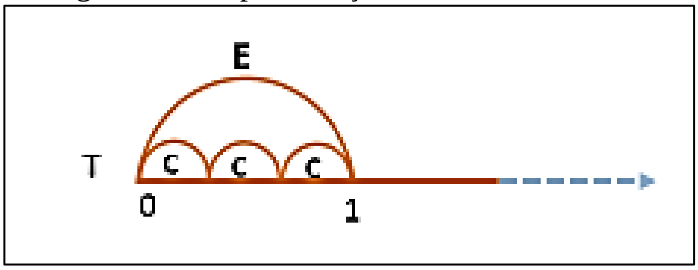
2.2.5 Cena 5 – Medição do perímetro do pentágono de medida T (Tarefa 2, item *b*, etapa II)

A cena 5 evidencia as manifestações das acadêmicas diante da determinação do valor aritmético do perímetro do pentágono de medida T. Para realizar a medição, as acadêmicas tomaram a medida C como unidade de medida intermediária, determinada na etapa I, item *b*, da tarefa 2. O processo de medição possibilitou quantificação do perímetro do pentágono de medida T, conforme apresentamos na transcrição da cena 5.

Transcrição da cena 5:

1*Bruna: – Então, um terço, mais um terço é igual a dois terços, mais um terço é igual a três terços, que é o E inteiro. Mas só que aqui está pedindo o perímetro, então não é só E.
2*Mestranda: – T é igual a quanto?
3*Bruna: – Cinco terços, é só isso. Da medida E cabem cinco terços dentro da medida T, dentro do perímetro T $\left[T = \frac{5}{3}E\right]$.
4*Karen: – Esse espacinho aqui. [Refere-se um lado de T].
5*Mestranda: – Esse espacinho representa o quê? Um lado de T. E agora já representou ali.
6*Anna Carolina: – Agora o T eu vou fazer aqui?
7*Mestranda: – O outro pedacinho como tu vais representar?
8*Anna Carolina: – Assim, porque é só um lado de T.
9*Karen: – Daí tem mais um lado ainda. Aí aqui eu coloco quatro terços de T? [Refere-se à reta numérica].
10*Mestranda: – E faltou mais esse lado aqui, porque são cinco lados.
11*Nilma: – Então T é igual a cinco terços, são cinco terços de E.
12*Mestranda: – A medida C coube quantas vezes na unidade básica?

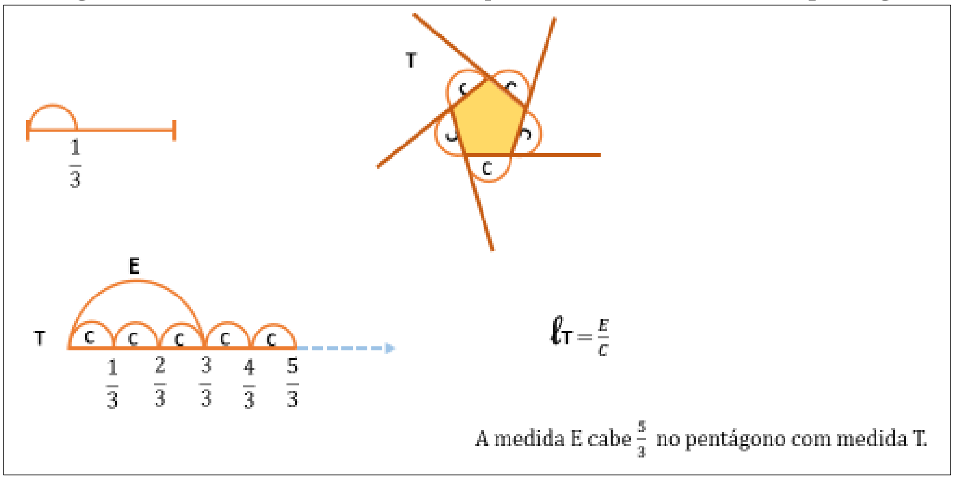
13*Acadêmicas: – Três.
14*Figura 14 – Representação da reta numérica



Fonte: Elaboração nossa, com base na produção das acadêmicas (2017) e Freitas (2016).

15*Bruna: – Três, no caso então é um terço [Refere-se a cada lado do pentágono T].
16*Mestranda: – Então, E é igual a quantos C?
17*Letícia: – Três.
18*Mestranda: – Como poderíamos representar diferente disso?
19*Anna Carolina: – Então é assim ó, um lado de T é igual a E dividido por 3 [*sic*].
20*Mestranda: – Tem a representação de E e de C?
21*Anna Carolina: – Então é E dividido por C.
22*Bruna: – E dividido por C é igual a?
23*Anna Carolina: – C é igual a E dividido por 3.
24*Mestranda: – Como nós podemos representar cada uma delas, cada representação dessa? Se ele for dividido por três partes, a primeira parte eu represento?
25*Acadêmicas: – Um terço.
26*Mestranda: – A segunda parte?
27*Acadêmicas: – Dois terços.
28*Mestranda: – A terceira parte?
29*Acadêmicas: – Três terços.
30*Mestranda: – Ou?
31*Acadêmicas: – Um inteiro.
32*Mestranda: – Quantas vezes a medida E cabe no perímetro do pentágono com medida T?
33*Anna Carolina: – No caso, eu vou botar um terço, mais um terço, mais um terço, cinco vezes e vai ficar cinco terços.
34*Josélia: – Pessoal, eu não entendi por que é um terço aqui. Vocês poderiam me explicar? Por que aqui é três?
35*Clarissa: – Porque o E se subdividiu em três vezes.
36*Mestranda: – E o que quer dizer isso aqui? Quem é o E e quem é o C?
37*Karen: – O E é a medida básica e o C é intermediária.
38*Bruna: – Só que a gente meio que estranhou porque é diferente dos outros problemas, a básica é maior do que a intermediária.
39*Mestranda: – Com isso surgiu o quê? Qual necessidade?
40*Silvia: – Subdivisão.
41*Anna Carolina: – Esse é mais fácil do que o de dividir.
42*Mestranda: – Esse não é dividir?
43*Anna Carolina: – É, mas com fração eu aprendi mais fácil.
44*Bruna: – É porque tu já tinha se apropriado do conceito de divisão, por isso que tu já aprendeu mais rápido [*sic*].
45*Silvia: – Tu já sabe quem é a intermediária, quem é a básica [*sic*].
46*Anna Carolina: – Agora eu já sei como é na reta.

47*Figura 15 – Quantidade de vezes que a medida C coube no pentágono de perímetro T



Fonte: Elaboração nossa, com base na produção das acadêmicas (2017) e Freitas (2016).

A relação expressa na cena 5 compreende a medição do perímetro do pentágono (T) a partir da unidade intermediária (C). O movimento de resolução ocorreu na sequência em que foi determinada a unidade de medida intermediária, o que possibilitou, sem dificuldade, a solução de sua quantificação. De modo que Bruna (1F) expõe: "*Então, um terço, mais um terço é igual a dois terços, mais um terço é igual a três terços, que é o E inteiro. Mas só que aqui está pedindo o perímetro, então não é só E*"; neste contexto verificou que uma unidade de medida básica (E) não seria suficiente para determinar a medição do perímetro (T). Questionamos: "*T é igual a quanto?*" (MESTRANDA – 2F). E Bruna (3F) responde: "*Cinco terços, é só isso. Da medida E cabem cinco terços dentro da medida T, dentro do perímetro T*". Nessa direção, as acadêmicas quantificaram o valor da medida do perímetro do pentágono T, o qual corresponde a $T = \frac{5}{3}E$.

Após identificarem o valor do perímetro de T, as acadêmicas representaram a sistematização do comprimento do perímetro do pentágono na reta numérica. Estabeleceram, inicialmente, o que a unidade intermediária representava: "*Esse espacinho aqui*" [Refere-se a um lado de T] (KAREN – 4F). Questionamos: "*Esse espacinho representa o quê? Um lado de T. E agora já representou ali*" (MESTRANDA – 5F). Karen (9F) constata: "*Daí tem mais um lado ainda. Aí aqui eu coloco quatro terços de T?*". Alertamos para a necessidade de tomar mais uma unidade intermediária na reta numérica, visto que, como se trata do perímetro do pentágono, todos os lados deveriam ser considerados: "*E faltou mais esse lado aqui, porque são cinco lados*" (MESTRANDA – 10F). Assim, estabeleceram: "*Então T é igual a cinco terços, são cinco terços de E*" (NILMA – 11F). E, dessa forma, procede-se à confirmação do valor aritmético do perímetro do pentágono no contexto geométrico da reta numérica.

Diante do movimento desenvolvido no contexto da etapa II, questionamos a possibilidade de estabelecer uma representação diferente daquela que já haviam representado. Obtivemos como resposta: "*Então é assim ó, um lado de T é igual a E dividido por 3 [sic]*" (ANNA CAROLINA – 19F). Voltamos a questionar: "*Como nós podemos representar cada uma delas, cada representação dessa? Se ele for dividido por três partes, a primeira parte eu represento?*" (MESTRANDA – 24F). Nesta questão, referimo-nos à representação do valor de cada lado do pentágono (C) na reta numérica. Assim, as acadêmicas (25F, 27F, 29F e 31F) constataram que a primeira parte representava a medida de "*um terço*"; a segunda parte, "*dois terços*"; e a terceira, "*três terços*" ou "*um inteiro*". Assim, concluíram que a unidade de medida intermediária C cabia três vezes em E, que constitui uma unidade inteira. Porém, uma unidade inteira (E) não é suficiente para expressar o resultado da medição do perímetro do pentágono (T). Isso gera a necessidade de tomar mais unidades de medida intermediária (C). Voltamos a questionar: "*Quantas vezes a medida E cabe no perímetro do pentágono com medida T?*" (MESTRANDA – 32F). Anna Carolina (33F) manifesta-se: "*No caso, eu vou botar um terço, mais um terço, mais um terço, cinco vezes e vai ficar cinco terços [sic]*". Em síntese, nesta segunda etapa de resolução (item *b* da tarefa 2) constatamos que a unidade de medida intermediária C, representada pela fração $\frac{1}{3}$, repetia-se por três vezes na unidade de medida básica (E). Portanto, na medição em referência, a unidade de medida intermediária $\left(\mathrm{C} = \frac{1}{3}E\right)$ repetiu-se por 5 vezes no perímetro do pentágono: $T = \frac{5}{3}E$.

Para provocar mais reflexões, questionamos a utilização de $\frac{1}{3}$ como valor fracionário e também a determinação do número três como denominador. Obtivemos: "*Porque o E se subdividiu em três vezes*" (CLARISSE – 35F). Tornamos a questionar: "*[...] Quem é o E e quem é o C?*" (MESTRANDA – 36F). Karen define (37F): "*O E é a medida básica e o C é intermediária*". E Bruna expressa (38F): "*Só que a gente meio que estranhou porque é diferente dos outros problemas, a básica é maior do que a intermediária*". Esta manifestação revela que a apropriação da relação de divisibilidade entre a unidade de medida básica e a unidade de medida intermediária é base para a compreensão da operação de subdivisão da unidade básica (SILVIA – 40F) que dá origem ao número fracionário.

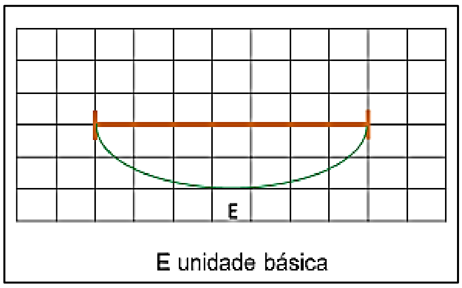
Ao finalizar a tarefa, Anna Carolina (41F) afirma: "*Esse é mais fácil do que o de dividir*". A partir dessa manifestação, questionamos sobre a gênese do conceito de fração: "*Esse não é dividir?"* (MESTRANDA – 42F). E Anna Carolina destaca (43): "*É, mas com fração eu aprendi mais fácil*". Bruna, imersa nesse processo de reflexões, conclui (44F): "*É porque tu já* *tinha se apropriado do conceito de divisão, por isso que tu já aprendeu mais rápido [sic].”* A partir destas manifestações, constatamos que a reprodução da gênese do conceito de fração ocorreu não somente no desenvolvimento das duas tarefas aqui apresentadas, mas durante o movimento percorrido ao longo de todo o semestre (2017/2).

As tarefas propostas, que ilustramos por meio do episódio 2, propiciaram a conclusão de sínteses orientadas à apropriação da essência do conceito de fração no contexto das relações de multiplicidade e divisibilidade de unidades. Por meio dessas relações, a unidade de medida básica dá origem à unidade de medida menor por meio de sua subdivisão. Isso possibilita a realização de medições nas quais os números inteiros são insuficientes, por serem medidas não exatas, tal como ocorreu historicamente, quando a humanidade produziu o conceito de fração (CARAÇA, 1951). O número fracionário, ponto de chegada na presente tarefa, é ponto de partida na tarefa que segue no terceiro episódio.

2.3 EPISÓDIO 3 – CONSTRUÇÃO DO COMPRIMENTO COM MEDIDA C A PARTIR DA UNIDADE E: $C = \frac{5}{7}$E (TAREFA 3)

O episódio 3 foi extraído de uma situação particular, na qual se dá um valor e uma unidade de medida e, a partir desta, será construído um segmento de reta por meio da seguinte tarefa: construa o comprimento da medida C a partir da unidade E expressa na malha quadriculada da figura 16. Considere $\mathrm{C} = \frac{5}{7}$E.

Figura 16 – Unidade de medida E



Fonte: Elaboração nossa, com base na produção das acadêmicas (2017) e Freitas (2016).

A tarefa 3 prevê um procedimento diferente do realizado nas anteriores. Antes, eram dadas as grandezas a serem medidas e seu valor aritmético consistia no resultado de sua resolução. Agora ocorre o inverso, a partir da relação entre um valor aritmético $\left(\frac{5}{7}\right)$ e uma unidade de medida (E), será construído um segmento de reta.

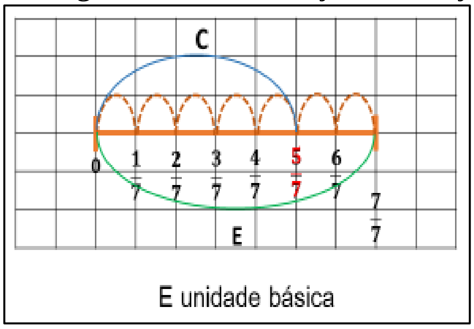
2.3.1 Cena 1 – Construção de um segmento de reta com base na relação entre um valor aritmético e uma unidade de medida (Tarefa 3)

O movimento percorrido pelas acadêmicas na construção do comprimento com medida C constitui a cena 1, transcrita a seguir.

Transcrição da cena 1:

1*Anna Carolina: – Eu aprendi o que é isso, é uma malha quadriculada.
2*Mestranda: – Alguém quer ler?
3*Clarisse: – Construa o comprimento medida C a partir da unidade E, considere C igual a cinco sobre sete E $\left[C = \frac{5}{7}E\right]$.
4*Silvia: – Eu já fiz.
5*Anna Carolina: – Só uma perguntinha. Então, se lá a gente falava cinco terços, agora falamos cinco sétimos?
6*Mestranda – Sim.
12*Clarisse: – E é esse segmento aí laranja [refere-se ao segmento apresentado no *slide*].
13*Mestranda: – É, e qual o comprimento de medida C?
14*Clarisse: – É cinco sétimos, até ali [*sic*]. Contei cinco quadradinhos, ali é o C.
15*Mestranda: – O que você está representando aqui nesse segmento de reta? O que o C representa aqui? O sete vai mudar aqui?
16*Silvia: – Não.
17*Mestranda: – Por que ele não vai mudar?
18*Anna Carolina: – Porque o sete é o total, é o todo.
19*Mestranda: – O sete é quantas vezes ele foi o quê?
20*Fabiana: – Subdividido.
21*Anna Carolina: – Lembra que quando nós íamos para a escola era uma pizza para gente? Aí a gente dividia em oito e pintava cinco.
22*Karen: – Eu coloquei no meio, será que tem problema?
23*Mestranda: – Um sétimo vai ser aqui [refere-se à subdivisão de E].
24*Karen: – Sim. Na verdade, o certo é aqui [onde a mestranda apontou].
25*Mestranda: – Então, o E vai ser a nossa unidade?
26*Anna Carolina: – Básica.
27*Mestranda: – Ela se subdivide em?
28*Anna Carolina: – Sete vezes, na verdade ela é subdividida em sete.
34*Mestranda: – O que é um inteiro?
35*Acadêmicas: E.
36*Josélia: – Por que o C não vai até o sete sétimos?
37*Acadêmicas: – Porque é cinco sétimos.
38*Anna Carolina: – Porque é só cinco pedacinhos de sete.

30*Figura 17 – Localização das frações na medida com comprimento E.



Fonte: Elaboração nossa, com base na produção das acadêmicas (2017) e Freitas (2016).

Nesta cena refletimos a relação entre o valor aritmético $\left(\frac{5}{7}\right)$ e a unidade de medida (E), expressa na malha quadriculada que as acadêmicas receberam em material impresso, para determinar o comprimento de segmento de reta de medida C. Imediatamente, as acadêmicas localizaram a unidade de medida E na malha: "*É esse segmento aí laranja*" (CLARISSE – 12F). Em seguida, localizaram o comprimento da unidade de medida C na reta numérica: "*É cinco sétimos, até ali. Contei cinco quadradinhos, ali é o C [sic]*" (CLARISSE – 14F). Na sequência, constatamos que as acadêmicas compreenderam que o comprimento da medida de segmento C tomava cinco partes da subdivisão da unidade de medida básica E.

Durante o movimento de resolução, questionamos: "*O que você está representando aqui nesse segmento de reta? O que o C representa aqui? O sete vai mudar aqui?*" (MESTRANDA – 15F). Estes questionamentos referem-se ao material impresso que as acadêmicas receberam para construção do segmento de reta C. Silvia (16F) expressa que "*não*". Voltamos a questionar: "*Por que ele não vai mudar?*" (MESTRANDA – 17F). Anna Carolina (18F) constata que não irá mudar: "*Porque o sete é o total, é o todo*". Portanto, ao designar que o sete se trata do todo, representado pela unidade de medida E, estamos afirmando que o número sete determina o número de vezes que a unidade E foi "subdividida" (FABIANA – 20F).

No decorrer da cena, não podemos desconsiderar a manifestação da acadêmica Anna Carolina (21F), quando estabelece a relação entre as partes e o todo de uma determinada medida, com aquela comumente vivenciada na escola, enquanto estudante: "*Lembra que quando nós íamos para a escola era uma pizza para gente? Aí a gente dividia em oito e pintava cinco*". Nesta manifestação, temos a síntese do modo de organização do ensino dos números fracionários, que conserva o elo com os conhecimentos cotidianos e correntes que os estudantes convivem fora da escola. Assim, não há distinção entre os conceitos científicos e os cotidianos, há uma aproximação exagerada entre a atitude propriamente científica e a cotidiana das coisas (DAVÝDOV, 1982), conforme discutiremos no próximo capítulo.

Na continuidade desta cena, Karen (22F) questiona: "*Eu coloquei no meio, será que tem problema?*". Indicamos o ponto da reta correspondente a um sétimo e questionamos sobre o significado do valor de E na tarefa em estudo, a conclusão é que se tratava da unidade de medida básica. Portanto, a unidade de medida básica E deveria ser subdividida em partes iguais: "*[...] na verdade ela é subdividida em sete*" (ANNA CAROLINA – 28F). Confirmamos que as acadêmicas identificaram que a unidade de medida E foi subdividida em sete partes iguais e que esta representava a unidade de medida inteira ao questionarmos: "*O que é um inteiro?*" (MESTRANDA – 34F). As acadêmicas (35E) reafirmam que o inteiro é a unidade de medida E. Novamente, provocamos a reflexão: "*Por que o C não vai até o sete sétimos?*" (JOSÉLIA – 36F). Por fim, as acadêmicas (37F e 38F) concluem: "*Porque é cinco sétimos [sic]*" e "*Porque é só cinco pedacinhos de sete*". Portanto, consideraram que a subdivisão (E) se repetia por cinco vezes na construção da grandeza contínua comprimento cuja medida algébrica era C.

Ao constatar alguns indícios de apropriação da gênese do conceito de fração durante o desenvolvimento das tarefas anteriores, encaminhamos as reflexões em direção à síntese, no contexto geométrico do conceito de número, conforme o episódio 4, a seguir.

2.4 EPISÓDIO 4 – CONSTRUÇÃO DA RETA NUMÉRICA E LOCALIZAÇÃO DO PONTO CORRESPONDENTE A $\frac{13}{7}$ (TAREFA 4)

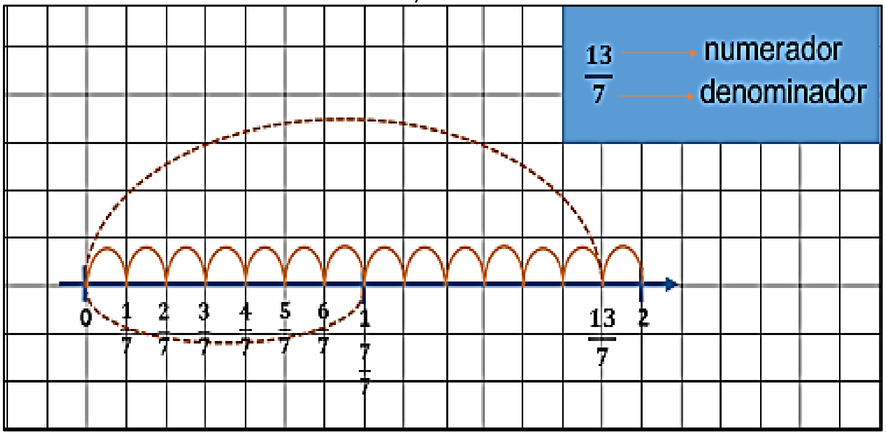
Na tarefa 4, as acadêmicas construíram a reta numérica e nela localizaram o ponto correspondente a $\frac{13}{7}$. No movimento de construção e reflexão dos elementos envolvidos na resolução da tarefa, as acadêmicas estabeleceram algumas relações de igualdade e desigualdade (*maior que*, *menor que* ou *igual*) entre números fracionários na reta numérica.

2.4.1 Cena 1 – Relação de igualdade e desigualdade entre números fracionários na reta numérica (Tarefa 4)

A cena 1 expressa a construção da reta numérica com duas unidades inteiras e, posteriormente, a localização do ponto correspondente a $\frac{13}{7}$, realizada pelas acadêmicas, conforme apresentamos na transcrição.

Transcrição da cena 1:

1*Mestranda: – Como podemos representar na reta numérica? Um número inteiro é onde? Do zero até onde? A parte inteira, olhando na reta numérica é até onde?
2*Patrícia: – Até no um.
3*Mestranda: – E depois, do um até onde?
4*Patrícia: – Até o dois.
5*Mestranda: – Mas o que ele está pedindo na tarefa?
6*Patrícia: – Treze sétimos.
7*Mestranda: – Vamos subdividir a unidade em quantas partes?
8*Karen: – Até o sete, é um.
9*Mestranda: – E nós chegamos ao um [na reta numérica]?
10*Karen: – Inteiro.
11*Mestranda: – Como representaríamos a próxima fração?
12*Karen: – Oito sobre sete, oito sétimos.
13*Mestranda: – E na sequência?
14*Acadêmicas: – Nove sétimos, dez sétimos, onze sétimos, doze sétimos, treze sétimos.
15*Figura 18 – Localização de $\frac{13}{7}$ na reta numérica



Fonte: Elaboração nossa, com base na produção das acadêmicas (2017) e Freitas (2016).
16* Mestranda: – Treze sétimos é menor ou maior que dois?
17*Acadêmicas: – Menor.
18* Mestranda: – Maior ou menor que um?
19*Acadêmicas: – Maior.
20*Anna Carolina: – No caso, ele é maior porque ele é maior que sete; se fosse sete sétimos, ele seria...
21* Mestranda: – Um inteiro.
22*Clarisse: – Só fecha um inteiro quando o numerador se igualar ao denominador.
23* Mestranda: – Isso. Então nós podemos dizer que o treze é o...
24*Acadêmicas: – Numerador.
25*Mestranda: – E o sete?
26*Acadêmicas: – Denominador.

A resolução iniciou com a construção da reta numérica em uma folha em branco. Nesta, marcaram duas unidades inteiras com os números zero, um e dois. E, posteriormente, após refletirem sobre o número de subdivisões de cada unidade, localizaram o ponto correspondente a $\frac{13}{7}$. Para tanto, constataram que as unidades seriam subdivididas em sete partes iguais, de modo que treze delas seriam consideradas.

Iniciamos esse processo com o seguinte questionamento: *“Como podemos representar na reta numérica? O número inteiro vai até onde? Parte do zero até onde? A parte inteira, na reta numérica está representada até qual número?”* (MESTRANDA – 1F). Patrícia (2F e 3F) constata que é *“até o número um”* e, depois do um, *“até no dois”*, de modo que as duas unidades inteiras fossem representadas. Contudo, as duas unidades inteiras não atendiam à necessidade prevista na tarefa, pois requeriam a localização do ponto na reta numérica correspondente a um número facionário $\left(\frac{13}{7}\right)$.

Para orientar as reflexões em direção à resolução da tarefa, questionamos: “*Vamos subdividir a unidade em quantas partes?*” (MESTRANDA – 7F). As acadêmicas respondem que será subdividida em sete partes iguais: “até o sete, é um” inteiro (KAREN – 8F). Nesse momento, todas as acadêmicas já haviam registrado os números $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ e $\frac{7}{7}$ em suas respectivas folhas. Propusemos, então, a continuidade no coletivo (no *slide*): “*Como representaríamos a próxima fração?*” (MESTRANDA – 11F). Karen (12F) manifesta-se: “*Oito sobre sete, oito sétimos*” e na continuidade em coro (14F) continuam: “*Nove sétimos, dez sétimos, onze sétimos, doze sétimos, treze sétimos*”. Conforme as acadêmicas iam falando os números, eles “apareciam” no *slide* projetado no quadro.

O contexto era propício para proceder a algumas relações de igualdade e desigualdade (*maior que*, *menor que* ou *igual*) dos números representados na reta numérica: “*Treze sétimos é menor ou maior que dois*?” (MESTRANDA – 16F). As acadêmicas (17F e 19F) constatam que é menor que dois e maior que um. A partir desta relação comparativa, apresentam a seguinte ponderação: “*No caso, ele é maior porque ele é maior que sete; se fosse sete sétimos, ele seria*” um inteiro (ANNA CAROLINA – 20F). Em síntese: “*Só fecha um inteiro quando o numerador se igualar ao denominador*” (CLARISSE – 22). Tais constatações estão sustentadas na gênese do conceito de fração revelada nas tarefas precedentes no contexto geométrico do número. Como afirma Rosa (2012), a reta numérica é um elemento mediador indispensável para a compreensão do conceito de número para além dos inteiros.

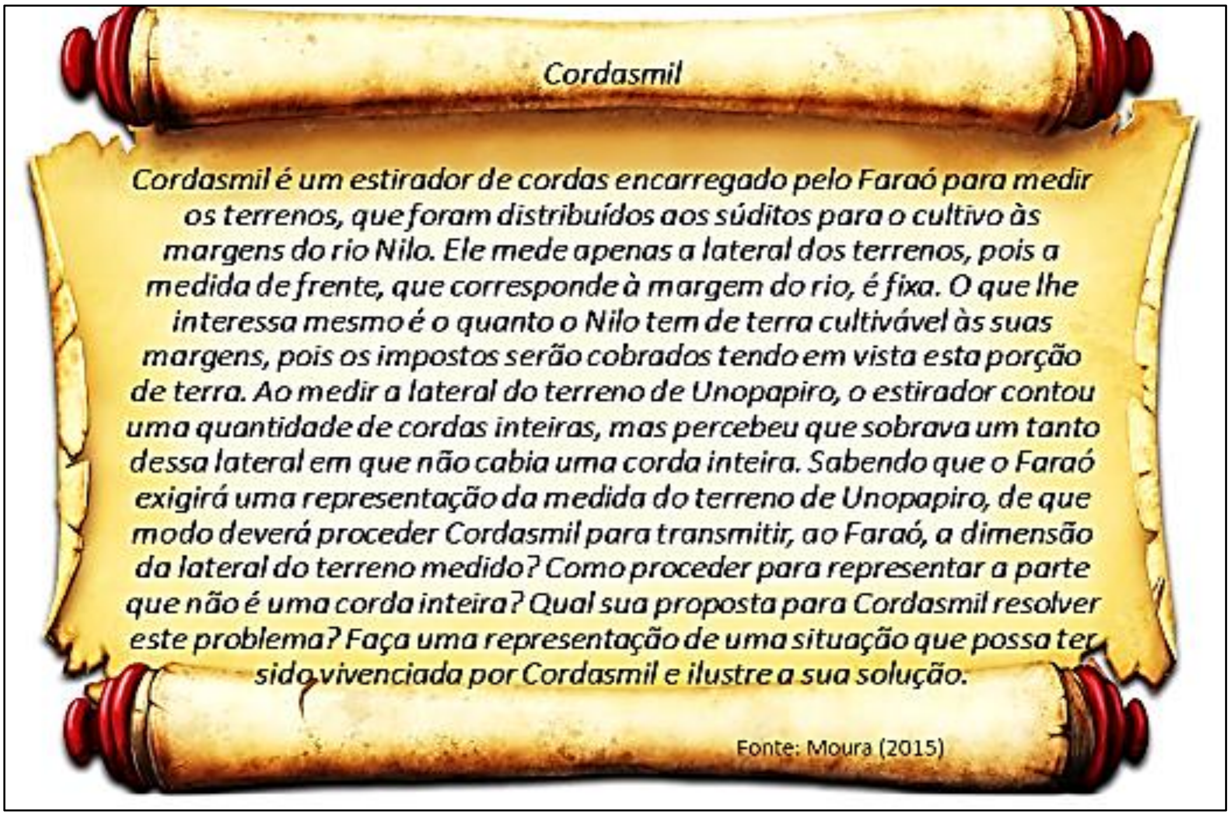
E assim concluímos o primeiro encontro sobre fração, com o desenvolvimento de 4 tarefas davydovianas. Mas, o que ficou para as acadêmicas? Do que elas se apropriaram? Buscamos respostas para esses dois questionamentos no encontro da semana seguinte a partir da situação desencadeadora de aprendizagem referente à *História Virtual* de Cordasmil (MOURA, 2015), conforme o próximo episódio.

2.4 EPISÓDIO 5 – SITUAÇÃO DESENCADEADORA DE APRENDIZAGEM – HISTÓRIA VIRTUAL CORDASMIL (TAREFA 5)

No segundo encontro previsto no plano de ensino da disciplina para o conceito de fração, iniciamos com a resolução da situação desencadeadora elaborada pelo Professor Doutor Manoel Oriosvaldo de Moura (Prof. Ori) no contexto do GEPAPe (USP), intitulada Cordasmil (MOURA, 2015). Posteriormente, o pesquisador do TedMat (UNISUL), Cleber de Oliveira dos Santos, resolveu matematicamente o problema desencadeador vivenciado por Cordasmil (SANTOS, 2017). Durante a resolução, Santos considerou o movimento conceitual correspondente à lógica dialética, tal como sugerem Davýdov e colaboradores.

A resolução do problema desencadeador de aprendizagem, proposto na História Virtual Cordasmil, ocorreu no segundo encontro reservado no plano de ensino da disciplina para o conceito de fração. Iniciamos com a leitura da História Virtual (Figura 19), exposta em *slide* no quadro.

Figura 19 – História Virtual Cordasmil (Tarefa 5)



Fonte: Moura (2015, *slide* 24).

Após a leitura, distribuímos para cada acadêmica um pedaço de barbante, que representava uma corda e um recorte de cartolina em formato retangular para representar o terreno. Todos de medidas diferentes.

A resolução do problema principiou-se individualmente, depois em duplas, para, em seguida, exporem suas reflexões no coletivo. Finalmente configurou-se a síntese, a fim de destacar a terminologia adequada e revelar a lei (o modelo) que estava subjacente às manifestações das acadêmicas durante o processo de resolução.

As reflexões que constituem a cena 1 estiveram pautadas nas necessidades vivenciadas por Cordasmil, cuja superação deriva da solução à problemática desencadeadora de aprendizagem: de que modo seria representada a dimensão da lateral do terreno a ser medido? Como proceder para representar a parte que não era uma corda inteira? Essa necessidade histórica que deu origem ao conceito de número fracionário também foi vivenciada pelas acadêmicas durante a resolução do problema de Cordasmil, conforme exposto na cena a seguir.

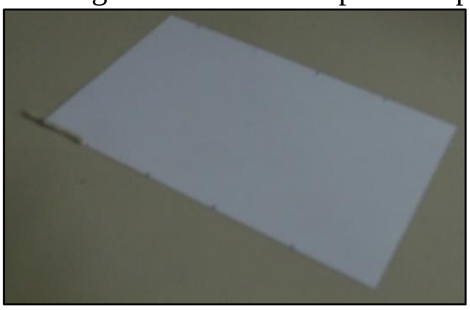
2.5.1 Cena 1 – Movimento de síntese das reflexões anteriores

Nesta cena, as acadêmicas determinaram a solução do problema desencadeador de aprendizagem, a História Virtual Cordasmil. Este contemplava a necessidade de determinar a dimensão da lateral do terreno que sofria com as cheias do Rio Nilo, pois ela mudava de comprimento a cada cheia do rio. O movimento de resolução desse problema contextualizado na transcrição a seguir.

Transcrição cena 1:

1*Mestranda: – Com o terreno [recorte de cartolina] e com a corda [barbante] que vocês receberam resolvam o problema desencadeador apresentado na História Virtual de Cordasmil (Fotografia 1).

2*Fotografia 1 – Material para o experimento objetal

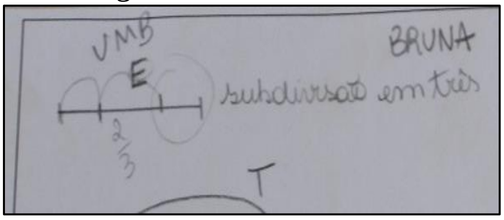


Fonte: Acervo da pesquisa, registro fotográfico de Mariana Fontes, 2017.

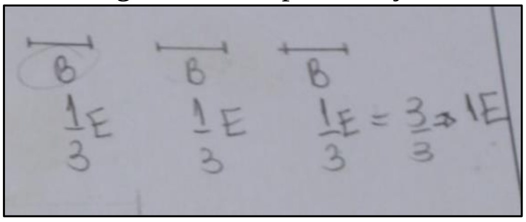
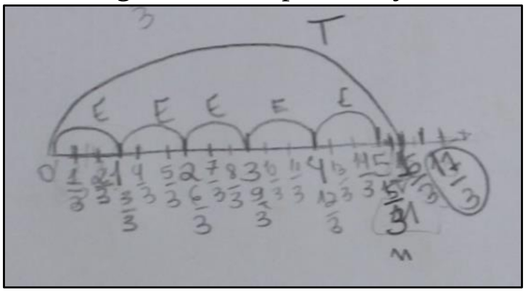
3*Bruna: – Essa é a representação do que tem [terreno e corda], mas como resolver o problema? Para eu resolver o problema tinha que diminuir a corda. Dois terços, é isso?

4*Mestranda: – Pensa mais um pouco.
5*Karen: – Se eu for subdividir, no meu caso aqui ficou em três, daquela parte ali (Figura 21).
6* Fotografia 2 – Medição do terreno

Fonte: Acervo da pesquisa, registro fotográfico de Mariana Fontes, 2017.
7*Josélia: – Você está no caminho.
8*Karen: – Mas ainda não é?
9*Josélia: – Nós vamos ter sempre alguma coisinha para complementar. Queremos ver até onde vocês conseguem ir sozinhas.
10*Karen: – Eu sei que o C é a corda, o T é o terreno. Temos um pedaço de corda. Sei que, se pegar essa corda inteira e subdividir ela em três, vai dar dois terços [*sic*].
11*Bruna: – É o que a gente precisa [*sic*].
12*Karen: – Então vai dar dois terços.
13*Bruna: – Um terço de E [comprimento da corda], cada pedacinho de T vai ser um terço de E [subdividiu o terreno inteiro em partes iguais a $\frac{1}{3}$E] e a unidade inteira [corda] forma um E. O E é a unidade de medida básica, só que como a gente representa isso na reta?
14*Karen: – Aqui ficaria: T é igual a três cordas, porque aqui a gente não saberia [refere-se à parte do terreno menor que uma unidade E, que necessita ser fracionada].
15*Bruna: – O que está pedindo lá? De que modo deverá ser medida a dimensão lateral? Um lado, o lado que é o todo é igual a quanto? O lado é igual a cinco E, só que não é só cinco E, porque falta uma parte. O lado é igual a 5E e dois terços, entendeu? Então não é igual a 5E. Esse é o problema, não tem como ser só 5E se não é só 5E, tem mais dois terços ali (Figura 22). E como é que a gente representa isso?
16* Fotografia 3 – Reflexão da acadêmica Bruna sobre dois terços



Fonte: Acervo da pesquisa, registro fotográfico de Mariana Fontes, 2017.
17*Karen: – Não é lado? T sobre E igual a cinco E $\left[\frac{T}{E} = 5\right]$.
18*Bruna: – O que eu quero saber é o T, entendeu? E esse faz parte do T, o T é tudo, é isso tudo, esse aqui faz parte do T. A representação geométrica. A gente não sabe se é dois terços, pode ser 5.
19*Lara: – Aqui pode ser dois terços.
20*Bruna: – Não pode. Isso não é um terço, é um inteiro, a gente dividiu.
21*Lara: – Eu tenho que a unidade de medida básica aqui é o E. Então aqui é o três $\left[3 \times \frac{1}{3}\right]$.

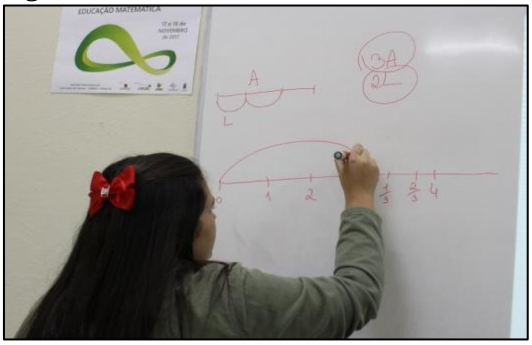
22*Bruna: – Sim.
23*Lara: – Que seria um terço. Mas aí se eu tiver mais um, vou completando. Aqui eu completei, posso botar mais?
24*Bruna: – Lara, olha aqui, eu medi que eram cinco, mais dois terços. Eu medi e seriam dois terços aqui. Eu representei assim: um E, dois E, eu chamei de E cada corda inteira, três E, quatro E, cinco E, mais dois terços aqui, porque faltou um pedaço. Aí eu pensei, ele tem que ajudar o Faraó porque ele tem que ter uma representação exata, aí se a gente dividisse a corda como aqui é um, deu dois terços, porque aqui faltou um. Para completar uma unidade inteira tem que dividir em três, aí cada pedaço dessa corda seria um terço (Figura 28).
25* Fotografia 4 – Representação da acadêmica Bruna

Fonte: Acervo da pesquisa, registro fotográfico de Mariana Fontes, 2017.
26*Lara: – Certo.
27*Bruna: – Cada vez é um terço de E, certo? Aí a representação na reta ficou assim. O que a gente pensou: um todo que é o T dividido pelo E, que é cada corda inteira, é a unidade de medida básica.
28*Lara: – Dá cinco.
29*Bruna: – Dá cinco, só que ainda tem esse pedaço, se eu colocar mais dois terços não fica correto, né [*sic*]?
30*Lara: – O que você poderia fazer?
31*Bruna: – Esse é o problema, eu não sei.
32*Lara: – Se eu pegasse aquela corda.
33*Bruna: – Cada pedacinho?
34*Lara: – Sim.
35*Bruna: – Dentro teria três, tipo: um pedaço, dois pedaços, três pedaços. Aqui seria um terço, dois terços e aqui? Não, está errado.
36*Lara: – Está certo.
37*Bruna: – E o zero?
38*Lara: – Não é zero.
39*Bruna: – Não começou dali, tecnicamente ali é o zero (Figura 24).
40* Fotografia 5 – Representação da acadêmica Bruna na reta numérica

Fonte: Acervo da pesquisa, registro fotográfico de Mariana Fontes, 2017.
41*Lara: – Mas aí a gente estava tentando achar alguma coisa que representasse.
42*Bruna: – Então, Lara, a gente tinha isso aqui, certo? Se a gente subdividiu em frações tudo e cada pedacinho, vai dá o quê? E como a gente subdividiu ficou T sobre E igual a dezessete terços $\frac{T}{E} = \frac{17}{3}$. Até chegar aqui eram quinze terços, mais

aqueles dois terços. Agora o todo [corda inteira] que é igual a cinco E. Mais dois terços. Agora ficou T igual a 15B, que é a corda mais dois terços. Só que o B é quinze terços, aí dá de somar, T igual a dezessete sobre três $T = \frac{17}{3}E$. B é a corda que foi partida [unidade de medida intermediária]. Somava. Mais um terço, mais um terço, mais um terço. É a mesma coisa. Multiplicou cinco vezes porque é um terço, mais um terço, mais um terço, mais um terço, mais um terço.

43*Mestranda: – Quem vai explicar como pensou essa tarefa no quadro?

44*Anna Carolina: – [Desenhou o segmento que representava o lado do terreno] Eu e Letícia colocamos letras para representar as cordas, para ficar mais fácil. A corda grande a gente colocou A. No meu terreno coube três A e um pedaço. Aí essa corda a gente propôs em dividir em três partes. Para cada pedaço a gente colocou L. No meu terreno coube três A e dois L [3A + 2L]. No caso, três cordas inteiras e dois pedaços (Figura 25).

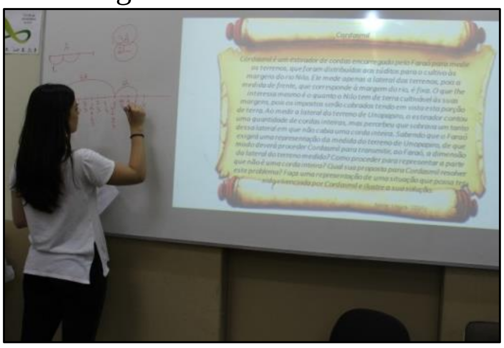
45* Fotografia 6 – Explicação de Anna Carolina a partir de elementos geométricos, algébricos e aritméticos



Fonte: Acervo da pesquisa, registro fotográfico de Mariana Fontes, 2017.

46*Bruna: – O que a gente fez de diferente do que as meninas pensaram. Eu e a Lara pensamos: a minha deu cinco pedaços e ficou faltando, ou melhor sobrando um pedacinho. A gente também subdividiu a corda em três, para pegar os dois terços. Ficou a mesma coisa. Mas a única coisa que a gente fez foi inserir aqui [inseriram as subdivisões da unidade na reta].

47* Fotografia 7 – Inclusão das unidades de medida intermediárias, por Bruna, na reta



Fonte: Acervo da pesquisa, registro fotográfico de Mariana Fontes, 2017.

48*Bruna: – A gente foi inserindo aqui dois terços, três terços, quatro terços [até completar dezessete terços na reta numérica].

48*Anna Carolina: – Não, aí é doze terços.

49*Bruna: – A nossa é cinco pedaços [5E]. Então, o que a gente fez, subdividiu cada pedaço; do zero ao um, é um pedaço do que a Anna Carolina chamou de A, pedaço de corda que a história propôs. Cada pedacinho desse aqui é um pedacinho de L. Ao invés da gente contar um, dois, três, quatro, cinco, que são cinco pedaços de A, que deu o meu pedaço, que seria o terreno igual a cinco mais dois terços$\left[T = 5 + \frac{2}{3}\right]$, a gente subdividiu tudo, que seria 5A, a gente subdividiu tudo que ficou T igual a quinze terços de L mais dois terços $\left[T = \frac{15}{3} + \frac{2}{3}\right]$.

50*Letícia: – Uma pergunta.

51*Bruna: – Só um pouco. A gente somou e deu T igual a dezessete terços $\left[T = \frac{17}{3}\right]$.

52*Letícia: – Quanto sobrou?

53*Bruna: – O nosso sobrou dois terços, aí a gente foi somando tudo para chegar ao resultado total que foi $\frac{17}{3}$. Vocês entenderam meu raciocínio?

54*______: – As acadêmicas gesticulam que sim.

55*Silvia: – Eu quero explicar.

56*Silvia: – Dividimos [Silvia e Ana Paula] o terreno e conseguimos três cordas inteiras, essa é a medida da corda [representou um arco do zero ao um]. Ou seja, três cordas inteiras. Depois tivemos que subdividir em dois [refere-se à subdivisão da corda].

57*Nilma: – Como assim?

58*Silvia: – Em dois pedaços, aqui nós consideramos três cordas inteiras, mais um meio.

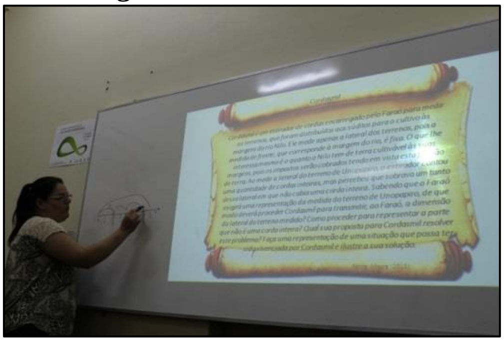
59*Nilma: – Como?

60*Silvia: – A medida da nossa corda era essa aqui [mostra no quadro do zero ao um] e é P. Então conseguimos uma corda, duas cordas, três cordas e mais uma parte da subdivisão, que é meia corda $\left[\frac{1}{2}P\right]$.

61*Nilma: – Entendi.

62*Silvia: – O dois quer dizer que subdividiu duas vezes. O outro [explicação anterior] deu três embaixo porque foi subdividido por três, entendeu? (Fotografia 8).

63* Fotografia 8 – Subdivisão da unidade em duas partes por Silvia e Ana Paula



Fonte: Acervo da pesquisa, registro fotográfico de Mariana Fontes, 2017.

64*Mestranda: – Quais elementos temos a partir do problema de Cordasmil?

65*Acadêmicas: – Cordas

66*Mestranda: – O que mais?

67*Acadêmicas: – Uma corda inteira.

68*Mestranda: – Que a gente chama de...?

69*Acadêmicas: – Unidade básica.

70*Mestranda: – E nós temos?

71*Acadêmicas: – O terreno.

72*Mestranda: – Esse segmento de reta [exposto no *slide* projetado no quadro] vai representar a medida da lateral do terreno. Como o Cordasmil poderá proceder para realizar essa medição?

73*Letícia: – Colocar corda e medir e o que sobrar subdividir.

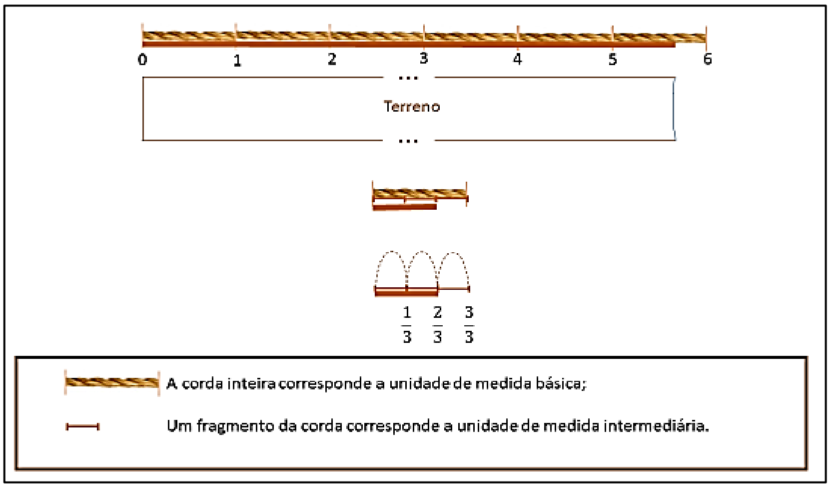
74*Mestranda: – Então nós temos aqui a unidade de medida básica, que é o que mesmo?

75*Acadêmicas: – A corda.

76*Mestranda: – A corda?
78*Acadêmicas: – Inteira.
79*Mestranda: – Então, ela coube?
80*Acadêmicas: – Uma, duas, três, quatro, cinco [os arcos apareciam nos *slides*].
81*Mestranda: – Coube seis?
82*Acadêmicas: – Não.
83*Mestranda: – Não coube, o que nós temos que fazer?
84*Acadêmicas: – Subdividir a corda.
85*Mestranda: – Foi possível encontrar a medida do terreno a partir da unidade básica?
86*Acadêmicas: – Não.
87*Mestranda: – Temos o terreno, o que nós podemos fazer com a parte que não coube?
88*Acadêmicas: – Subdividir.
89*Mestranda: – Em quantas partes?
90*Acadêmicas: – Três.
91*Mestranda: – Três partes.
92*Acadêmicas: – Um terço, dois terços, três terços [tal subdivisão aparece no *slide*].
93*Mestranda: – Subdividimos em três partes. Então nós temos que a corda inteira corresponde à unidade de medida básica e um fragmento da corda. Cada parte da corda representa?
94*Acadêmicas: – A unidade intermediária.
95*Mestranda: – No modelo $y = n + \frac{1}{p}.k$, o que representa o Y? [modelo exposto no *slide*].
96*Acadêmicas: – É o terreno.
97*Mestranda: – O que representa?
98*Acadêmicas: – Todo.
99*Mestranda: – O que representa o N?
100*Acadêmicas: – A corda.
101*Mestranda: – O que é a corda?
102*Acadêmicas: – A unidade de medida básica.
103*Mestranda: – O que é um sobre P $\left[\frac{1}{p}\right]$?
104*Acadêmicas: – Intermediária.
105*Mestranda: – E o K?
106*Acadêmicas: – Quantas vezes ela se repete.
107*Letícia: – A intermediária no caso é cada pedacinho daquele ali.
108*Mestranda: – Quem dividiu por três a intermediária, vai ser?
109*Acadêmicas: – Um terço.
110*Mestranda: – Quem dividiu por quatro?
111*Acadêmicas: – Um quarto.
112*Silvia: – Mas o K é quantas vezes eu usei, no meu caso eu usei duas partes, então o K é dois.
113*Mestranda: – Todas vocês chegaram a essa síntese?
114*Acadêmicas: – Sim.

Esta cena contempla o movimento subjacente à resolução do problema desencadeador da História Virtual de Cordasmil, que foi apresentado em sua forma geral, constituída de um terreno retangular e uma corda de qualquer medida. No experimento objetal, realizamos a medição da lateral do terreno, por meio da grandeza comprimento. Na turma, havia vários tamanhos de terrenos (recortes de cartolina retangular) assim como também vários comprimentos de cordas (barbantes). A seguir, apresentamos, a título de ilustração, um dos tamanhos de corda e terreno que distribuímos para a turma (Figura 20).

Figura 20 – Concreto ponto de partida



Fonte: Elaboração nossa, com base na produção das acadêmicas (2017) e Santos (2017).

Partimos da unidade de medida básica (corda) que, por ser insuficiente para medição, gerou a necessidade do número fracionário: "*Para eu resolver o problema tinha que diminuir a corda*" (Bruna – 3F). Estabelecemos, assim, o concreto ponto de partida, para revelar a relação que dá origem ao número fracionário: "*Eu medi e seriam dois terços aqui. Eu representei assim: um E, dois E, eu chamei de E cada corda inteira, três E, quatro E, cinco E, mais dois terços aqui, porque faltou um pedaço*" (BRUNA – 24F).

Neste sentido, para que as acadêmicas obtivessem o conhecimento em nível concreto ponto de chegada (pensado) foram necessárias sucessivas abstrações. "*Cada vez é um terço de E, certo? Aí a representação na reta ficou assim. O que a gente pensou: um todo que é o T dividido pelo E, que é cada corda inteira, é a unidade de medida básica* (BRUNA – 27F). "*Dentro teria três, tipo: um pedaço, dois pedaços, três pedaços. Aqui seria um terço, dois terços*" (BRUNA – 35F). Por meio destas sucessivas abstrações, constatamos que as acadêmicas se orientaram, em suas reflexões, pelas relações internas do conceito de fração. O que possibilitou a revelação da relação universal do conceito, expressa na unidade de medida básica, na unidade de medida intermediária e no total de unidades de medidas intermediárias. Para Davídov (1988, p. 182, tradução nossa),

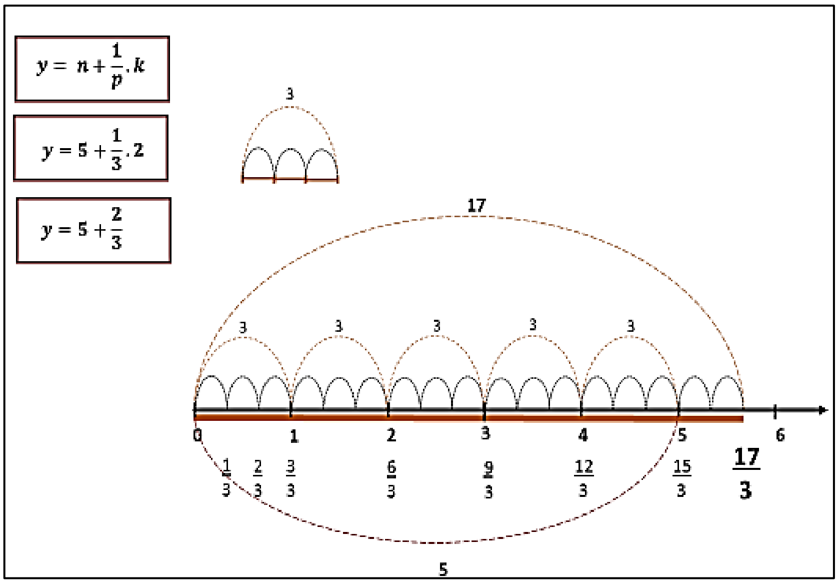
> A peculiaridade desta relação consiste, por uma parte, o aspecto real dos dados transformados e, por outra parte, atua como base genética e fonte de todas as peculiaridades do objeto integrante, quer dizer, constitui sua relação universal. A busca desta forma o conteúdo da análise mental, no qual, sua função de estudo aparece

> como o momento inicial do processo de formação de conceitos necessários. Ao mesmo tempo, devemos levar em conta que a ação do estudo examinada, cuja base se encontra na análise mental, tem que começar na forma de transformação dos dados do objeto da tarefa de estudo (esta ação mental se realiza, no começo, na forma objetal - sensorial).

A necessidade da unidade de medida intermediária, menor que a unidade, que dá origem ao conceito de número fracionário foi contemplada: "*Até chegar aqui eram quinze terços, mais aqueles dois terços. Agora o todo que é igual. [...] Agora o todo [corda inteira] que é igual a cinco E. Mais dois terços. Agora ficou T igual a 15B, que é a corda mais dois terços. Só que o B é quinze terços, aí dá de somar, T igual a dezessete sobre três* $T = \frac{17}{3}E$*. B, que é corda que foi partida [unidade de medida intermediária]. Somava. Mais um terço, mais um terço, mais um terço [...]*" (BRUNA – 42F). Desse modo, as acadêmicas constataram que sem uma medida intermediária menor que a unidade de medida básica, não seria possível medir a lateral do terreno. Em outras palavras, de posse apenas dos números inteiros, o problema de Cordasmil não teria solução. A partir desta necessidade, surge uma unidade de medida intermediária, que representa uma parte da medida básica, a qual possibilita a realização da medição.

O movimento de resolução percorrido pelas acadêmicas envolveu elementos aritméticos, algébricos e geométricos, e foram contemplados de modo indissociável, ou seja, estabeleceram relação com números, letras e a reta numérica. Tal relação, no exemplo que tomamos a título de ilustração, seria (Figura 21):

Figura 21 – Resolução por meio de elementos geométricos, algébricos e aritméticos



Fonte: Elaboração nossa, com base na produção das acadêmicas (2017) e Freitas (2016).

Refletimos a conexão entre os dados da tarefa e os elementos que constituem a relação universal, em sua forma geral (literal), que possibilita a resolução do problema de medição em análise, independentemente da medida do terreno e da corda. Portanto, trata-se de uma generalização, como demonstra a figura 22.

Figura 22 – Relações presentes no modelo

Y = Medida do terreno - o todo;
N = Medida da corda - unidade de medida básica;
$\left[\frac{1}{P}\right]$ = Unidade de medida intermediária - fragmento da corda;
K = Número de vezes que a medida intermediária se repete.

Fonte: Elaboração nossa, com base em Santos (2017).

Na perspectiva do Ensino Desenvolvimental, as representações algébricas, geométricas e aritméticas são indissociáveis para o processo de modelação. “Nos modelos visuais se refletem as relações e as vinculações essenciais ou internas do objeto, separadas (abstraídas) por meio das correspondentes transformações (o visual concreto habitualmente só se fixa as propriedades externamente observáveis das coisas)” (DAVÍDOV, 1988, p. 214, tradução nossa).

Assim, tornou-se possível a realização da modelação e a abstração a partir de um sistema de símbolos. As acadêmicas estabeleceram relação entre a modelação gráfica (segmentos, arcos e reta) e literal $\left(y = \ n + \frac{1}{p}.k\right)$, da relação universal que permite resolver o problema em análise em qualquer situação particular.[5] De acordo com Davídov (1988, p. 182, tradução nossa), “é importante notar que os modelos de estudo são internamente elo essencial no processo de assimilação de conhecimentos teóricos e procedimentos de ação generalizada”.

Os modelos expressam a relação universal do problema, onde os dados foram transformados de tal modo que as acadêmicas determinaram uma certa medida para E (fração), cuja adoção permitiu a determinação de quantas vezes a medida K cabia em N e em Y. Encontrar quantas vezes K cabia nas medidas N e Y possibilitou a determinação da relação de divisibilidade e de multiplicidade contida nesta resolução. Em outras palavras, segundo Rosa (2012), permitiu determinar a relação universal de multiplicidade e divisibilidade reproduzida no modelo para o conceito teórico de número. “*Agora o todo [corda inteira] que é igual a cinco*

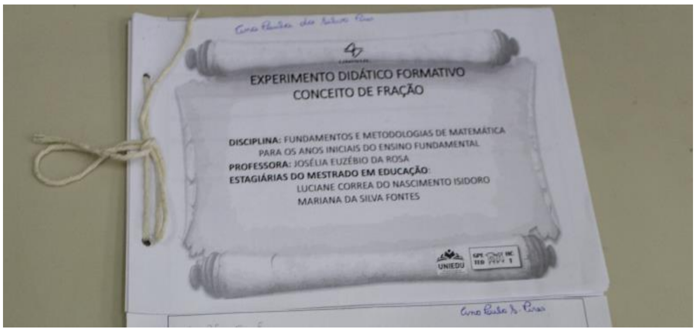
[5] É importante destacar que orientamos as reflexões das acadêmicas com base na modelação sistematizada por Santos (2017) ao refletir a resolução teórica do problema contido na História Virtual de Cordasmil elaborada por Moura (2015).

E. Mais dois terços. Agora ficou T igual a 15B, que é a corda mais dois terços. Só que o B é quinze terços, aí dá de somar, T igual a dezessete sobre três $T = \frac{17}{3}E$" (BRUNA – 42F). Com base na relação de divisibilidade e multiplicidade, que dá origem ao conceito de fração e da adição, o modelo foi revelado. Portanto, o modelo surge no contexto de um sistema conceitual matemático que envolve multiplicação, divisão, adição e equação.

Em síntese, a resolução do problema de Cordasmil desencadeou a revelação da conexão universal, a partir da relação entre o todo a ser medido, a unidade de medida básica e o surgimento da intermediária no contexto de medição da grandeza comprimento. O processo de modelação objetal gráfica e literal (*flashes* 2, 6, 16, 25 e 40) envolveu a interconexão de elementos aritméticos, algébricos e geométricos. Percorremos um movimento orientado do geral para o particular. Na história não havia valores específicos para as medidas, estes surgiram no experimento objetal.

A resolução de Cordasmil foi concluída antes do intervalo, primeira metade do encontro. Ao finalizar esta tarefa, as acadêmicas incluíram a última folha no caderno de tarefas sobre o conceito de fração, composto pelas cinco tarefas desenvolvidas nesses dois últimos encontros do semestre letivo (Fotografia 9).

Fotografia 9 – Caderno de tarefas: conceito de fração



Fonte: Acervo da pesquisa, registro fotográfico de Mariana Fontes, 2017.

Na volta do intervalo, propusemos às acadêmicas o mesmo instrumento avaliativo que apresentamos no primeiro encontro. As respostas apresentadas pelas acadêmicas no primeiro e no último encontro, a um mesmo instrumento avaliativo, será objeto de reflexão no próximo capítulo.

3 PENSAMENTO EMPÍRICO E TEÓRICO – MOVIMENTO DE TRANSIÇÃO E SUPERAÇÃO

Para investigar o processo de conhecimento das acadêmicas sobre o modo de organização do ensino do conceito de fração, fez-se necessário analisar as compreensões iniciais a partir dos relatos de experiência estudantil, das compreensões iniciais das acadêmicas sobre o referido conceito.

Esta ação possibilitou reflexões a respeito das expectativas das acadêmicas no que se refere à disciplina de Matemática. Verificamos se os conhecimentos iniciais das acadêmicas eram norteados pelo pensamento empírico ou teórico do conceito matemático de fração. As manifestações foram diversificadas, contudo as mais recorrentes foram: “Difícil, não gosto”, “não tive bons professores” e “tenho medo”. Estas manifestações indicam que o modo de organização do ensino de Matemática que as acadêmicas receberam na escola obstaculizou a aprendizagem e o gosto pela Matemática.

Neste contexto, refletimos sobre o modo de organização do ensino que desenvolveríamos durante o semestre letivo (2017-2). O objetivo foi desenvolver o pensamento teórico por via da apropriação dos conhecimentos científicos. Promovemos, com as acadêmicas, reflexões que possibilitassem fazer a crítica ao modo de organização de ensino vivenciado por elas e atualmente desenvolvido nas escolas da região, por meio da apropriação de um novo modo de organização de ensino, o desenvolvimental.

Para análise da produção final das acadêmicas, consideramos o movimento percorrido durante a realização das tarefas, apresentado no segundo capítulo. Por meio das tarefas desenvolvidas houve a significação e a ressignificação do modo de organização de ensino do conceito de fração, em que a necessidade historicamente produzida possibilita o movimento gerador do conhecimento do conceito.

Refletiremos sobre o movimento percorrido pelas acadêmicas do primeiro ao último momento de coleta de dados. Ao capturar e analisar as manifestações das acadêmicas, constatamos que elas expressam seus pensamentos como reflexo da realidade investigada. Compreendemos que este reflexo pode ser empírico, característico da escola tradicional[6] ou teórico, tal como propõe o ensino desenvolvimental.

---

[6] Segundo Davídov (1987, p. 143, tradução nossa), entende-se pelo termo *escola tradicional* “um sistema relativamente único de educação europeia, e que, em primeiro lugar, se formou no período de nascimento e florescimento da produção capitalista e ao qual serviu”.

No pensamento empírico, “é característica uma relação cotidiana, utilitária para as coisas e por isto é contrária à valorização e compreensão teórica da realidade” (DAVÍDOV, 1988, p. 06, tradução nossa). No teórico, a essência “consiste em que se trata de um procedimento especial com o que o homem enfoca a compreensão das coisas e os acontecimentos por via de análise das condições de sua *origem e desenvolvimento”* (DAVÍDOV, 1988, p 174, tradução nossa, grifos do autor).

Ao analisar o conhecimento das acadêmicas, com base nestes dois tipos de pensamento, perseguimos as manifestações que evidenciavam as ações que geraram um ou outro. Para tanto, insistimos nos seguintes questionamentos: qual o teor conceitual (empírico ou teórico) subjacente à organização do ensino do conceito de fração apresentada no primeiro dia de aula? Qual o teor conceitual (empírico ou teórico) subjacente à organização do ensino do conceito de fração após a realização do experimento didático-desenvolvimental (último dia de aula)? Para responder a estas questões, elaboramos e propusemos às acadêmicas a seguinte situação hipotética, apresentada anteriormente, para que respondessem individualmente:

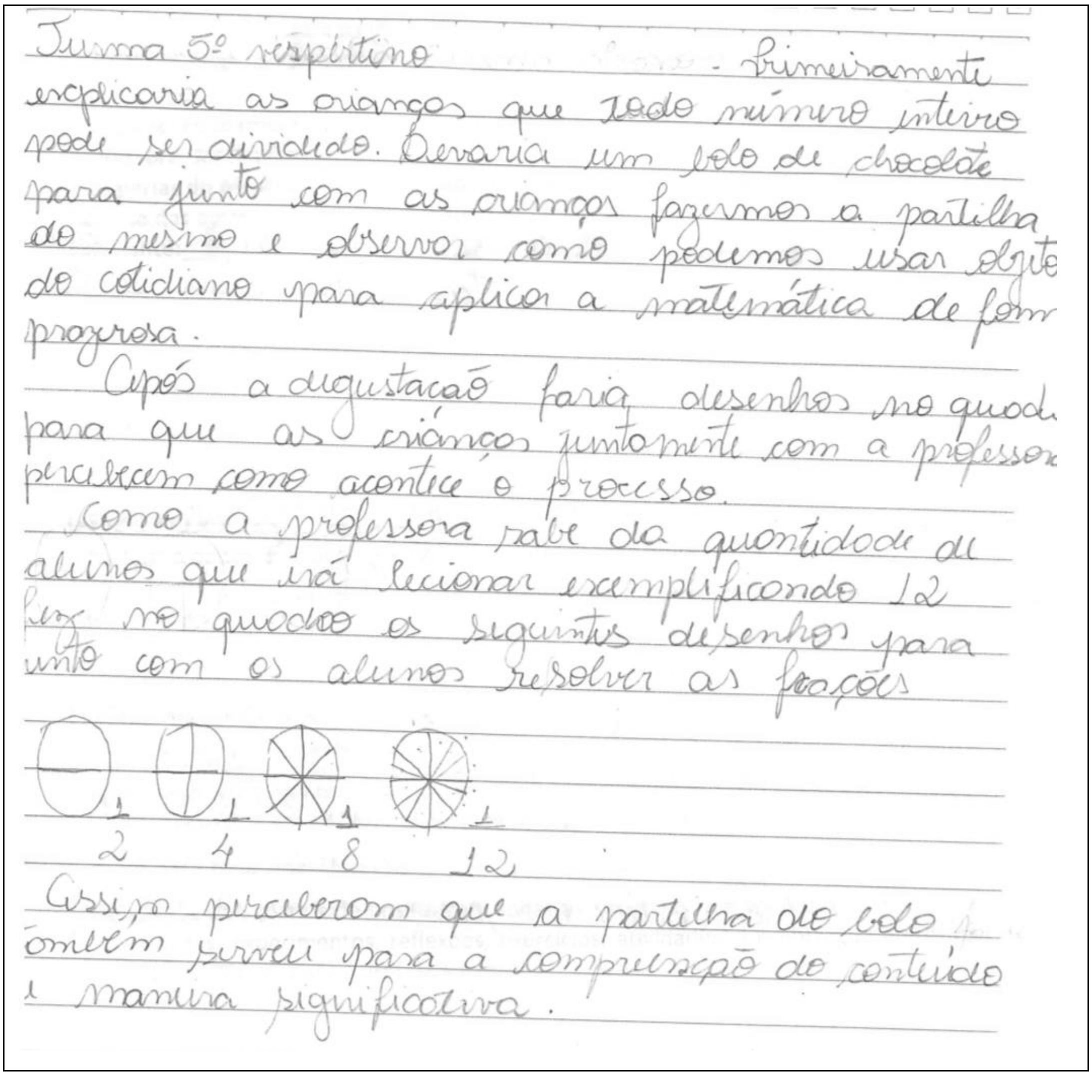
> *Imagine que você foi convidado (a) para lecionar em uma turma de quinto ano de uma escola da Rede Estadual de Educação de Santa Catarina, a partir de amanhã. Durante todo o período vespertino, você deverá ensinar fração. É importante ressaltar que o professor anterior ainda não abordou esses conceitos. Além disso, você não tem tempo disponível para pesquisar sobre o assunto. Portanto, o plano de ensino terá que ser elaborado a partir do que você já sabe sobre fração. Como você faria esse plano? Você tem até às 22h30min de hoje para planejar essas aulas e enviar o plano de ensino ao diretor da escola com ações detalhadas para o período inteiro, ou seja, cinco aulas sobre fração. Elabore o plano de ensino com todas as situações que você desenvolveria nas duas turmas (explicações, experimentos, reflexões, exercícios, atividades...) e entregue até o final do presente encontro (22h30min) para a professora Josélia.*

Buscamos, nos dados capturados a partir das respostas a esta situação, elementos que nos dessem pistas sobre o teor conceitual subjacente ao modo de organização de ensino apresentado pelas acadêmicas. Perseguimos, como unidade de análise, a relação entre pensamento empírico e pensamento teórico. Nas respostas apresentadas no último dia de aula detectamos indícios de superação do modo de ensino empírico contemplado no primeiro dia de aula. Dentre as diversas manifestações, selecionamos aquelas que apresentam de forma mais explícita o teor conceitual subjacente a todas as respostas.

3.1 CONHECIMENTO EMPÍRICO

Na resolução do instrumento avaliativo proposto no primeiro encontro, Patrícia apresentou uma situação sustentada na ideia de que a relação do conteúdo com o cotidiano da criança torna um meio facilitador de aprendizagem: "*Observar como podemos usar um objeto do cotidiano para aplicar matemática de forma prazerosa*" (Figura 23).

Figura 23 – Proposição de Patrícia no primeiro dia de aula



Turma 5º vespertino - Primeiramente
explicaria as crianças que todo número inteiro
pode ser dividido. Levaria um bolo de chocolate
para junto com as crianças fazermos a partilha
do mesmo e observar como podemos usar objeto
do cotidiano para aplicar a matemática de form
prazerosa.
Após a degustação faria desenhos no quadr
para que as crianças juntamente com a professor
percebam como acontece o processo.
Como a professora sabe da quantidade de
alunos que irá lecionar exemplificando 12
fiz no quadro os seguintes desenhos para
junto com os alunos resolver as frações

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{12}$

Assim perceberam que a partilha do bolo f
ontem serviu para a compreensão do conteúdo
e maneira significativa.

Fonte: Acervo da pesquisa. Elaboração da acadêmica Patrícia (2017).

Neste caso, o objeto do cotidiano estava representado por um bolo que seria partilhado com as crianças por meio de seu fracionamento. Porém, segundo Davídov (1987), este modo de ensino impossibilita o estudante a ir além do conhecimento de seu cotidiano.

> [...] o ensino utiliza unicamente as possibilidades já formadas e presentes na criança, em cada caso se pode, então, limitar tanto o conteúdo do ensino como as exigências apresentadas à criança a este nível real 'presente' sem responsabilizar-se por suas premissas. Naturalmente, assim se pode justificar a limitação e a pobreza do ensino primário, apelando a características evolutivas da criança [...] (DAVÍDOV, 1987, p. 147, tradução nossa).

Esta limitação, presente no modo de ensino empírico, impossibilita o avanço do conhecimento científico, de modo que a aprendizagem de determinado conteúdo é realizada de forma semelhante à aprendizagem do conhecimento cotidiano. Isso implica na "redução do conteúdo do conceito aos dados sensoriais, à descrição do processo de formação do conceito só como mudança da forma em que se expressam os traços comuns do objeto" (DAVÍDOV, 1988, p. 105, tradução nossa). Em outras palavras, o conhecimento empírico não avança sua reflexão para além das aparências. Assim, ele corresponde a ações mentais de abstração e generalização empíricas (ou formais) geradoras de conceitos também empíricos (DAVÍDOV, 1988). A fração e distribuição do bolo, em si, não revela a gênese do conceito de número fracionário. Ao contrário, reduz o conceito à sua base sensorial, foca somente no reflexo das propriedades externas do objeto, neste caso, da quantidade de fatias de bolo e desencadeia generalização e abstração empíricas.

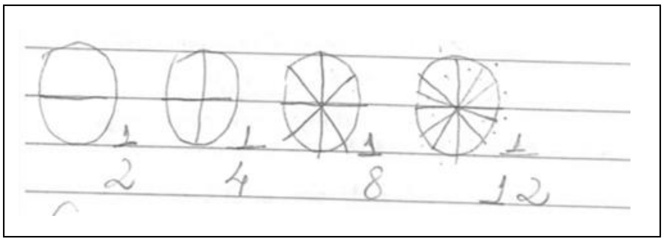
"O pensamento empírico tem seus tipos de generalização e abstração, seus procedimentos peculiares para formar os conceitos, os que justamente obstaculizam a assimilação plena, pelas crianças, do conteúdo teórico dos conhecimentos" (DAVÍDOV, 1988, p. 05, tradução nossa). Assim, o ensino que reduz os conceitos à sua base sensorial, a partir de suas propriedades externas, gera a permanência nos limites da singularidade do conceito, e a generalização ocorre a partir da comparação de diversos casos singulares. Não podemos deixar de ressaltar que o problema não está na relação com o cotidiano, mas nas limitações ao lidar com o cotidiano, pois limita-se na aparência em detrimento da essência do fenômeno, mesmo expresso em uma singularidade.

O experimento objetal proposto por Patrícia, no primeiro instrumento avaliativo, permanece com referência à aparência externa: "*Levaria um bolo de chocolate, para junto com as crianças fazermos a partilha do mesmo*" (PATRÍCIA, 2017). Este modo de ensino não contempla uma relação direta entre o experimento e a gênese do conceito de fração. Ao contrário, trata-se apenas da concepção de número enquanto contagem. Permanece como base à aparência externa do objeto, as conexões internas a serem reproduzidas na ação mental inerente ao processo de formação teórica do conceito não são reveladas.

Ao tratar da percepção direta das características externas do objeto, os estudantes, são encaminhados a atingirem apenas a essência empírica do conceito, o que atende a uma das principais finalidades do ensino tradicional: "inculcar nas crianças generalizações e conceitos [...]" empíricos (DAVÝDOV, 1982, p. 14, tradução nossa). Assim, subestima-se a capacidade de desenvolvimento intelectual da criança.

No ensino formal tradicional, a generalização "se apoia na comparação de coisas formalmente iguais” (DAVÍDOV, 1988, p. 217, tradução nossa). E versa sobre a descrição das propriedades particulares que um objeto individualizado apresenta diante de outros objetos similares. Nesta proposição, “[...] primeiro, os estudantes apropriam-se formalmente do conceito como produto pronto e acabado, depois desenvolvem ações mentais que permitem sua aplicação” (PUENTES; LONGAREZI, 2013, p. 255), de modo que seja necessária a repetição de situações semelhantes que gerem sua aplicabilidade. Patrícia (2017) faria “*no quadro os seguintes desenhos para junto com os alunos resolver as frações*” (Figura 24).

Figura 24 – Proposição de Patrícia sobre representação de fração



Fonte: Acervo da pesquisa. Elaboração da acadêmica Patrícia (2017).

Assim, “segundo certos indícios comuns (iguais) os objetos singulares podem associar-se em determinado conjunto ou classe” (DAVYÍDOV, 1982, p. 46, tradução nossa). No caso em análise, na classe das frações. Generalizar com base nos desenhos representados no quadro (Figura 24) significa dizer que o numerador representa uma fração do todo representado no denominador. Nessa direção, Anna Carolina (2017) acrescenta: “*[...] levaria mais probleminhas para que os alunos possam estimular seus conhecimentos*”. E Clarisse (2017) enfatiza: “*Faria mais desenhos no quadro e pediria para eles colocarem as contas, como no caso da pizza*.” As ações desenvolvidas sugerem a repetição de situações, além da representação, por meio de desenhos aleatórios, com base num raciocínio intuitivo, que não configuram uma explicação da essência do conceito estudado.

> [...] A maioria dos professores apressa-se a consolidar o hábito de resolver problemas de um tipo particular, e dedica muito pouco tempo a explicações detalhadas do processo de resolução dos problemas em geral. Por isso, os alunos que aprendem com lentidão não conseguem muitas vezes recordar o raciocínio que conduz à solução. E embora consigam resolver problemas de um tipo particular, não conseguem modificar o método de resolução em condições novas, isto é, os seus conhecimentos formalizam-se (KALMYKOVA, 1991, p. 23-24).

Isso implica na necessidade de situações semelhantes para que o aluno seja conduzido à solução do problema e, desse modo, aproprie-se do conhecimento, neste caso, empírico. Além disso, há, também, o ensino organizado com base na necessidade de se “*colocar* *o essencial no quadro e tirar as dúvidas*" (JÉSSICA, 2017). Este modo de ensino evidencia que as crianças serão expectadores e não atores desta ação. Entretanto, "aprender não é absorção passiva, não é receber meramente os conhecimentos transmitidos pelo mestre, mas a apropriação ativa destes conhecimentos" (GALPERIN; ZAPORÓZHETS; ELKONIN, 1987, p. 131). Consequentemente, a atuação passiva dos estudantes, a insuficiência de detalhamento nas explicações e as sucessivas repetições impossibilitam o avanço no processo de desenvolvimento do conhecimento, o que, de certo modo, torna a aprendizagem vazia de conteúdo teórico, pois a criança não os assimila, apenas os repete sem a devida compreensão.

> O professor que envereda por esse caminho costuma não conseguir senão uma assimilação vazia de palavras, um verbalismo puro e simples que estimula e imita a existência dos respectivos conceitos na criança, mas na prática, esconde o vazio. Em tais casos, a criança não assimila o conceito, mas a palavra capta mais de memória que de pensamento e sente-se impotente diante de qualquer tentativa de emprego consciente do conhecimento assimilado (VIGOTSKI, 2000, p. 247).

O desenvolvimento destas ações gera empobrecimento na generalização do conceito, tornando-o vazio. Sempre que for necessário resolver uma situação, precisará de outra situação semelhante para seguir o exemplo. Essa ação sustenta-se na "lógica formal, já que esta não estuda os fenômenos nem os objetos em seu desenvolvimento e mudança, com seus aspectos sujeitos a transformações" (ROSENTAL, 1962, p. 328). O objeto aparece já em sua forma pronta, tal como ocorre em seu cotidiano.

> Tal orientação é indispensável para os afazeres cotidianos, durante o cumprimento de ações laborais rotineiras, mas é absolutamente insuficiente para assimilar o espírito autêntico da ciência contemporânea e os princípios de uma relação criativa, ativa e de profundo conteúdo em direção à realidade (Tal relação supõe a compreensão das contradições internas das coisas, ignoradas precisamente pelo racionalismo empírico) (DAVÍDOV, 1988, p. 212-213, tradução nossa).

A escola tradicional, ao ignorar a compreensão das contradições internas do objeto, torna-se insuficiente ao aprofundamento dos conteúdos, de modo que o conceito é compreendido de forma literalmente empírica, antagônico à acepção dialética, quer dizer, "como procedimento especial de reflexo mental da realidade por meio da ascensão do abstrato ao concreto" (DAVÍDOV, 1982, p. 217, tradução nossa). Apenas, abstraem-se características dos objetos e as transformam em propriedades comuns. "Essa separação mental de uns atributos dos objetos e fenômenos, de abstraí-los com relação a quaisquer outros, se chama *processo abstrativo* e seu resultado, abstração" (KONDAKOV, 1954 apud DAVÝDOV, 1982, p. 47, tradução nossa, grifos do autor). Porém, os conceitos desenvolvidos com base nesse movimento de generalização e abstração compõem o conteúdo da lógica formal.

As propriedades comuns, expressas no modo de organização do ensino proposto pelas acadêmicas, têm por base apenas o campo da contagem discreta presente na relação desta com o cotidiano: "*João e seus três amigos compraram uma pizza. Segundo a figura, quantas fatias eles comeram?*" (JÉSSICA, 2017). Ao solucionar este problema, as crianças determinam a quantidade que cada uma comeu, neste caso uma, duas ou mais fatias de pizza, de modo que impossibilita a superação do campo dos números naturais. Assim, a relação interna que sustenta o conceito de fração não é revelada, além de não considerar o caráter contínuo da grandeza envolvida.

> Em determinado estágio do desenvolvimento histórico do conceito de número em que havia apenas a necessidade do controle de grandezas discretas os números naturais eram suficientes. Porém, com a necessidade da medida de grandezas contínuas fez-se necessário uma radical transformação do velho conceito e, ao mesmo tempo, surgiram outros novos, tais como os racionais, irracionais e inteiros (ROSA, 2012, p. 142).

No pensamento empírico mantém-se a ideia de que a grandeza discreta é suficiente para introduzir os conceitos matemáticos. Mas não é. A relação de subdivisão (números racionais) de uma unidade não é revelada, consequentemente, o próprio conteúdo também. Nesta perspectiva, mantém-se o teor dos conhecimentos que a criança aprende no cotidiano.

Diante disso, questionamos: é necessário ir à escola para vivenciar experiências como essas? Ou esses conhecimentos são possibilitados na vida cotidiana das crianças? Na concepção de Saviani (2003, p. 14), "escola diz respeito ao conhecimento elaborado e não ao conhecimento espontâneo; ao saber sistematizado e não ao saber fragmentado; à cultura erudita e não à cultura popular". Neste sentido, as reflexões realizadas na escola necessitam superar o conhecimento que a criança traz de seu cotidiano e que lhe possibilite transformar a realidade em que ela está inserida.

> O cultivo, na escola, do pensamento empírico é uma das causas objetivas de que o ensino escolar influencia fracamente no desenvolvimento psíquico das crianças, no desenvolvimento de suas capacidades intelectuais, porquanto o pensamento empírico origina-se e pode mais ou menos desenvolver-se fora da escola, já que suas fontes estão vinculadas à vida cotidiana das pessoas (DAVÍDOV, 1988, p. 06, tradução nossa).

Esse conhecimento já se desenvolve mesmo antes de a criança entrar na escola. Isso não quer dizer que aquilo que ela já conhece seja dispensado, ao contrário, dá suporte para a aprendizagem do novo e o novo supera e transforma o conhecimento já adquirido. Nessa direção, a função da escola é possibilitar o desenvolvimento das capacidades intelectuais das crianças, com base em ações que as levem ao desenvolvimento do pensamento teórico.

As proposições apresentadas pelas acadêmicas no instrumento avaliativo proposto no primeiro encontro não possibilitavam a revelação da essência do conteúdo de fração. Sustentaram suas propostas no conhecimento empírico tal como propunha a escola tradicional analisada por Davýdov (1982, p. 212, tradução nossa) em sua época, esta "[...] cultivava, apoiava e fixava nas crianças, em formas lógicas mais ou menos precisas, as leis do pensamento empírico racionalista discursivo, próprio da prática cotidiana do homem". Entendemos que os conhecimentos, por elas expostos, condizem com o modo de ensino que vivenciaram na escola, durante a Educação Básica. Pois, de acordo com Hobold (2014), o modo de organização de ensino constatado na Rússia por Davýdov, nas décadas de 1970 e 1980, é semelhante ao vigente em nosso país nos dias atuais.

No modo de organização de ensino proposto pelas acadêmicas no primeiro dia de aula, à luz dos conhecimentos adquiridos durante a Educação Básica, não há distinção "entre os conceitos científicos e os cotidianos, a aproximação exagerada entre a atitude propriamente científica e a cotidiana diante das coisas" (DAVÍDOV, 1987, p. 146, tradução nossa). Essa aproximação exagerada obscurantiza a formação do conhecimento científico.

Em síntese, ao envolver a representação direta do número fracionário por meio da divisão de bolos, pizzas..., as acadêmicas não revelam as conexões internas do conceito. Em consequência disto, o ensino apresenta-se desprovido de reflexões que visem à superação das aparências externas do objeto. Assim, a base do ensino apresenta-se somente no reflexo das características externas do objeto, de modo que reduz os conceitos à sua base sensorial. Conserva a dimensão singular do conceito, não permite meios e procedimentos que revelem a relação universal e como desta se originam as diferentes singularidades.

No contexto da singularidade são contempladas apenas as significações aritméticas, de modo que as significações algébricas não foram consideradas. Contraditoriamente, as proposições, neste primeiro momento, estavam sustentadas nos números naturais com base nas grandezas discretas. Portanto, o modo de organização do ensino apresentado a partir da compreensão inicial das acadêmicas, sobre o modo de organização de ensino do conceito de fração, sustenta-se na Teoria do Pensamento Empírico compatível com os princípios da escola tradicional. No entanto, essa compreensão inicial aos poucos foi questionada, refletida e, em partes, superada, a partir da apropriação do conhecimento teórico.

3.2 CONHECIMENTO TEÓRICO

Para analisar o conhecimento adquirido, solicitamos que as acadêmicas respondessem à mesma situação desencadeadora do primeiro dia de aula. Suas novas respostas, ao mesmo instrumento, agora foram fundamentadas no movimento conceitual reproduzido durante o experimento didático formativo desenvolvido ao longo do semestre letivo (2017/2), e, no que se refere ao conceito de fração, à luz dos dois últimos encontros. Ao acompanhar o movimento presente no contexto investigativo, durante o estágio de docência do Mestrado em Educação, no curso de Pedagogia, pudemos observar as idas e vindas contidas no processo de desenvolvimento do planejamento. A perspectiva é que ocorreriam indícios de apropriação de elementos do pensamento teórico, a partir da revelação da relação interna do objeto, ou seja, a gênese de sua essência. Peres e Freitas (2014), com base em Davýdov, afirmam que:

> O tipo de pensamento que permite acessar a essência dos objetos de conhecimento é o pensamento teórico, pois o meio para alcançá-lo é buscar primeiro a essência do objeto (conteúdo), sua relação principal. O pensamento teórico não se ocupa com fatos isolados ou com características diretas, imediatas do objeto. Este tipo de pensamento requer que o sujeito se ocupe dos objetos e fenômenos considerando-os num sistema, numa rede de relações dentro de um todo. Para o pensamento teórico não é suficiente apenas classificar os objetos e fenômenos a partir da observação direta de suas características particulares e imediatas, pois o que de fato o constitui é a sua essência, compreendida a partir de suas relações mediadas. O pensamento teórico é o tipo de pensamento presente nos conceitos científicos (PERES; FREITAS, 2014, p. 20).

Segundo Leontiev (1978, p. 84), o pensamento constitui-se como “o processo de reflexão consciente da realidade, nas suas propriedades, ligações e relações objetivas, incluindo mesmo os objetos inacessíveis à percepção imediata”. Os indícios do movimento de transição do pensamento empírico para o pensamento teórico não foi algo que se explicitou de imediato, ao contrário, exigiu um estudo mais profundo das ações que foram desenvolvidas pelas acadêmicas ao longo do processo, conforme apresentamos no capítulo anterior. Em outras palavras, para alcançar a essência investigada foi necessário um mergulho profundo no processo à luz da teoria que o sustentou, dada a natureza complexa que gera a essência do conhecimento teórico.

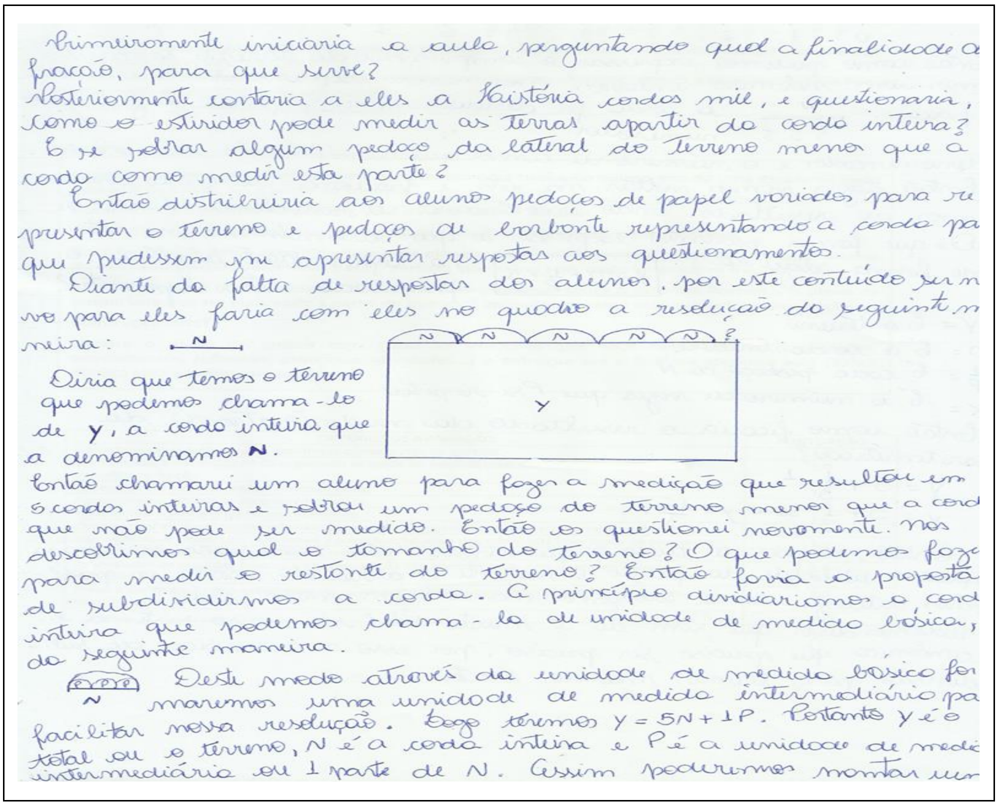
> [...], essência é a conexão interna que, como fonte única, como base genética, determina todas as outras especificidades particulares do todo. Trata-se de conexões objetivas, as que em sua dissociação e manifestação asseguram a unidade dos aspectos do todo, isto é, dão ao objeto um caráter concreto. Neste sentido, a essência é a determinação universal do objeto (DAVÍDOV, 1988, p. 147, tradução nossa).

Nesta perspectiva, a essência que constitui o conceito de fração está associada à relação interna, universal, que perpassa as dimensões desde o geral até o particular e singular. Para revelar as etapas pertencentes ao conhecimento da realidade vivenciada pelas acadêmicas, durante o Experimento Didático Desenvolvimental, buscamos alguns aspectos essenciais do conhecimento que revelavam a mudança do primeiro para o segundo momento. Para tanto, durante o processo, reproduzimos a necessidade histórica de subdivisão da unidade de medida, a partir das relações entre medidas de grandezas, em um movimento no qual transitamos da reprodução da representação objetal para a gráfica e literal (por meio de letras). Consequentemente, consideramos as significações aritméticas, algébricas e geométricas de modo indissociável.

Com base nos princípios estabelecidos na análise do primeiro momento (primeiro dia de aula), mantivemos a seleção das manifestações que expressaram o teor geral do modo de organização do ensino do último momento (último dia de aula).

Um exemplo que contempla o teor geral das manifestações das acadêmicas foi a resolução do instrumento avaliativo realizado pela acadêmica Patrícia, que propôs a situação desencadeadora de aprendizagem, a História Virtual Cordasmil, vivenciada por ela e pelas demais acadêmicas durante as aulas (Figura 25).

Figura 25 – Proposição de Patrícia no último dia de aula

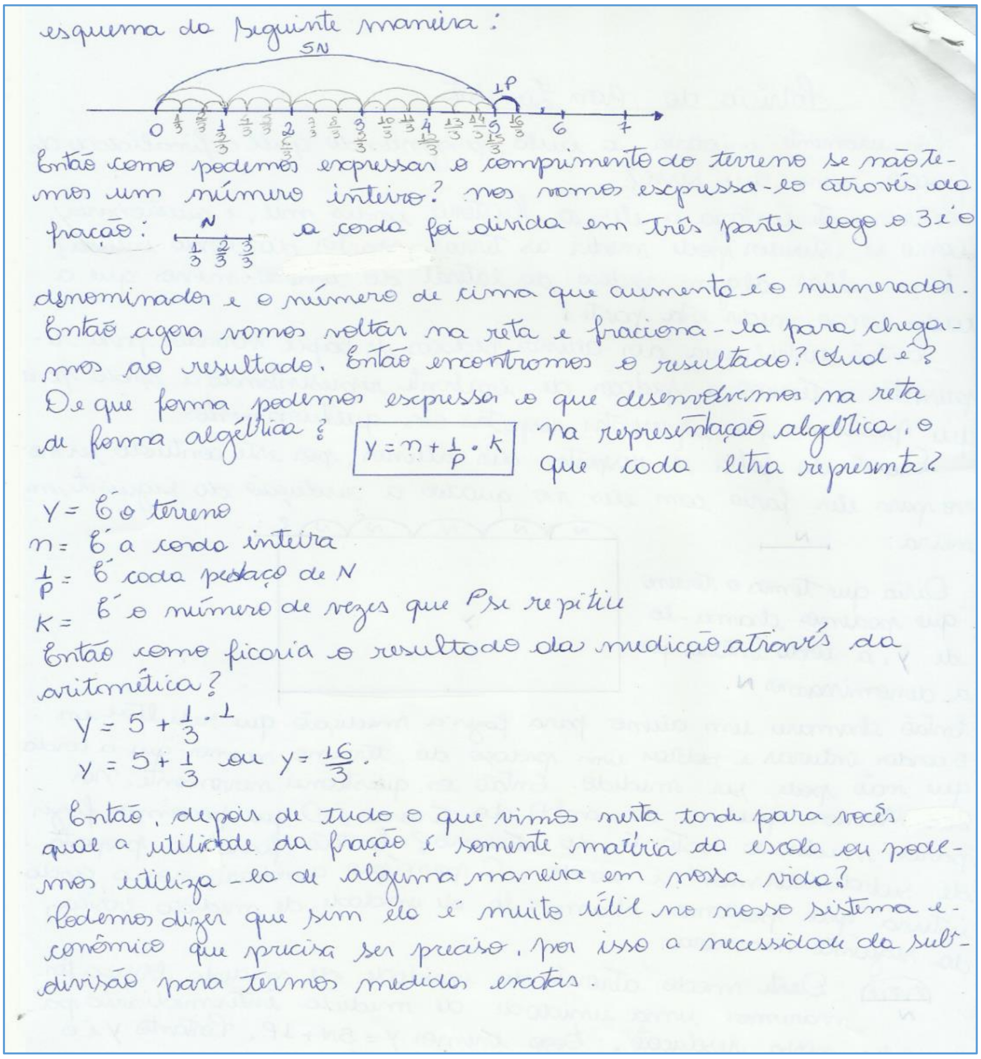


Primeiramente iniciaria a aula, perguntando qual a finalidade a fração, para que serve?
Posteriormente contaria a eles a História cordas mil, e questionaria, como o estirador pode medir as terras apartir da corda inteira?
E se sobrar algum pedaço da lateral do terreno menor que a corda como medir esta parte?
Então distribuiria aos alunos pedaços de papel variados para representar o terreno e pedaços de barbante representando a corda para que pudessem me apresentar respostas aos questionamentos.
Diante da falta de respostas dos alunos, por este conteúdo ser novo para eles faria com eles no quadro a resolução da seguinte maneira:

Diria que temos o terreno que podemos chama-lo de y, a corda inteira que a denominamos N.

Então chamarei um aluno para fazer a medição que resultou em 5 cordas inteiras e sobrou um pedaço do terreno menor que a corda que não pode ser medido. Então os questionei novamente. Nos descobrimos qual o tamanho do terreno? O que podemos fazer para medir o restante do terreno? Então faria a proposta de subdividirmos a corda. A princípio dividiariamos a corda inteira que podemos chama-la de unidade de medida básica, da seguinte maneira.

Deste modo através da unidade de medida básica formaremos uma unidade de medida intermediário para facilitar nossa resolução. Logo teremos $y = 5N + 1P$. Portanto y é o total ou o terreno, N é a corda inteira e P é a unidade de medida intermediária ou 1 parte de N. Assim poderemos montar um



esquema da seguinte maneira:

Então como podemos expressar o comprimento do terreno se não temos um número inteiro? nos vamos expressa-lo através da fração: a corda foi divida em três partes logo o 3 é o denominador e o número de cima que aumenta é o numerador.

Então agora vamos voltar na reta e fraciona-la para chegarmos ao resultado. Então encontramos o resultado? Qual é? De que forma podemos expressar o que desenvolvemos na reta de forma algébrica? $\boxed{y = n + \frac{1}{p} \cdot k}$ Na representação algébrica, o que cada letra representa?

y = É o terreno

n = É a corda inteira

$\frac{1}{p}$ = É cada pedaço de N

k = É o número de vezes que P se repitiu

Então como ficaria o resultado da medição através da aritmética?

$y = 5 + \frac{1}{3} \cdot 1$

$y = 5 + \frac{1}{3}$ ou $y = \frac{16}{3}$.

Então, depois de tudo o que vimos nesta tarde para vocês qual a utilidade da fração é somente matéria da escola ou podemos utiliza-la de alguma maneira em nossa vida?

Podemos dizer que sim ela é muito útil no nosso sistema econômico que precisa ser preciso, por isso a necessidade da subdivisão para termos medidas exatas.

Fonte: Acervo da pesquisa. Elaboração da acadêmica Patrícia (2017).

Outras acadêmicas, também, sugeriram o movimento conceitual presente no contexto da História Virtual de Cordasmil para elaborar o planejamento, porém, com situações diferentes, mas que reproduzem o mesmo teor conceitual. Ao longo da análise, focaremos na proposição de Patrícia por esta explicitar com mais detalhes o movimento a ser percorrido.

Para Davídov (1987, p. 153, tradução nossa), o "geral é compreendido como a conexão geneticamente inicial do sistema estudado, a qual em seu desenvolvimento e diferenciação gera o caráter do sistema concreto", por meio do procedimento de redução do concreto caótico à abstração essencial.

Ao organizar o modo de ensino na perspectiva desenvolvimental, propõe-se como ponto de partida o caráter geral da relação universal. Esta perspectiva visa à revelação das relações internas do conceito, portanto, "possibilita a reflexão sobre infinitas situações particulares e singulares" (GALDINO, 2016, p. 81). Durante a análise, refletimos se a organização do ensino proposto pelas acadêmicas, no último dia de aula, apresentava indícios do conhecimento teórico, se contemplavam elementos que traduzem o caráter geral como ponto de partida, dado que, no processo de realização do experimento objetal, ao conduzir o ensino a partir deste pressuposto, os estudantes "[...] revelam a relação geral inicial em certa área, constroem sobre sua base a generalização substancial e, graças a ela, determinam o conteúdo da 'célula' do objeto estudado, convertendo-o em meio para deduzir relações mais particulares, quer dizer, em conceito" (DAVÍDOV, 1988, p. 175, grifos do autor, tradução nossa).

Patrícia (Figura 25), ao questionar "*como o estirador pode medir as terras a partir da corda inteira*", gera a necessidade de medição entre grandezas. As grandezas envolvidas são representadas pelas terras (terreno) e a corda. Com base nesta relação permite-se a revelação dos elementos que compõem a relação essencial de resolução, o que indica o início do processo de redução do concreto caótico à abstração essencial, onde ocorre a "transformação dos dados da tarefa de estudo com a finalidade de revelar a relação universal do objeto estudado" (DAVÍDOV, 1988, p. 181, tradução nossa).

Embora tenha apresentado inicialmente uma situação de caráter geral, na continuidade expressa que os estudantes não estabelecerão solução para o problema de medição do terreno: "*Diante da falta de respostas dos alunos*" (PATRÍCIA, 2017), sob o argumento de que este conteúdo é "*novo para eles*" (PATRÍCIA, 2017). A dificuldade expressa nesta manifestação apresenta-se no fato de que os professores carregam consigo a ideia de que a criança precisa ter algum conhecimento preestabelecido sobre aquele conceito, neste caso a fração, para ter "capacidade" de compreender o novo. Esquecem que a escola é lugar para a criança aprender o que de mais atual a humanidade criou, portanto, o que ela ainda não conhece, mas que tem condições de aprender.

> Tomemos como ponto de partida o fato de que a aprendizagem da criança começa muito antes da aprendizagem escolar. A aprendizagem escolar nunca parte do zero. Toda a aprendizagem da criança na escola tem uma pré-história. Por exemplo, a criança começa estudar aritmética, mas já muito antes de ir à escola adquiriu determinada experiência referente à quantidade, encontrou várias operações de divisão e adição, complexas e simples; portanto a criança teve uma pré-escola de aritmética, e o psicólogo que ignorasse este fato estaria cego (VYGOTSKY, 1991, p. 8).

Existe uma aprendizagem antes da criança entrar na escola que não pode ser ignorada, pois esta aprendizagem age como suporte para que se dê continuidade ao processo de conhecimento. Neste processo, na escola é lugar de estudo do conhecimento teórico em nível contemporâneo, portanto, o mais atual possível. E, como consequência disso, a criança sairá da escola pensando e agindo diferente do que ela fazia anteriormente.

> Trata-se de conceitos científicos que precisam ser *tratados* com procedimento distinto e *inesperado*, em comparação a como os pequenos tratavam os significados da palavra *casa*, *rua*, etc. Nos níveis inferiores, deve-se formar, nas crianças, a atividade de estudo (pesquisas modernas mostram que isto é possível precisamente quando as crianças assimilam os conceitos científicos) (DAVÍDOV, 1988, p. 218, tradução nossa).

Ao contrário do que suscita o autor, a manifestação pressupõe a necessidade de fazer "*no quadro com eles*" (PATRÍCIA, 2017) para que, a partir deste movimento de repetição, assimilem o conceito científico, diferentemente do que sugere o ensino desenvolvimental, o qual prevê perguntas orientadoras que desencadeiem reflexões que possibilitem a reprodução do conceito em estudo.

Para que a criança se aproprie do conhecimento científico, a princípio ela não pode receber conhecimentos prontos, é imprescindível que ela revele a essência deste conhecimento com base em seu conteúdo e em suas condições de origem e reprodução. Para que isto se efetive é necessário que a criança realize as transformações específicas do objeto, em sua prática escolar, para que "as propriedades internas do objeto, que se convertem em conteúdo do conceito" (DAVÍDOV, 1988, p. 219, tradução nossa) sejam reveladas.

O modo de ensino que possui como premissa o desenvolvimento do pensamento teórico organiza-se com base nestas ações, portanto, conforme o mesmo autor, estabelece a relação essencial e geral dos objetos. A organização do ensino que sustenta o pensamento teórico preconiza:

> [...] o processo de idealização de um dos aspectos da atividade objetivo-prático, a reprodução, nela, das formas universais das coisas. Tal reprodução tem lugar na atividade laboral das pessoas como peculiar experimento objetivo-sensorial. Logo, este experimento adquire cada vez mais, um caráter cognoscitivo, permitindo às pessoas passarem, com o tempo, a realizar os experimentos mentalmente (DAVÍDOV, 1988, p. 125, tradução nossa).

Assim, ao organizar o ensino com vistas ao desenvolvimento do pensamento teórico, Patrícia apresenta elementos que possibilitam o desenvolvimento do experimento objetal: "*Distribuiria aos alunos pedaços de papel variados para representar o terreno e pedaços de barbante representando a corda para que possam apresentar as respostas*" (PATRÍCIA, 2017). Estes elementos permitem a operacionalização da comparação entre medidas de comprimento. Nesta comparação, determina-se o número de vezes que uma unidade de medida cabe na outra. Isto transcende o aspecto externo e imediato, pois "estão ligadas por sua essência interna, para as leis de sua existência e desenvolvimento" (ILIENKOV, 2006, p. 159). Ao caracterizar a existência de uma necessidade, revela a essência interna do objeto, pois estabelece as relações entre grandezas, fundamentada na relação universal, expressa.

A relação entre grandezas possibilita determinar um valor numérico, no contexto proposto por Patrícia prevê a constatação de que a corda coube "*5 vezes inteiras e sobrou um pedaço do terreno menor que a corda*" (PATRÍCIA, 2017). Neste movimento inicia-se a transformação objetal, onde se revelam as primeiras medidas, e, com elas, a transformação das unidades. Surge, então, a necessidade da "*subdivisão da corda*" (PATRÍCIA, 2017), configurada a partir de uma unidade de medida (básica), que ao ser subdividida gera outras unidades menores que uma unidade inteira (unidade de medida intermediária), que neste caso foi determinada por "*um terço*" (PATRÍCIA, 2017). O valor numérico estabelecido na subdivisão da corda não é único, pois foram distribuídos diferentes comprimentos de corda, como citado anteriormente. Assim, por se tratar de um problema de caráter geral, poderiam variar os comprimentos de acordo com as medidas consideradas (básicas e intermediárias). Rosa (2012, p. 178) afirma que os diferentes números "surgem das variações do resultado da medida, sua expressão singular, em dependência da unidade na relação de multiplicidade e divisibilidade entre variáveis dependentes e independentes".

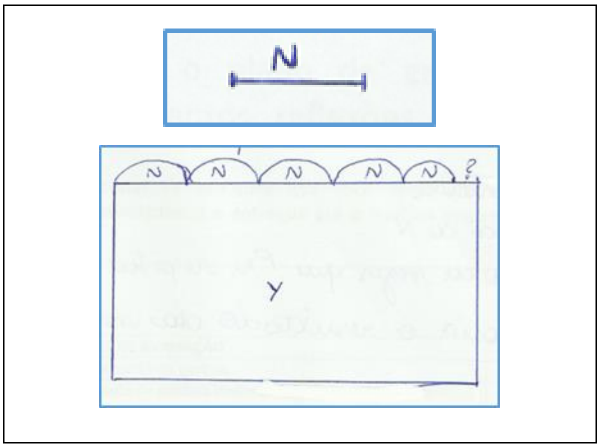
Este processo inicial apresentou a relação entre grandezas, que constou algo que foi medido (unidade de medida básica e unidade de medida intermediária), e, também, a presença de fatos que acontecem na realidade e podem ser comprovados. Elementos que estiveram presentes não apenas na aparência externa do objeto, pelo contrário, estiveram sustentados na relação interna presente no experimento objetal, uma das condições para revelar a lei essencial.

Portanto, fundamentado na lei que se manifesta na base da unidade interna, é possível determinar solução ao questionamento: "*Como podemos expressar o comprimento do terreno se não temos um número inteiro?*" (PATRÍCIA, 2017). Esta é uma questão que merece atenção, pois possibilita uma reflexão em caráter mais geral, uma vez que os números não estão evidenciados, assim, permite a revelação da conexão interna do conceito. Para confirmar esta proposição, sustentamo-nos em Matos (2017, p. 75), ao afirmar que "os números resultariam da necessidade de expressar a resposta singular do problema", tal como acontece na proposição de Patrícia.

No "processo de generalização, na identificação das conexões, sujeitas à lei, desta relação com os fenômenos singulares, o homem pode descobrir seu caráter geral como base da unidade interna do sistema integral" (DAVÍDOV, 1988, p. 151, tradução nossa). Assim, esta unidade permite a revelação da relação essencial, deste modo, possibilita a reprodução integral do sistema de conexões internas de sua origem.

Nesta etapa, ao organizar o ensino com base no caráter geral, a acadêmica leva em conta os elementos geométricos, representados pelos arcos e as letras.

Figura 26 – Proposição inicial de Patrícia do contexto geométrico



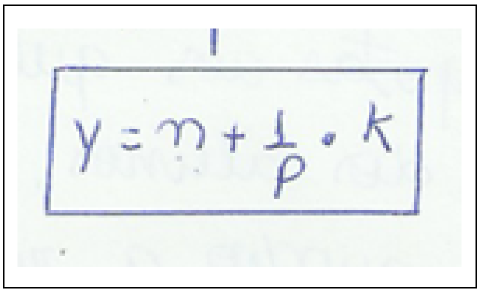
Fonte: Acervo da pesquisa. Elaboração da acadêmica Patrícia (2017).

Este contexto expressa a relação entre o comprimento da corda e o comprimento do terreno, por meio da representação geométrica. A mesma situação contempla, por meio dos arcos e letras, a relação essencial do conteúdo, ainda que se desconheça o valor do todo. Este processo marca o início das significações algébricas. Matos (2017) esclarece que os símbolos algébricos e geométricos devem ser inseridos durante o processo de modelação, consequentemente será constituído como elemento mediador entre a ação objetal e a mental.

> No estágio da reprodução mental do concreto, o círculo em certo modo se encerra no ponto de partida, porém sobre uma nova base: a diversidade se nos apresenta já não como um conjunto caótico de aspectos e relações, mas como uma unidade ‘organizada’, subordinada a determinadas leis. O concreto, mentalmente reproduzido aparece já, não em forma de soma de diversos dados, observações, fatos, proposições separadas, etc., mas como um saber sobre fenômenos iluminados por uma única ideia (ILIENKOV, 2006, p. 160).

Ao estabelecer a unidade que supera o aspecto caótico do problema, o conceito é reproduzido no plano mental. Neste caso, foi apresentada por meio do sistema de símbolos: “*De que forma podemos expressar o que desenvolvemos na reta de forma algébrica?*” (PATRÍCIA, 2017). E a própria acadêmica responde (Figura 27):

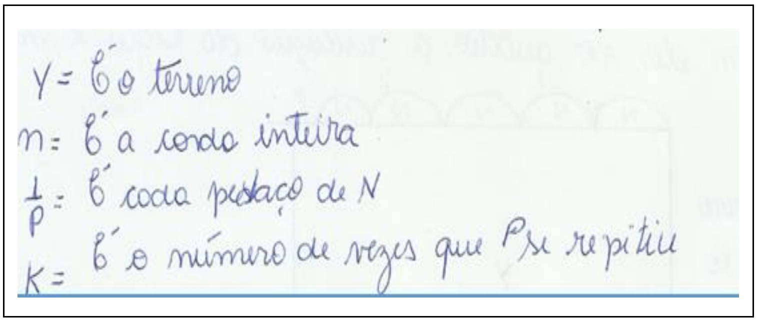
Figura 27 – Modelação proposta por Patrícia



Fonte: Acervo da pesquisa. Elaboração da acadêmica Patrícia (2017).

O modelo literal da relação universal do conceito de fração é a abstração máxima do pensamento, determinada no movimento de redução do concreto ao abstrato (SANTOS, 2017). Esta representação geral apresenta essência do conceito de fração, que possibilita ser realizada nas mais diversas particularidades. Nesse sentido, na particularidade de Cordasmil, cada uma das letras possui sua singularidade, onde:

Figura 28 – Proposição da significação de cada letra no contexto da História Virtual Cordasmil



Fonte: Acervo da pesquisa. Elaboração da acadêmica Patrícia (2017).

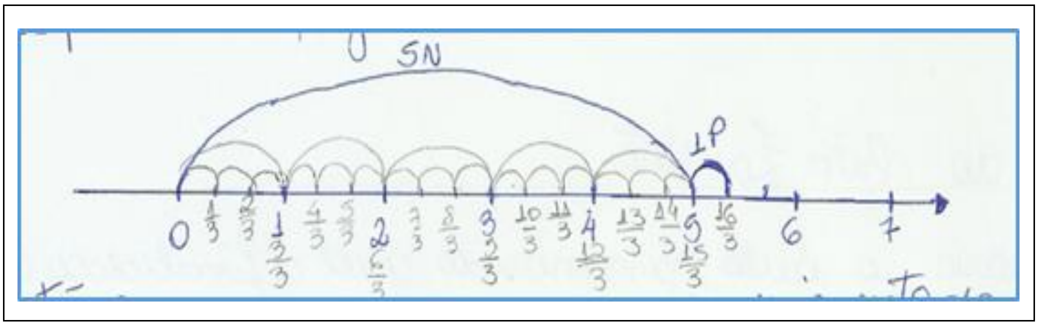
O que difere substancialmente o modo de organização do ensino que constitui o pensamento empírico e o teórico é que o empírico foca apenas nas propriedades particulares do objeto, enquanto o conhecimento teórico "determina a ligação geral com suas manifestações concretas, isto é, o elo entre o geral e particular" (RUBTSOV, 1996, p. 130). O modo de organização do ensino que prioriza o processo de desenvolvimento do conhecimento teórico constitui-se a partir da relação essencial do conceito de fração, constituído entre o geral e o particular, e possibilita a contemplação das propriedades internas.

> A ação interior, constitui-se, portanto, primeiro, sob a forma de uma ação exterior desenvolvida. Posteriormente, após uma transformação progressiva – generalização, redução específica dos seus encadeamentos, modificação do nível em que se efetua – ela interioriza-se, isto é transforma-se em ação interior, desenrolando-se inteiramente no espírito da criança (LEONTIEV, 1978, p. 200).

Cabe ressaltar que a ação interior para apropriação do sistema de símbolos não é inatingível, o que ocorre é o oposto, afirma Davýdov (1982, p. 433-434, tradução nossa) ao concluir que o “simbolismo literal, as correspondentes fórmulas literais e a interconexão das mesmas, consolidativo das propriedades fundamentais das grandezas, são inteiramente acessíveis às crianças”. Assim, as sucessivas abstrações presentes na organização do ensino, com base no problema de Cordasmil, segundo Santos (2017, p. 76), “fizeram a mediação entre o plano objetal e o plano literal, o que resultou no conceito como reflexo das abstrações e generalizações do experimento objetal com a corda, fragmento da corda e medida da lateral do terreno”. O contexto constituído com base nestas ações resulta na construção e transformação do objeto, portanto, possibilita a compreensão de sua essência. Neste sentido, as propriedades fundamentais das grandezas, constituídas como “atividade[s] de estudo deve[m] ser entendida[s] como atividade[s] para a autotransformação do sujeito” (REPKIN, 2014, p. 88), deste modo, conduzirão à apropriação dos conceitos.

De acordo com Rosa (2012, p. 57), a “comparação entre dois segmentos é uma operação do campo geométrico e a expressão numérica da medição significa a tradução no campo aritmético”. Portanto, a reta numérica possibilita representar o valor numérico que resulta da comparação entre grandezas contínuas ou discretas. Assim, para determinar a solução do problema de Cordasmil no contexto geométrico, Patrícia utilizou a reta numérica como elemento mediador da operação:

Figura 29 – Proposição da representação dos números fracionários na reta numérica



Fonte: Acervo da pesquisa. Elaboração da acadêmica Patrícia (2017).

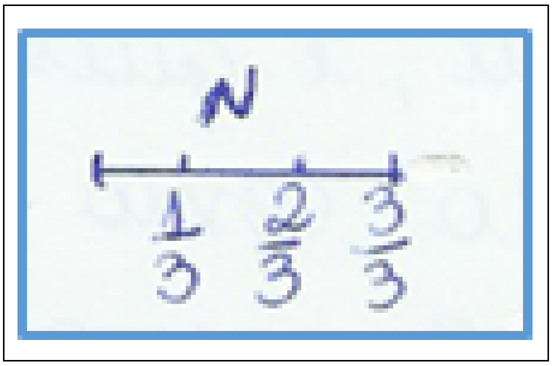
Ao representar a situação geometricamente, estabelece-se uma situação particular, em que “*a corda foi dividida em três partes*” (PATRÍCIA, 2017). Como diz Davídov (1988),

> o caráter eficaz desse procedimento se verifica, justamente, na solução de tarefas particulares; os estudantes as enfocam como variantes da tarefa de estudo inicial e imediatamente [...] separam em cada uma a relação geral, orientando-se pela qual podem aplicar o procedimento geral de solução assimilado (DAVÍDOV, 1988, p. 183, tradução nossa).

Com base na relação geral, possibilita-se a solução do problema. Quando a unidade de medida básica não é suficiente para determinar a medição exata da lateral do terreno, torna-se necessária a constituição da unidade de medida intermediária, como cita Jéssica (2017): "*Logo, os alunos sentirão a necessidade de utilizar números para medir e subdividir as unidades encontradas*." Deste modo, a "generalização das duas relações de medição, intrínsecas à propriedade comutativa, há a manifestação da lei, que expressa ambas as relações em um único registro literal: $\frac{m}{p}$. Tal registro constitui-se em ponto de partida para o movimento de ascensão do abstrato ao concreto" (FREITAS, 2016, p. 146).

O próximo passo determinou o número de vezes que a unidade intermediária se repetiu na unidade de medida básica:

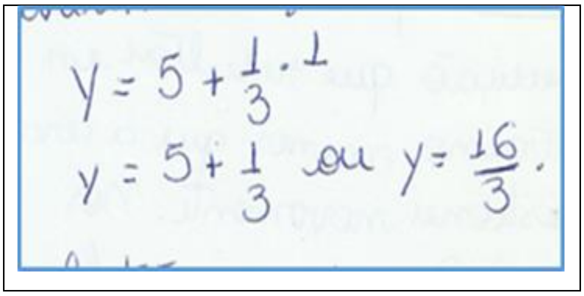
Figura 30 – Representação da unidade de medida básica e intermediária



Fonte: Acervo da pesquisa. Elaboração da acadêmica Patrícia (2017).

Assim, cada unidade de medida intermediária representou $\frac{1}{3}$ da unidade de medida básica. Posteriormente, consistiu em utilizá-las nas sentenças correspondentes a $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}$, $\frac{3}{3}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$... $\frac{15}{3}+\frac{1}{3}=\frac{16}{3}$. O procedimento geral adotado foi que cada termo posterior representou a soma do anterior mais uma unidade de medida intermediária, que resultaram na repetição da unidade de medida intermediária em dezesseis vezes. Por meio do modelo revelado, a mesma situação pode ser resolvida aritmeticamente a partir dos numerais estabelecidos para cada representação, onde: p= 3, n = 5 e k = 1.

Figura 31 – Resolução aritmética com base no modelo literal



Fonte: Acervo da pesquisa. Elaboração da acadêmica Patrícia (2017).

Portanto, a medida da lateral do terreno ficou determinada em $\frac{16}{3}$ de corda.

É importante ressaltar que, na proposição davydoviana, a realização do cálculo na reta numérica é indicada apenas para os números menores. A operação com números maiores ocorre no algoritmo (SILVEIRA, 2015; CRESTANI, 2016; GALDINO, 2016). Pois, com números maiores, apresentaria limitações na contagem e na elaboração de um modo mais rápido para determinar a resposta.

Após determinar a medida da lateral do terreno, Patrícia (2017) finaliza com a seguinte questão: “Depois de tudo que vimos nesta tarde, para vocês qual a utilidade da fração, é somente matéria da escola ou podemos utilizá-la de alguma maneira em nossa vida?” Neste questionamento, depois de vivenciar todo o movimento de resolução do problema “que permite ao homem ‘sair’ dos limites da vida cotidiana, observada diretamente” (DAVÍDOV, 1988, p. 162, grifos do autor, tradução nossa), as crianças são instigadas a pensar sobre a necessidade historicamente construída sobre o conceito de fração. Neste sentido, superar um nível mais ingênuo – senso comum – e ter consciência de que o conhecimento não se limita à realidade imediata e, deste modo, ter um olhar, com base no conhecimento científico, gerado pelo pensamento teórico.

O instrumento avaliativo proposto no último encontro evidencia que as acadêmicas avançaram em relação ao conhecimento inicial. Constatamos que a mudança ocorreu com base nas propostas estabelecidas durante o semestre em referência. A apropriação desses conhecimentos aconteceu não apenas nos encontros desenvolvidos no curso de Pedagogia pautados nas tarefas diretamente estabelecidas com as acadêmicas, mas com a ida delas às escolas para desenvolverem estas mesmas tarefas com as crianças. Assim, as acadêmicas tomam consciência de que as propostas estabelecidas no curso condizem com aquelas vivenciadas na escola. “A aprendizagem consciente efetiva-se quando os conhecimentos são vivos para o sujeito, ou seja, ocupam um lugar na vida real do sujeito, têm um sentido vital, e não somente respostas a condições externas, impostas por outras pessoas ou situações” (PIOTTO; ASBAHR; FURLANETTO, 2017, p. 101). A articulação das propostas gera sentido ao conhecimento acadêmico e àquele estabelecido no ambiente escolar. Este parece-nos um meio que possibilita a inclusão dos conhecimentos teóricos no modo de organização do ensino mesmo após a formação das acadêmicas.

> Durante sua formação (atividade de estudo) temos que revelar e criar as condições para que a atividade adquira um sentido pessoal, converta-se na fonte do autoconhecimento do indivíduo, do desenvolvimento multilateral de sua personalidade, na condição de sua inclusão na prática social (DAVÝDOV; MÁRKOVA, 1987, p. 320).

Ou seja, só se convertem e manifestam em ações as propostas que revelam e criam condições para o desenvolvimento da relação interna do objeto, seja este com as acadêmicas ou com as crianças na escola. Ao considerar a característica interna do objeto como foco principal, a organização do ensino tem por base o pensamento teórico, e, assim, considera a relação externa como secundária.

Com base nas reflexões que observamos durante o processo de conhecimento, vivenciado durante o Experimento Didático Desenvolvimental, constatamos que o experimento objetal elaborado pelas acadêmicas contempla elementos teóricos. Neste sentido, elas superam a necessidade de trazer elementos do dia a dia para o desenvolvimento do ensino, de modo que surge uma nova perspectiva de ensino que tem por base a necessidade de refletir os aspectos internos do problema em seu caráter mais geral, essencial, válidos para qualquer contexto particular.

Ao organizar um ensino que proporcione a apropriação do conceito científico, com base na generalização, foca-se na relação essencial do conteúdo, dessa forma, busca desencadear as ações mentais que potencializem seu reconhecimento.

> Não se trata de pensar apenas abstratamente com um conjunto de proposições fixas, mas de uma instrumentalidade, mediante a qual se desenvolve uma relação primária geral que caracteriza o assunto e se descobre como essa relação aparece em muitos problemas específicos. Isto é, de uma relação geral subjacente ao assunto ou problema se deduzem relações mais particulares (LIBÂNEO, 2004, p. 125).

Nessa direção, a ação investigativa da criança possibilitará a revelação das características internas do objeto, deste modo, apropriar-se-á de ações mentais indispensáveis para tratar do objeto de conhecimento. Segundo Matos (2017, p. 89), “as ações mentais substanciais são condições e meio na produção do conhecimento teórico”, pois inserem a criança na atividade do pensar e do investigar.

Ao articular o desenvolvimento do procedimento de cálculo, com base na reta numérica, estabelece-se o conhecimento que tem suas premissas no ensino desenvolvimental. O contexto da reta numérica foi elemento constante na organização do ensino elaborado pelas acadêmicas sintetizado por Jéssica (2017): "*Partiríamos para a reta numérica para resolver a tarefa*", pois se trata do elemento mediador entre a grandeza em medição (comprimento) e a sua medida. Consideramos que este contexto foi recorrente e possibilitou a compreensão sobre o conceito e sua operacionalização.

Neste contexto, estiveram presentes princípios teóricos que nortearam a organização do ensino a fim de revelar suas condições de origem, pois apresenta por premissa o processo de desenvolvimento do conhecimento teórico, a partir da relação essencial do conceito de fração e permite a contemplação das propriedades internas do objeto. Assume, portanto, como ponto de partida o caráter geral por meio da relação universal. Em vista disso, possibilita a reprodução integral do sistema de conexões internas e deduz o modelo literal da relação universal do conceito de fração, em que se alcança a abstração máxima do pensamento. Esta representação geral apresenta a essência do conceito de fração. Por fim, a organização do ensino que prioriza o processo de desenvolvimento do conhecimento teórico constitui-se a partir da relação essencial do conceito de fração e possibilita a contemplação das propriedades internas.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

> O saber contemporâneo pressupõe que o homem domine *o processo de origem e desenvolvimento das coisas* mediante *o pensamento teórico*, que estuda e descreve a lógica dialética. O pensamento teórico tem seus tipos específicos de generalização e abstração, seus procedimentos de formação dos conceitos e operações com eles. Justamente a formação de tais conceitos abre aos escolares o caminho para dominar os fundamentos da cultura teórica atual. [...]. A escola, a nosso juízo, deve ensinar os alunos a *pensar teoricamente* (DAVIDOV, 1988, p. 6, grifos no original, tradução nossa).

A educação escolar contemporânea pressupõe condições que assegurem aos estudantes seu "desenvolvimento integral" (BRASIL, 2017, p. 35). Contudo, a organização atual do ensino desenvolvido no Brasil é predominantemente empírico (ROSA, 2012; HOBOLD, 2014; GALDINO, 2016), portanto o desenvolvimento integral não é assegurado. Este modelo de ensino conduz-nos a inquietações perante a prática escolar estabelecida em nosso contexto laboral. Foram essas inquietações que provocaram e nos motivaram a buscar subsídios para repensar o modo de organização do ensino de conceitos matemáticos, na especificidade, o conceito de número fracionário.

Neste sentido, tornou-se profícuo o desenvolvimento desta pesquisa no âmbito da formação inicial de professores, no contexto do curso de Pedagogia. Ao compreendermos que há necessidade de repensar o modo de organização ensino, chegamos à seguinte questão norteadora: o que revelam as manifestações das acadêmicas de Pedagogia em relação ao conhecimento sobre o modo de organização do Ensino Desenvolvimental de fração?

Associada a esta questão está o processo percorrido durante o desenvolvimento da pesquisa. Tínhamos como objetivo principal a análise do movimento conceitual constituído pelo pensamento empírico e teórico para o ensino de fração. Para tanto, propusemo-nos, com base na organização do ensino pelas acadêmicas elaborados no primeiro e no último encontro, revelar a relação que constitui a essência da organização do ensino contemplada.

Desenvolvemos ações que permitissem desvelar a relação que determina a essência do conceito de fração, para isso extraímos e reproduzimos o sistema conceitual no qual a essência se insere, estudamos a base teórico-metodológica que sustenta a pesquisa e, por fim, revelamos alguns indícios das compreensões iniciais das acadêmicas sobre o conceito de fração, seus movimentos de superação e o estágio final de apreensão, que sintetizamos no quadro 4 apresentado a seguir:

Quadro 4 – Síntese dos indícios das compreensões iniciais e finais das acadêmicas

ELEMENTOS DE ANÁLISE	**PENSAMENTO EMPÍRICO** (Compreensões iniciais)	**PENSAMENTO TEÓRICO** (Compreensões finais)
Ponto de partida	➢ Caráter singular; ➢ Revela as relações externas; ➢ Relação singular e particular; ➢ Cotidiano como meio facilitador de aprendizagem.	➢ Caráter geral; ➢ Revela as relações internas; ➢ Relação essencial e geral; ➢ Cotidiano como meio para limitar a aprendizagem.
Experimento objetal	➢ Referência à aparência externa do objeto; ➢ Permanece no reflexo da relação externa do experimento objetal; ➢ Características externas que se repetem são tomadas como essência.	➢ Referência à aparência interna do objeto; ➢ Sustentado no reflexo da relação interna revelada no experimento objetal; ➢ Supera as características externas para revelar sua essência interna.
Processo de generalização	➢ Contempla apenas significações aritméticas; ➢ Repetição de situações particulares semelhantes que gerem sua aplicabilidade; ➢ Estudantes são expectadores e não atores desta ação.	➢ Expressa também a representação geométrica e as significações algébricas; ➢ Resolução de uma situação geral que gera sua aplicabilidade; ➢ Estudantes atuam como investigadores orientados pelo professor.
Processo de abstração	➢ As imagens dão conta de explicar o conceito; ➢ Abstrai características dos objetos e as transforma em propriedades comuns; ➢ Não avança sua reflexão para além das aparências.	➢ A essência do conceito apropriada e reproduzida no plano mental; ➢ As propriedades internas do objeto convertem-se em conteúdo nuclear do conceito; ➢ O modelo literal da relação universal do conceito é a abstração máxima do pensamento.
Cálculo	➢ Dependência de objetos e figuras; ➢ Base apenas no campo da contagem discreta.	➢ Reta numérica estabelecida como elemento mediador da operação; ➢ Valor numérico resulta da comparação entre grandezas contínuas ou discretas.

Fonte: Elaboração nossa, 2018.

Dado o árduo caminho percorrido para responder às nossas inquietações, fomos criando condições para interpretar as manifestações que revelavam o desenvolvimento das acadêmicas. Deste modo, apresentamos o desenvolvimento do pensamento teórico exteriorizado por meio dos nexos conceituais de frações, constituído por seus atributos internos ao organizarem o ensino.

O processo de análise constituiu-se no movimento real, não aconteceu com base na exposição, ao contrário, houve um estudo que gerasse a fundamentação do movimento real percorrido. Neste sentido, Davídov (1988, p. 173) afirma que "a investigação deve assimilar em detalhe o objeto investigado, analisar suas diversas formas de desenvolvimento e revelar seus nexos internos. Somente depois de coroado (terminado de forma brilhante) este trabalho, o investigador pode proceder adequadamente à exposição do movimento real". Neste contexto, observamos a compreensão do fenômeno em sua totalidade, na busca de apreendê-lo em sua universalidade.

Acreditamos que, ao se tratar de uma investigação que teve como objeto o processo de conhecimento das acadêmicas, reproduzimos condições que possibilitassem a apropriação das relações para além da aparência do conceito. Nesta perspectiva, buscamos, ao organizar o Experimento Didático Desenvolvimental, organizar reflexões que possibilitassem o confronto entre conhecimento inicial organizado pelas acadêmicas no primeiro instrumento avaliativo, aquele por nós proposto ao longo das aulas, e o último por elas reestruturado.

Temos ciência da complexidade presente na elaboração de uma proposta de ensino que configure o conhecimento científico. Por este motivo, a complexidade pode se tornar um elemento que obstaculize o processo de organização do ensino, o que talvez justifique o ensino desenvolvido atualmente em nosso país.

Neste contexto complexo, de desenvolvimento do experimento didático desenvolvimental, houveram momentos árduos que a própria pesquisa exige. Visto que, as tarefas desenvolvidas, não se tratavam apenas da aplicação com as acadêmicas, mas de um profundo estudo com vistas ao conhecimento da essência contida na própria tarefa. Este estudo foi aporte para que as tarefas pudessem ser articuladas e desenvolvidas não só campo da pesquisa, mas também no contexto de sala de aula.

A organização do ensino contida na resolução inicial do instrumento avaliativo contemplou os conceitos fracionários com base na percepção das características externas do objeto de estudo. Este ponto de partida decorre com base na abstração da característica essencial, fundamental, comum a todos os objetos, "a fixação desse comum, por meio da *palavra*, leva à *abstração* como conteúdo do conceito (as representações sensoriais sobre estas características externas constituem o verdadeiro significado da palavra)" (DAVÝDOV, 1982, p. 216-217, tradução nossa, grifos do autor), portanto, as imagens dão conta de explicar o conceito. A essência do conhecimento que se apresenta, por meio da percepção e generalização das características externas, é denominada por Davýdov (1982) de empírica.

Mas como seria possível que as acadêmicas apresentassem uma organização do ensino que contemplasse o pensamento teórico? Partimos do pressuposto de que esta ação somente seria possível se elas tivessem acesso ao conhecimento científico, pois se torna impossível organizar um ensino de modo que contemple aquilo que ainda não se conhece.

Durante o Experimento Didático Desenvolvimental, buscamos trilhar um caminho que nos conduzisse ao conhecimento que assume por base o pensamento teórico. Deste modo, empenhamo-nos em desenvolver com as acadêmicas as tarefas davydovianas e ~~a~~ uma situação desencadeadora de aprendizagem, para que vivenciassem situações que possibilitassem promover o desenvolvimento deste conhecimento. As ações promovidas na organização do ensino, por nós sistematizada, estiveram pautadas na preocupação em contemplar a essência deste conhecimento, e que necessitava ser apropriado pelas acadêmicas.

O movimento conceitual contemplado nas tarefas desenvolvidas com nossa orientação possibilitou a revelação da relação essencial do conceito de fração extraída na relação entre grandezas.

Na tarefa constituída pela História Virtual de Cordasmil, retomamos o modelo universal, no contexto de medição da grandeza comprimento, fundamentados na relação expressa no todo que foi medido, a unidade de medida básica e o surgimento da unidade de medida intermediária. Neste contexto, o processo de modelação objetal gráfica e literal abarcou a interconexão de elementos aritméticos, algébricos e geométricos. O movimento percorrido esteve orientado do geral para o particular, conforme descrito no capítulo 2.

No conjunto de ações desenvolvidas durante o Experimento Didático Desenvolvimental estivemos, também, em movimento de apropriação do conhecimento teórico, na sua forma mais profunda. Assim, a relação estabelecida entre a pesquisa e o nosso desenvolvimento foi se tornando algo cada vez mais instigante, de modo que estávamos cada vez mais inseridos no campo investigado. Diante deste fato, percorríamos, durante a investigação, um movimento em busca de verificar se ocorreram, ou não, após o Experimento Didático Desenvolvimental, mudanças no modo de organização do ensino elaborado pelas acadêmicas.

Para satisfazer nossas indagações, debruçamo-nos na análise do último instrumento avaliativo, pois acreditávamos que alguns elementos do conhecimento teórico estariam presentes nas manifestações das acadêmicas, uma vez que, além das tarefas desenvolvidas em sala de aula durante o desenvolvimento do experimento, elas foram para as escolas desenvolver com crianças o que haviam aprendido no contexto da disciplina. Ainda nesta direção, algumas delas levaram o conhecimento apreendido na disciplina para os estágios obrigatórios. Um dos exemplos foi a acadêmica Patrícia, que desenvolveu a História Virtual Cordasmil com crianças do 4º ano do Ensino Fundamental.

Deste modo, reafirmamos que para organizar o ensino com base no pensamento teórico é necessário que o futuro professor tenha tido acesso a este conhecimento. Não temos a ingenuidade de acreditar que apenas a disciplina de Matemática, realizada durante o curso de Pedagogia, seja garantia e efetivação de uma sólida formação teórica do conceito de número fracionário em particular ou do pensamento teórico em geral. Mas, no decorrer da análise, revelamos que alguns elementos do conhecimento científico foram apropriados pelas acadêmicas e contemplados na organização do ensino elaborado no último instrumento avaliativo.

Assim, a organização do ensino proposta pelas acadêmicas contemplou o conceito de fração de modo que se aproximaram das particularidades do conhecimento teórico. A essência foi reproduzida e mediatizada por abstrações que envolveram os dados que compõem a essência do conceito teórico. E, por consequência, a compreensão das acadêmicas sobre fração foi adquirindo uma estrutura próxima da teórica, em seu nível mais atual de desenvolvimento. Esta supera, por incorporação, a estrutura empírica que as acadêmicas apresentaram no primeiro encontro.

Contudo, permanecemos impossibilitados de garantir que estes elementos contidos na organização do ensino elaborados pelas acadêmicas sejam condicionados ao desenvolvimento dessas mesmas ações no decorrer de sua vida profissional, visto que não temos o acompanhamento após seu desenvolvimento.

Por esta razão, a finalização desta pesquisa corrobora o pensamento de que ainda há um longo caminho a ser percorrido, pois propor um modo de organizar o ensino que contemple o conhecimento teórico não acontece de forma espontânea. Ao contrário, necessita de um mergulho em suas relações internas, o que pressupõe reflexões acerca deste conhecimento.

Deste modo, desejamos que as reflexões, reveladas na presente pesquisa, caracterizem-se como um aporte na constituição da organização do ensino, uma vez que contemplam possibilidades para o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes. Portanto, vislumbramos como possibilidade um “ir além” dos limites do pensamento empírico no processo de ensino e aprendizagem com a sua superação por meio da apropriação do conhecimento científico e do desenvolvimento do pensamento teórico.

Para finalizar, compreendemos que não paramos por aqui, pois estamos em constante processo de conhecimento e isto é vital para continuarmos nossa caminhada na melhoria da qualidade do ensino, seja ela na Educação Básica, no Ensino Superior ou na Formação Continuada de Professores.

REFERÊNCIAS

AQUINO, O. F. O experimento didático-formativo: contribuições L. S. Vigotski, L. V. Zankov e V. V. Davidov. In: MATURANO, A. L.; PUENTES, R. V. (Org.). **Fundamentos Psicológicos e didáticos do Ensino desenvolvimental**. Uberlândia, MG: EDUFU, 2017. v. 5. p. 325-350.

BAZARIAN, J. **O problema da verdade**. 4. ed. São Paulo: Alfa-Ômega, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** – BNCC. Brasília, DF, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf>. Acesso em: 07 fev. 2018.

______. Ministério da Educação Secretaria de Educação Básica Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão Conselho Nacional de Educação. **Diretrizes e Bases da Educação Básica**, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/julho-2013-pdf/13677-diretrizes-educacao-basica-2013-pdf/file>. Acesso: 10 abr. 2017.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1951.

CRESTANI, S. **Organização do ensino de matemática na perspectiva do desenvolvimento do pensamento teórico:** uma reflexão a partir do conceito de divisão. 2016. 124 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2016.

DAVÍDOV, V. V. Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo. In: SHUARE, M. **La psicología EvoMestrandativa y pedagógica en la URSS.** Moscú: Progreso, 1987. p. 143-155.

______. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico:** investigación teórica y experimental. Trad. Marta Shuare Moscú: Editorial Progreso, 1988.

DAVÍDOV, V. V.; MÁRKOVA, A. La concepción de laactividad de estudio de los escolares. In: DAVIDOV, V.; SHUARE, M. **La psicología evolutiva y pedagógica en la URSS**: antología. Moscou: Editorial Progreso, 1987. p. 316-336.

DAVÝDOV, V. V. **Tipos de generalización en la enseñanza.** 3. ed. Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.

FONTES, M. **Experimento Didático Desenvolvimental em matemática no contexto do curso de Pedagogia**. Dissertação (Mestrado em Educação)-Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2019. (Dissertação em construção).

FREITAS, D. **O movimento do pensamento expresso nas tarefas particulares propostas por Davýdov e colaboradores para apropriação do sistema conceitual de fração**. 2016. 167 f. Dissertação (Mestrado em Educação)-Universidade do Extremo Sul de Santa Catarina, Criciúma, 2016.
GALDINO, A. P. S. **O conhecimento matemático de estudantes do 3º ano do ensino fundamental sobre o conceito de multiplicação:** um estudo com base na teoria histórico-cultural. 2016. 110f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2016.

GALPERIN, P.; ZAPORÓZHETS A.; ELKONIN, D. Los problemas de la formación de conocimientos y capacidades en los escolares y los nuevos métodos de enseñanza en la escuela. In: SUARE, M. **La psicología Evolutiva y pedagógica en la URSS**. Moscú, Progreso, 1987. p. 300-316.

GAMBOA, S. S. **Pesquisa em educação:** métodos e epistemologias. 2. ed. Chapecó: Argos, 2012.

HOBOLD, E. S. F. **Proposições para o Ensino da tabuada com base nas Lógicas Formal e Dialética**. 2014. 199 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2014.

ILIENKOV, E. V. La ascensión de lo abstracto a lo concreto en principios de la lógica dialéctica. In: JIMÉNEZ, A. T. **Teoría de la construcción del objeto de estudio**. México: Instituto Politécnico Nacional, 2006. p. 151-200.

KALMYKOVA, Z. I. Pressupostos psicológicos para uma melhor aprendizagem da resolução de problemas aritméticos. In: LURIA, A. R. et al. **Pedagogia e Psicologia II**. Lisboa: Estampa, 1991. p. 9-26.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo**. São Paulo: Editora Moraes Ltda., 1978.

LIBÂNEO, J. C. A aprendizagem escolar e a formação de professores na perspectiva da psicologia histórico-cultural e da teoria da atividade. The learning process in the school and the formation of teachers in the perspective of. **Educar em Revista**, n. 24, p. 113-147, 2004.

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. A. M. da M. Vygotsky, Leontiev, Davydov? Três aportes teóricos para a teoria histórico-cultural e suas contribuições para a didática. In: IV CONGRESSO BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO, 2006. **Anais...** Goiânia - GO: Editora Vieira/UCG, 2006. v. 1. p. 1-10.

MATOS, C. F. **Modo de organização do ensino de matemática em cursos de pedagogia**: uma reflexão a partir dos fundamentos da teoria histórico-cultural. 2017. 167 f. Dissertação (Mestrado em Educação)-Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2017.

MOREIRA, I. M. B. **O ensino das operações com frações envolvendo calculadora**. 2010. 137 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2010.

MOURA, M. O. A atividade de ensino como ação formadora. In: CASTRO, A. D.; CARVALHO, A. M. P. de (Org.). **Ensinar a ensinar**: didática para a escola fundamental e média. São Paulo: Pioneira Thomson Learning Ltda., 2001. p. 143-162.
______. Pesquisa colaborativa: um foco na ação formadora. In: BARBOSA, Raquel Lazzari Leite (Org.). Trajetórias e perspectivas da formação de educadores. São Paulo: Editora Unesp, 2004. p. 257-284.

______. **Números racionais.** Arquivo. 2015. Disponível em: <https://disciplinas.stoa.usp.br/mod/resource/view.php?id=155570>. Acesso em: 25 jul. 2017.

______. (Org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Brasília: Liber Livro, 2010.

OLIVEIRA, M. K. **Vygotsky:** aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico. São Paulo: Spicione, 2004.

PERES, T. C.; FREITAS, R. A. M. M. Ensino desenvolvimental: uma alternativa para a educação matemática. **Poiésis**, Tubarão, Volume Especial, p. 10-28, jan./jun. 2014.

PIOTTO, D. C.; ASBAHR, F. S. F; FURLANETTO, F. R. Significação e sentido na psicologia histórico-cultural: implicações para a educação. In: MOURA, M. O. (Org.). **Educação escolar e pesquisa na teoria histórico cultural**. São Paulo: Edições Loyola, 2017. p. 101-124.

PUENTES, R. V.; LONGAREZI, A. M. Escola e didática desenvolvimental: seu campo conceitual na tradição da teoria histórico-cultural. **Educação em Revista,** Belo Horizonte, v. 29, n. 1, p. 247-271, 2013.

REPKIN, V. V. O ensino desenvolvente e a atividade de estudo. **Ensino em Revista**, v. 21, n. 1, p. 85-99, jan./jun. 2014.

ROSA, J. E. **Proposições de Davydov para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar**: inter-relações dos sistemas de significações numéricas. 2012. 244 f. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

ROSENTAL, M. M. **Princípios de Logica Dialectica**. Tradução Augusto Vidal Boget. Montevidéu: Pueblos Unidos, 1962.

RUBINSTEIN, S. L. **O desarrolo de La psicologia:** principios y métodos. Habana: Editorial Puéblos y Educación, 1978.

RUBTSOV, V. A atividade de aprendizagem e os problemas referentes à formação do pensamento teórico dos escolares. In: GARNIER, C.; BEDNARZ, N.; ULANOVSKAYA, I.

(Orgs.). **Após Vygotsky e Piaget:** perspectiva social e construtivista: escola russa e occidental. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 129-137.

SANTA CATARINA. Governo do Estado. Secretaria de Estado da Educação. **Proposta Curricular de Santa Catarina**: formação integral na educação básica. Estado de Santa Catarina, Secretaria de Estado da Educação (S.I.): (S. n), 2014.

SANTOS, C. O. **O movimento conceitual de fração a partir dos fundamentos da lógica dialética para o modo de organização do ensino**. 2017. 89 f. Dissertação (Mestrado em Educação)-Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2017.
SAVIANI, D. **Escola e Democracia:** Polêmicas do nosso tempo. 36. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2003.

SILVEIRA, G. M. **Unidade entre lógico e histórico no movimento conceitual do sistema de numeração proposta por Davýdov e colaboradores para o ensino das operações da adição e subtração.** 2015. 186 f. Dissertação (Mestrado em Educação)-Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2015.

TONET, I. **Método científico**: uma abordagem ontológica. São Paulo: Instituto Mestrandakács, 2013. 133 p.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

______. **A construção do pensamento e da linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2009.

VYGOTSKY, L. S. Pensamento e Linguagem. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

ANEXO

ANEXO A – Termo de Livre Consentimento

UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA
UNIDADE UNIVERSITÁRIA TUBARÃO
CURSO DE PEDAGOGIA
Termo de Livre Consentimento

A situação atual do ensino de matemática, no Brasil, é caótica, precisa ser repensada urgentemente. Esse repensar passa pela formação inicial e continuada de professoras. A partir dessa necessidade a professora doutora Josélia Euzébio Rosa com suas orientandas Luciane Corrêa do Nascimento Isidoro e Mariana da Silva Fontes desenvolvem, no contexto do TedMat, um projeto de pesquisa com o objetivo de investigar as contribuições da formação inicial para o trabalho docente com a Matemática a partir das manifestações escritas, orais e gestuais de estudantes da disciplina *Fundamentos e Metodologias de Matemática para os anos Iniciais do Ensino Fundamental* do curso de pedagogia da UNISUL.

Assim, gostaríamos de consultar sobre seu livre consentimento para a utilização dos registros realizados durante a disciplina *Metodologias de Matemática para os anos Iniciais do Ensino Fundamental (2017-2)*, por meio de gravação em vídeo, áudio e fotografias como fonte de análise.

Caso concorde, por favor, escreva seu nome, o número do documento de identidade e assine o termo abaixo.

Desde já, agradecemos sua contribuição.

Josélia Euzebio da Rosa

Luciane Correa do Nascimento Isidoro

Mariana da Silva Fontes

Eu, ____, documento de identidade número _______________ concordo com a utilização das minhas manifestações gestuais, orais e escritas captadas durante a Disciplina *Fundamentos e Metodologias de Matemática para os anos Iniciais do Ensino Fundamental*, por meio de vídeos, fotografias e gravação em áudio, para subsidiar reflexões sobre o modo de organização do ensino de Matemática em cursos de Pedagogia.

(   ) Gostaria que minha identidade fosse preservada por meio da utilização de um nome fictício.

(   ) Gostaria que minha identidade fosse revelada, por meio da utilização do meu nome real.

____

Tubarão, 04/12/2017