

O máximo desempenho dos processos de fabricação, mantendo a alta eficiência e exigindo mais agilidade, requerem um altíssimo conhecimento dos fenômenos envolvidos no mecanismo de cada processamento de usinagem. Para o processo de fresamento a vibração auto excitada (*Chatter*) é um dos principais problemas causadores de limitação na definição dos parâmetros de trabalho. Uma forma de otimizar estes parâmetros está associada a geração dos Diagramas de Lóbulos de Estabilidade onde, o conhecimento da resposta dinâmica do sistema é parte fundamental de seu equacionamento. Desta forma este trabalho propõe uma metodologia capaz de prever o comportamento dinâmico de uma placa de parede fina submetida a modificações estruturais por meio do processo de fresamento. Dados de Funções Resposta em Frequência experimentais e numéricas (Método dos Elementos Finitos) são comparadas com aquelas obtidas pelo modelo proposto, onde uma excelente correlação é observada.

Orientador: Prof. Dr-Ing. Joel Martins Crichigno Filho

Joinville, 2018

ANO  
2018

DOGLAS NEGRI | PREVISÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA DO  
COMPORTAMENTO DINÂMICO DE PEÇAS DE PAREDE FINA UTILIZANDO REDUÇÃO  
DE ORDEM DE MODELO E MUDANÇA ESTRUTURAL



**UDESC**

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**PREVISÃO NO DOMÍNIO DA  
FREQUÊNCIA DO  
COMPORTAMENTO DINÂMICO DE  
PEÇAS DE PAREDE FINA  
UTILIZANDO REDUÇÃO DE ORDEM  
DE MODELO E MUDANÇA  
ESTRUTURAL**

DOGLAS NEGRI

JOINVILLE, 2018

**DOGLAS NEGRI**

**PREVISÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA DO COMPORTAMENTO  
DINÂMICO DE PEÇAS DE PAREDE FINA UTILIZANDO REDUÇÃO  
DE ORDEM DE MODELO E MUDANÇA ESTRUTURAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr-Ing. Joel Martins Crichigno Filho

**JOINVILLE - SC**

**5 de Abril de 2018**

Negri, Douglas

Previsão no Domínio da Frequência do  
Comportamento Dinâmico de Peças de Parede Fina  
Utilizando Redução de Ordem de Modelo e Mudança  
Estrutural / Douglas Negri. - Joinville , 2018.  
143 p.

Orientador: Joel Martins Crichigno Filho  
Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado de  
Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas,  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica,  
Joinville, 2018.

1. Comportamento Dinâmico. 2. Redução de Modelo.  
3. Mudança Estrutural. 4. Função Resposta em  
Frequência. 5. Chatter. I. Martins Crichigno Filho,  
Joel. II. Universidade do Estado de Santa Catarina.  
Programa de Pós-Graduação. III. Título.

**Previsão no Domínio da Frequência do Comportamento Dinâmico de Peças de Parede Fina Utilizando Redução de Ordem de Modelo e Mudança Estrutural**

por

**Doglas Negri**

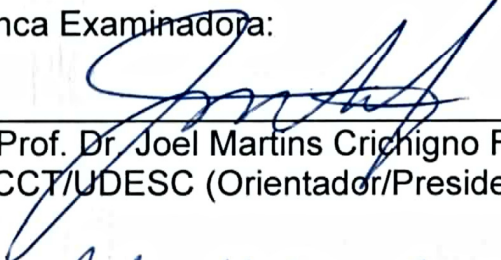
Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

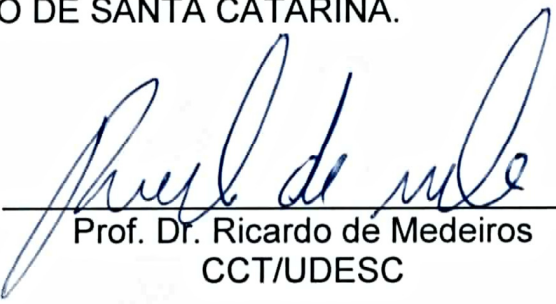
**MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

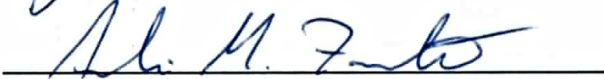
Área de concentração em “Modelagem e Simulação Numérica”  
e aprovada em sua forma final pelo

**CURSO DE MESTRADO ACADÊMICO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DO CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA  
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.**

Banca Examinadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Joel Martins Crichigno Filho  
CCT/UDESC (Orientador/Presidente)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Ricardo de Medeiros  
CCT/UDESC

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. André Marcon Zanatta  
FIESC - SENAI/SC

**Joinville, SC, 23 de fevereiro de 2018.**



"Dedico este a minha esposa Lithoany e meu filho Enzo, e a meus pais Valdecir (*in memoriam*) e Clari."



## AGRADECIMENTOS

À Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC) e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, pela oportunidade de aperfeiçoamento oferecida.

Ao Prof. Dr-Ing. Joel Martins Crichigno Filho, orientador, pela atenção, apoio e dedicação, e pelos momentos de orientação e discussão sobre o projeto.

Aos demais Professores e colaboradores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica pela amizade e contribuições ao trabalho.

Ao Instituto SENAI de Inovação (FIESC - SENAI/SC) pela oportunidade e bolsa de pesquisa oferecidas.

Aos meus colegas de mestrado, sala de aula e da vida pela ajuda, troca de idéias, amizade e companheirismo. Um abraço especial para, Ademar, Douglas, Felipe B., Felipe K., Gustavo, João, José, Leandro, Marcelo e Saulo.

Agradeço a minha esposa Lithoany pela paciência, amor e cumplicidade a mim dedicados durante todo esse período.

Agradeço a toda minha família em especial aos meus pais Valdecir (*in memoriam*) e Clari pelo incentivo dado em todos os momentos difíceis que enfrentei.

Ao Fundo de apoio à Manutenção e ao Desenvolvimento da Educação Superior (FUMDES - UNIEDU), pela bolsa de estudo concedida.

À Deus, principalmente, por ter me dado saúde, paz e tranquilidade para superar esta etapa de minha vida.



“Persistência e paciência,...  
diga-me que eu não conseguirei e  
eu provarei que você está errado.”

Royce Gracie

“A persistência é o menor caminho para o êxito.”

Charles Chaplin



## RESUMO

O máximo desempenho dos processos de fabricação, mantendo a alta eficiência e exigindo mais agilidade, requerem um altíssimo conhecimento dos fenômenos envolvidos no mecanismo de cada processamento de usinagem. Para o processo de fresamento a vibração auto excitada (*Chatter*) é um dos principais problemas causadores de limitação na definição dos parâmetros de trabalho. Uma forma de otimizar estes parâmetros está associada a geração dos Diagramas de Lóbulos de Estabilidade onde, o conhecimento da resposta dinâmica do sistema é parte fundamental de seu equacionamento. Desta forma este trabalho propõe uma metodologia capaz de prever o comportamento dinâmico de uma placa de parede fina submetida a modificações estruturais por meio do processo de fresamento. Dados de Funções Resposta em Frequência experimentais e numéricas (Método dos Elementos Finitos) são comparadas com aquelas obtidas pelo modelo proposto, onde uma excelente correlação é observada.

**Palavras-chave:** Comportamento Dinâmico. Redução de Modelo. Mudança Estrutural. Função Resposta em Frequência. *Chatter*.



## ABSTRACT

The maximum performance of the manufacture procedures, maintaining high efficiency and demanding more agility require a high level of understanding of the phenomena involved in each and every mechanism in the machining process. For the milling process, the self-excited vibration (Chatter) is one of the main problems causing limitations in parameter and definitions in machine work. Optimizing these parameters is associated to the generation of the Stability Lobes Diagrams where foreseeing the dynamic response of the system is a fundamental part of the equation development. Therefore, this work proposes a methodology capable of predict the dynamic behavior of a thin-walled plate submitted to structural modification by the milling process. Data from the Frequency Response Functions experimentally and numerically (by the Finite Element Method) were compared with those obtained by the proposed model, where an excellent correlation was observed.

**Key-words:** Dynamic Behavior. Order Reduction. Structural Modification. Frequency Response Function. *Chatter*.



# Lista de Figuras

1.1	Exemplo de usinagem de peças de parede fina, lâmina de turbina. . . . .	1
1.2	Mecânismo de vibração auto-excitada no fresamento. . . . .	2
1.3	Diagrama de Lóbulos de Estabilidade. . . . .	3
2.1	Sistema contínuo modelado por massa, mola e amortecedor. . . . .	7
2.2	Vibração livre. . . . .	8
2.3	Sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade em vibração forçada. . . . .	9
2.4	Mecânismo de vibração auto-excitada no fresamento. . . . .	10
2.5	Modelo dinâmico e suas variações. . . . .	12
2.6	Gráfico da parte real e imaginária da receptância. . . . .	19
2.7	Gráfico da magnitude-fase da receptância. . . . .	20
2.8	Diagrama de Nyquist da receptância. . . . .	21
2.9	Aplicação das cargas no teorema de Maxwell-Betti. . . . .	22
2.10	Aplicação das cargas no teorema de Maxwell-Betti A-B. . . . .	22
2.11	Aplicação das cargas no teorema de Maxwell-Betti B-A. . . . .	23
2.12	Determinação das frequências $\omega_r$ , $\omega_1$ e $\omega_2$ - magnitude. . . . .	26
2.13	Determinação das frequências $\omega_r$ , $\omega_1$ e $\omega_2$ - real e imaginário. . . . .	26
2.14	Elemento $S\dot{L}$ . . . . .	29
2.15	Elemento $S\dot{L}R$ . . . . .	29
2.16	Elemento $S\delta R$ . . . . .	30
2.17	Graus de liberdade de deslocamento e rotação - $S\dot{L}R$ . . . . .	31
3.1	Geometria de estudo. . . . .	42
3.2	Fixação da placa na morsa. . . . .	42
3.3	Aparato experimental. . . . .	43
3.4	Centro de usinagem, ferramenta e insertos utilizados no experimento. . . . .	44
3.5	Aproximação do ângulo no final da espessura de penetração. . . . .	45
3.6	Aproximação numérica do raio de usinagem. . . . .	46
3.7	Fluxograma da metodologia adotada. . . . .	46
3.8	Estágios de modificação. . . . .	48

3.9	Malha dos pontos experimentais - Análise modal. . . . .	48
3.10	Análise modal experimental. . . . .	49
3.11	Janelamento experimental. . . . .	49
3.12	Determinação das formas modais experimentais. . . . .	50
3.13	Geometria dos pontos de contato dos insertos. . . . .	51
3.14	Geometria dos pontos para análise dinâmica experimental. . . . .	51
3.15	Malha com 440 elementos. . . . .	52
3.16	Método de ajuste do modelo. . . . .	53
3.17	Geometria dos pontos para análise dinâmica numérica. . . . .	54
3.18	Fluxograma do algoritmo. . . . .	55
4.1	Modelo da placa - <i>ABAQUS</i> . . . . .	60
4.2	Análise gráfica do refino de malha. . . . .	61
4.3	Malha com 440 elementos. . . . .	62
4.4	Definição dos pontos experimentais da análise modal. . . . .	63
4.5	Malha dos pontos experimentais. . . . .	63
4.6	Aproximação numérica da modificação. . . . .	64
4.7	Aproximação numérica da modificação. . . . .	65
4.8	Convergência do resíduo do <i>FRAC</i> para o estudo do truncamento modal numérico. . . . .	67
5.1	Experimental vrs. Sintetizada - Método da seleção de picos - 1FZ1UZ. . . . .	70
5.2	Formas modais experimentais. . . . .	70
5.3	Formas modais numéricas ( <i>FEM</i> ). . . . .	71
5.4	MAC - Experimental vrs. Numérico ( <i>FEM</i> ). . . . .	72
5.5	<i>FRF</i> Experimental - Estrutura original. . . . .	73
5.6	<i>FRF</i> Experimental - Primeiro estágio de modificação. . . . .	73
5.7	Primeiro estágio de modificação. . . . .	73
5.8	Segundo estágio de modificação. . . . .	74
5.9	<i>FRF</i> Experimental - Segundo estágio de modificação. . . . .	74
5.10	<i>FRF</i> Experimental - Terceiro estágio de modificação. . . . .	74
5.11	Terceiro estágio de modificação. . . . .	75
5.12	Experimental vrs. <i>FEM</i> - Estrutural original. . . . .	76
5.13	<i>FRF</i> Numérica ( <i>FEM</i> ) - Estrutura original. . . . .	76
5.14	<i>FRF</i> Numérica ( <i>FEM</i> ) - Primeiro estágio de modificação. . . . .	77
5.15	Relação malha numérica, pontos experimentais - Primeiro estágio. . . . .	77
5.16	<i>FRF</i> Numéricas ( <i>FEM</i> ) - Segundo estágio de modificação. . . . .	77
5.17	Relação malha numérica, pontos experimentais - Segundo estágio. . . . .	78
5.18	<i>FRF</i> Numéricas ( <i>FEM</i> ) - Terceiro estágio de modificação. . . . .	78
5.19	Relação malha numérica, pontos experimentais - Terceiro estágio. . . . .	78

5.20	<i>FRF</i> Método proposto - Primeiro estágio de modificação. . . . .	80
5.21	<i>FRF</i> Método proposto - Segundo estágio de modificação. . . . .	80
5.22	<i>FRF</i> Método proposto - Terceiro estágio de modificação. . . . .	80
5.23	Locais de medição e estágios de modificação. . . . .	82
5.24	Magnitude 2FZ2UZ - Primeiro estágio de modificação. . . . .	83
5.25	Magnitude 5FZ5UZ - Primeiro estágio de modificação. . . . .	83
5.26	Parcelas real e imaginária 2FZ2UZ - Primeiro estágio de modificação. . . .	83
5.27	Parcelas real e imaginária 5FZ5UZ - Primeiro estágio de modificação. . . .	84
5.28	Magnitude 3FZ3UZ - Segundo estágio de modificação. . . . .	85
5.29	Magnitude 6FZ6UZ - Segundo estágio de modificação. . . . .	85
5.30	Parcelas real e imaginária 3FZ3UZ - Segundo estágio de modificação. . . .	85
5.31	Parcelas real e imaginária 6FZ6UZ - Segundo estágio de modificação. . . .	86
5.32	Magnitude 4FZ4UZ - Terceiro estágio de modificação. . . . .	87
5.33	Magnitude 7FZ7UZ - Terceiro estágio de modificação. . . . .	87
5.34	Parcelas real e imaginária 4FZ4UZ - Terceiro estágio de modificação. . . .	87
5.35	Parcelas real e imaginária 7FZ7UZ - Terceiro estágio de modificação. . . .	88
5.36	<i>FRAC</i> método proposto versus <i>FEM</i> . . . . .	88
5.37	<i>FRAC</i> método proposto versus experimental. . . . .	89
A.1	Método de ajuste do modelo. . . . .	103
A.2	Fluxograma do método de ajuste do modelo. . . . .	104
A.3	Partícula atual, posição futura e velocidade. . . . .	105
C.1	<i>FRFs</i> - <i>Full model versus</i> métodos de redução. . . . .	114



# Lista de Tabelas

3.1	Propriedades mecânicas do aço SAE 1045. . . . .	41
3.2	Características da modificação. . . . .	47
3.3	Matriz para extração das formas modais. . . . .	50
4.1	Análise de refino de malha. . . . .	60
4.2	Ordenação e coordenadas dos pontos experimentais. . . . .	64
4.3	Análise da simetria no modelo da modificação - Modo 1. . . . .	65
4.4	Análise da simetria no modelo da modificação - Modo 2. . . . .	66
5.1	Parâmetros modais - Método da seleção de picos. . . . .	69
5.2	Frequências naturais numéricas ( <i>FEM</i> ). . . . .	71
5.3	Comparação entre as frequências naturais experimentais e <i>FEM</i> . . . . .	71
5.4	Frequências naturais ao longo dos estágios de modificação. . . . .	75
5.5	Comparação do primeiro modo de flexão numérico e experimental ao longo dos estágios de modificação. . . . .	79
5.6	Comparação do primeiro modo de torção numérico e experimental ao longo dos estágios de modificação. . . . .	79
5.7	Comparação do primeiro modo de flexão proposto e experimental ao longo dos estágios de modificação. . . . .	81
5.8	Comparação do primeiro modo de torção proposto e experimental ao longo dos estágios de modificação. . . . .	81
5.9	Pontos experimentais e nós da malha numérica para cada estágio de modificação. . . . .	82
A.1	Vantagens e desvantagens do método direto baseado em parâmetros modais.	100
A.2	Vantagens e desvantagens do método indireto baseado em parâmetros modais.	101
A.3	Vantagens e desvantagens do método baseado em funções de resposta em frequência ( <i>FRFs</i> ). . . . .	102
A.4	Limites das variáveis de projeto. . . . .	106
A.5	Rigidezes obtidas com o ajuste de modelo. . . . .	107
B.1	Parâmetros modais. . . . .	109

C.1	Frequências naturais - $Hz$ .	114
-----	-------------------------------	-----

# Lista de Símbolos

## Abreviações

<i>Acc</i>	<i>Accelerometer</i> - Acelerômetro.
<i>CAE</i>	<i>Computer Aided Engineering</i> - Engenharia Auxiliada por Computador.
<i>CNC</i>	<i>Computer Numeric Control</i> - Comando Numérico Computadorizado.
<i>DOF</i>	<i>Degree of Freedom</i> - Grau de Liberdade.
<i>FE</i>	<i>Finite Elements</i> - Elementos Finitos.
<i>FEM</i>	<i>Finite Element Method</i> - Método dos Elementos Finitos.
<i>FRAC</i>	<i>Frequency Response Assurance Criterion</i> - Critério de Correlação de Resposta em Frequência.
<i>FRF</i>	<i>Frequency Response Function</i> - Função Resposta em Frequência.
<i>Guyan</i>	<i>Guyan Reduction</i> - Redução de Guyan.
<i>MAC</i>	<i>Modal Assurance Criterion</i> - Critério de Correlação Modal.
<i>m</i>	<i>Master DOF</i> - Grau de Liberdade Ativo.
<i>PP</i>	<i>Peak-Picking</i> - Método da Seleção de Picos.
<i>PSO</i>	<i>Particle Swarm Optimization</i> - Otimização por Enxame de Partículas.
<i>RPM</i>	<i>Revolutions Per Minute</i> - Rotações Por Minuto.
<i>S4</i>	<i>4-Node Shell Element</i> - Elemento de Casca de 4 nós.
<i>S4R</i>	<i>4-Node Shell Element and Reduced Integration</i> - Elemento de Casca de 4 nós e Integração Reduzida.
<i>S8R</i>	<i>8-Node Shell Element and Reduced Integration</i> - Elemento de Casca de 8 nós e Integração Reduzida.
<i>SAE</i>	<i>Society of Automotive Engineers</i> - Sociedade de Engenheiros Automotivos.
<i>SEREP</i>	<i>System Equivalent Reduction/Expansion Process</i> - Processo de Expansão/Redução Equivalente do Sistema.
<i>s</i>	<i>Slave DOF</i> - Grau de Liberdade Desconsiderado.

## Nomenclatura

$\ddot{x}$	Aceleração.	$\frac{m}{s^2}$
$c$	Amortecimento Viscoso.	$\frac{N.s}{m}$
$a_f$	Profundidade de Avanço.	$mm$
$A$	Constante Modal.	-
$a_p$	Profundidade de Corte.	$mm$
$\delta$	Deslocamento.	$m$
$[\Delta C]$	Diferença das Matrizes de Amortecimento.	$\frac{N.s}{m}$
$[\Delta M]$	Diferença das Matrizes de Massa.	$kg$
$[\Delta K]$	Diferença das Matrizes de Rigidez.	$\frac{N}{m}$
$[\Delta B]$	Diferença das Matrizes de Rigidez Dinâmica.	$\frac{N}{m}$
$\rho$	Densidade.	$\frac{kg}{m^3}$
$x$	Deslocamento.	$m$
$h$	Espessura do Cavaco.	$mm$
$F_c$	Força de Excitação.	$N$
$f_n$	Frequência Natural.	$Hz$
$k_{Rx}$	Mola de Rotação na Direção X.	$\frac{N.m}{rad}$
$k_{Uz}$	Mola de Translação na Direção Z.	$\frac{N}{m}$
$[C]$	Matriz de Amortecimento.	$\frac{N.s}{m}$
$[C_1]$	Matriz de Amortecimento - Estrutura Modificada.	$\frac{N.s}{m}$
$[C_0]$	Matriz de Amortecimento - Estrutura Original.	$\frac{N.s}{m}$
$[H]$	Matriz de $FRF$ s.	$\frac{m}{N}$
$[H_1]$	Matriz de $FRF$ s - Estrutura Modificada.	$\frac{m}{N}$
$[H_0]$	Matriz de $FRF$ s - Estrutura Original.	$\frac{m}{N}$
$[I]$	Matriz Identidade.	-
$[M]$	Matriz de Massa.	$kg$
$[M_1]$	Matriz de Massa - Estrutura Modificada.	$kg$
$[M_0]$	Matriz de Massa - Estrutura Original.	$kg$
$[K]$	Matriz de Rigidez.	$\frac{N}{m}$
$[B]$	Matriz de Rigidez Dinâmica.	$\frac{N}{m}$
$[B_1]$	Matriz de Rigidez Dinâmica - Estrutura Modificada.	$\frac{N}{m}$

$[B_0]$	Matriz de Rigidez Dinâmica - Estrutura Original.	$\frac{N}{m}$
$[K_1]$	Matriz de Rigidez - Estrutura Modificada.	$\frac{N}{m}$
$[K_0]$	Matriz de Rigidez - Estrutura Original.	$\frac{N}{m}$
$m$	Massa.	$kg$
$[T]$	Matriz de Transformação.	-
$N_T$	Modo de Truncamento da Série.	-
$c_2$	Ponto de Contato - Inseto 2.	-
$\nu$	Coefficiente de Poisson.	-
$c_1$	Ponto de Contato - Inseto 1.	-
$k$	Rigidez de Mola.	$\frac{N}{m}$
$N$	Rotação.	$RPM$
$t$	Tempo.	$s$
$R$	Termo Residual.	$\frac{m}{N}$
$a_e$	Penetração de Trabalho.	$mm$
$G$	Função Transferência.	$\frac{m}{N}$
$\dot{x}$	Velocidade.	$\frac{m}{s}$
$E$	Módulo de Elasticidade ( <i>Young</i> ).	$Pa$

### Símbolos Gregos

$\xi$	Fator de Amortecimento.	-
$\gamma$	Ângulo entre Insetos.	$^\circ$
$\lambda$	Autovalores.	-
$\Phi$	Autovetores.	-
$\alpha$	Constante de Proporcionalidade.	-
$\beta$	Constante de Proporcionalidade.	-
$[\Phi]$	Matriz de Autovetores.	-
$\omega$	Frequência.	$\frac{rad}{s}$
$\omega_d$	Frequência Natural Amortecida.	$\frac{rad}{s}$
$\omega_r$	Frequência Natural.	$\frac{rad}{s}$
$\{\lambda\}$	Vetor de Autovalores.	-
$\{\omega_r\}$	Vetor de Frequências Naturais.	$\frac{rad}{s}$



# Sumário

Lista de Figuras	xvii
Lista de Tabelas	xxi
Lista de Símbolos	xxiii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos	5
1.2 Estrutura do Trabalho	5
<b>2 Fundamentação Teórica</b>	<b>7</b>
2.1 Vibrações	7
2.1.1 Vibração Livre	8
2.1.2 Vibração Forçada	9
2.1.3 Vibração Auto-excitada (ou do tipo <i>chatter</i> )	9
2.2 Análise Experimental e Numérica de Sistemas Dinâmicos	11
2.2.1 Sistemas Discretos e Contínuos	11
2.2.2 Modelamento	11
2.2.2.1 Modelo Espacial	12
2.2.2.2 Modelo Modal	13
2.2.2.3 Condições de Ortogonalidade	14
2.2.2.4 Modelo de Resposta	14
2.2.2.5 Função de Transferência	15
2.2.2.6 Função Resposta em Frequência ( <i>FRF</i> )	17
2.2.2.7 Gráficos <i>FRF</i> de um Sistema Amortecido de Múltiplos Graus de Liberdade	19
2.2.3 Teorema da Reciprocidade: Teorema de Maxwell-Betti	21
2.2.4 Matriz de Amortecimento Proporcional ou de Rayleigh.	23
2.2.5 Métodos de Extração de Parâmetros Modais	25
2.2.5.1 Método da Banda de Meia-Potência ou Seleção de Pico (Peak-Picking - <i>PP</i> )	25
2.2.6 Análise Modal Experimental	27

2.2.7	Método dos Elementos Finitos ( <i>Finite Element Method - FEM</i> ) . . . . .	28
2.2.7.1	Integração Numérica Total e Reduzida . . . . .	30
2.2.7.2	Elemento de Casca - <i>S4R</i> . . . . .	30
2.2.7.3	Análise Modal Numérica . . . . .	32
2.3	Métodos de Redução de Ordem de Modelos Numéricos . . . . .	32
2.3.1	Aspectos Gerais . . . . .	33
2.3.2	<i>SEREP - System Equivalent Reduction-Expansion Process</i> . . . . .	34
2.4	Modelamento de Modificações Estruturais . . . . .	36
2.5	Critérios de Correlação . . . . .	38
2.5.1	Critério de Correlação Modal - <i>MAC</i> . . . . .	38
2.5.2	Critério de Correlação de Resposta em Frequência - <i>FRAC</i> . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Materiais e Métodos</b> . . . . .	<b>41</b>
3.1	Materiais e Equipamentos . . . . .	41
3.2	Hipóteses e Considerações . . . . .	44
3.3	Métodos . . . . .	46
3.3.1	Análise Modal Experimental . . . . .	48
3.3.2	Análise Dinâmica - <i>FRFs</i> Experimentais . . . . .	51
3.3.3	Análise Modal Numérica . . . . .	52
3.3.4	Análise Dinâmica - <i>FRFs</i> Numéricas . . . . .	53
3.3.5	Análise Dinâmica - <i>FRFs</i> Método Proposto . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Análises Preliminares</b> . . . . .	<b>59</b>
4.1	Análise de Refino de Malha . . . . .	59
4.2	Determinação do Tamanho de Malha e Tipo de Elemento . . . . .	59
4.3	Deteminação dos Pontos da Análise Modal Experimental . . . . .	62
4.3.1	Análise do Erro Relacionado à Simplificação de Simetria no Modelo da Modificação . . . . .	64
4.4	Análise do Truncamento Modal Numérico . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Resultados e Discussões</b> . . . . .	<b>69</b>
5.1	Análise Modal . . . . .	69
5.1.1	Análise Modal Experimental . . . . .	69
5.1.2	Análise Modal Numérica - <i>FEM</i> . . . . .	71
5.2	Análise Dinâmica - <i>FRF</i> . . . . .	72
5.2.1	Análise Dinâmica - <i>FRFs</i> Experimentais . . . . .	72
5.2.2	Análise Dinâmica - <i>FRFs</i> Numéricas ( <i>FEM</i> ) . . . . .	75
5.2.3	Análise Dinâmica - <i>FRFs</i> Método Proposto . . . . .	79
5.3	Comparações . . . . .	81

<b>6 Conclusões e Perspectivas de Trabalhos Futuros</b>	<b>91</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>93</b>
<b>Apêndices</b>	<b>97</b>
<b>A Ajuste do Modelo de Elementos Finitos</b>	<b>99</b>
A.1 Métodos Diretos Baseados em Parâmetros Modais . . . . .	99
A.2 Métodos Indiretos Baseados em Parâmetros Modais . . . . .	100
A.3 Métodos Baseados em Funções de Resposta em Frequência . . . . .	101
A.4 Método de Ajuste de Modelo para Elementos de Placa Usando Otimização por Enxame de Partículas . . . . .	102
A.4.1 Otimização . . . . .	105
A.4.2 Limites de Busca do Algoritmo . . . . .	106
A.4.3 Problema de Otimização . . . . .	106
A.4.4 Resultados . . . . .	107
<b>B Parâmetros Modais Extraídos</b>	<b>109</b>
<b>C Redução de Modelo Numérico Aplicado a Análise Dinâmica</b>	<b>111</b>
C.1 Materiais e Métodos . . . . .	111
C.2 Resultados e Discussões . . . . .	114
C.3 Conclusões . . . . .	115



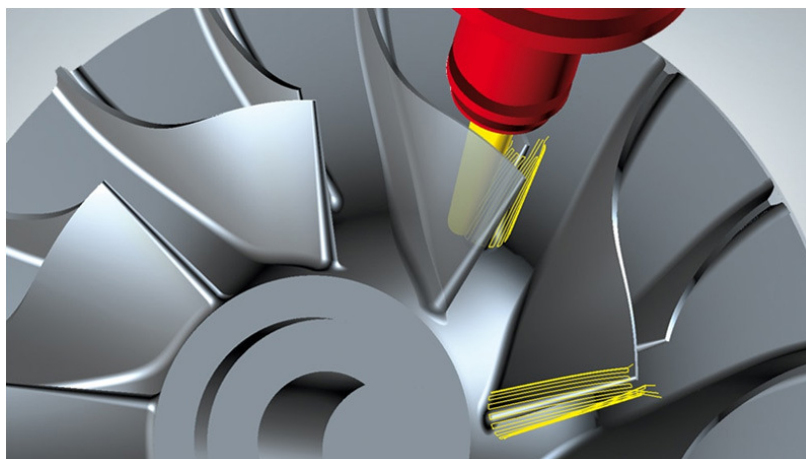
# Capítulo 1

## Introdução

A evolução dos projetos de sistemas mecânicos vêm exigindo cada vez mais peças das mais variadas formas e tamanhos. Além de tolerâncias mais apertadas em conjuntos com alta qualidade superficial. Contudo, o avanço das tecnologias de fabricação, como por exemplo, a utilização do Comando Numérico Computadorizado (*CNC*) nos processos de torneamento e fresamento, vem atendendo muito bem estas premissas.

Por outro lado, com a necessidade de preservar os recursos naturais e reduzir o consumo de matéria-prima e energia, estes mesmos componentes estão apresentando cada vez mais, características e componentes com menores espessuras, principalmente nas indústrias automotiva e aeronáutica. Estas indústrias necessitam manter as propriedades dinâmicas e estruturais dos componentes, reduzindo cada vez mais a massa e aumentando o desempenho. Exemplos desta necessidade são os componentes dos blocos de motor automotivo e pás de turbinas (Figura 1.1). Estas peças com paredes finas são propícias a apresentarem suas primeiras frequências naturais mais baixas e com maiores amplitudes de vibração.

Figura 1.1: Exemplo de usinagem de peças de parede fina, lâmina de turbina.

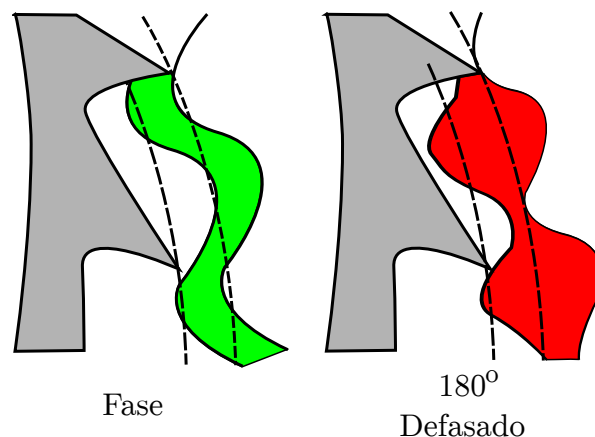


Fonte: adaptado de hyperMILL (2017).

Dentre os processos de fabricação com remoção de material, o fresamento é uma das principais técnicas empregadas, devido principalmente a sua capacidade de usinar peças com geometrias de alta complexidade. Apesar dos avanços recentes na tecnologia de usinagem, o uso elevado de peças com alta flexibilidade e a necessidade de grandes taxas de remoção de material nestes componentes, podem causar severas vibrações forçadas e auto-excitadas (TUYSUZ; ALTINTAS, 2017), resultando em reduções de produtividade. Além de causar falhas e erros dimensionais, danos ao eixo-árvore, ou ainda em casos extremos, podendo até causar a inutilização da máquina ferramenta.

As vibrações durante os processos de fresamento são um dos principais problemas causadores de limitação na determinação dos parâmetros de trabalho. Onde o mecanismo de auto-excitação (*chatter*), se destaca como o responsável pela maioria das ocorrências de vibração durante a usinagem dos materiais (BUDAK et al., 2012). De acordo com Rao (2009), há sistemas para os quais a fonte excitadora é função dos parâmetros de movimento do sistema, tais sistemas são denominados sistemas vibratórios auto-excitados, visto que o próprio movimento produz a força excitadora. No fresamento, estas vibrações regenerativas ocorrem devido a um mecanismo de auto-excitação durante a operação de corte, que se dá devido ao sistema não conseguir acompanhar a dinâmica imposta no processo. Inicialmente, um dos modos estruturais do sistema máquina-peça é excitado pelas forças inerentes ao processo de corte. Uma ondulação na superfície usinada é deixada pela passagem do dente da ferramenta. Esta superfície ondulada é removida na passagem do próximo dente que também deixa uma superfície ondulada devido a vibrações estruturais. Variações na espessura do cavaco resultam em forças de corte variáveis, que, por sua vez, afetam as vibrações subsequentes da ferramenta. Dependendo do ângulo de fase entre as duas ondas sucessivas (Figura 1.2), a espessura máxima do cavaco pode crescer de forma exponencial (ALTINTAS, 2012). Estas vibrações ocorrem a uma frequência ligeiramente superior aos modos naturais mais flexível do sistema.

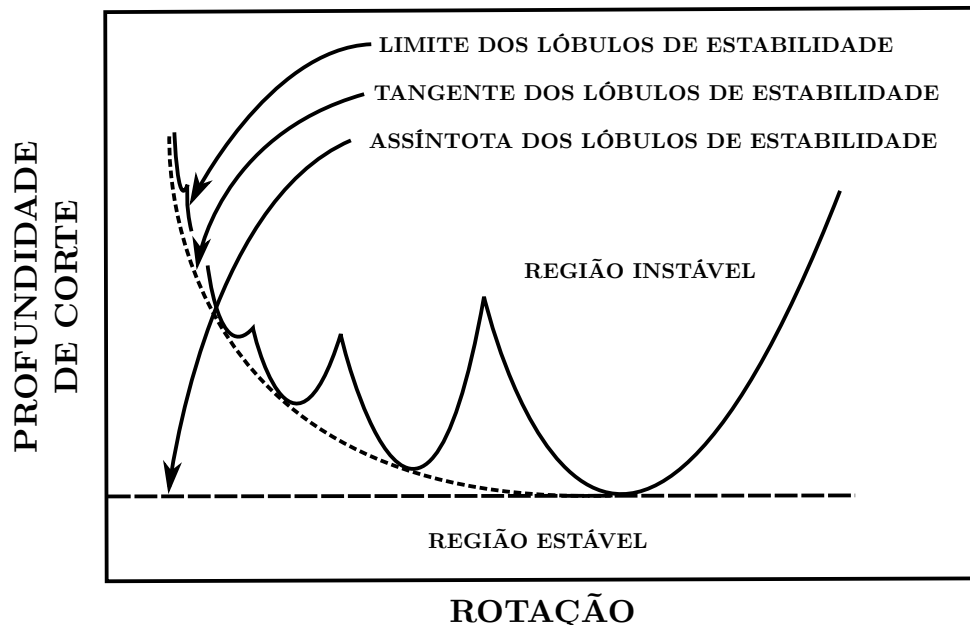
Figura 1.2: Mecanismo de vibração auto-excitada no fresamento.



Fonte: produção do próprio autor.

Taylor (1907) foi o pioneiro na identificação da vibração auto-excitada em processos de fabricação, e a descrevia na época, como o mais obscuro e delicado de todos os problemas que poderiam ser enfrentados durante a usinagem de materiais, e ainda observava que, em muitos casos, nenhuma regra ou fórmula poderia ser elaborada para guiar de forma precisa na solução deste problema. Em seguida, Arnold (1946) estudou o efeito regenerativo do *chatter*, onde apontava que era causado por um efeito negativo do amortecimento. Mais tarde foi reconhecido por Tobias e Fishwick (1958) e Thusty e Polacek (1963) que as fontes mais poderosas de auto-excitação, estão associados à dinâmica estrutural da máquina-peça e das passagens subsequentes da ferramenta de corte (ALTINTAS; BUDAK, 1998a). Com o passar dos anos foram surgindo os primeiros métodos de análise e propostas para prevenção da vibração auto-excitada em processos de usinagem, como o proposto por Merritt (1965), que baseia-se nas teorias propostas por Andrew e Tobias (1961), Arnold (1946) e Hahn (1954) para definir uma fronteira entre a usinagem estável e instável em termos da profundidade de corte e rotação, resultando em Diagramas de Lóbulos de Estabilidade (Figura 1.3). A utilização dos Lóbulos de Estabilidade possibilita escolher parâmetros de usinagem apropriados para alcançar o máximo de remoção de material sem a ocorrência da vibração auto-excitada.

Figura 1.3: Diagrama de Lóbulos de Estabilidade.



Fonte: adaptado de Merritt (1965).

Posteriormente, vários métodos alternativos para prever a vibração regenerativa na usinagem considerando a variação das forças e espessura de corte foram sendo apresentados, como os propostos por Sridhar et al. (1968), Opitz (1968), Thusty et al. (1983), Minis e Yanushevsky (1993) e Altintas e Budak (1995). Na usinagem de elementos flexíveis,

como as placas de parede fina, uma simplificação importante é feita. Considera-se que a rigidez da ferramenta é imensamente maior que a rigidez da peça, com isso assume-se que as vibrações ocorrem principalmente na peça usinada, devido aos seus primeiros modos naturais ocorrerem em frequências mais baixas do que as da ferramenta de corte. Vários autores tem estudado o modelamento do *chatter* no fresamento de placas de parede fina. Altintas e Budak (1998a) e Altintas e Budak (1998b) apresentaram uma formulação considerando entre outras a condição de fresamento de um elemento flexível, onde, um sistema de corte (ferramenta de corte, eixo árvore, sistema de fixação, etc) relativamente rígido é adotado. Baseado nos modelos apresentados por estes autores, e considerando uma simplificação para um grau de liberdade, Thévenot et al. (2006) apresentaram uma formulação para o cálculo dos Diagramas de Lóbulos de Estabilidade de forma contínua durante o processo de fresamento de uma placa de parede fina. Henninger e Eberhard (2008) também apresentam estudos onde é considerada apenas a dinâmica da peça para prever a estabilidade do processo. Na Usinagem de peças flexíveis, a massa e a rigidez do sistema variam continuamente, acarretando em alterações nos Diagramas de Lóbulos de Estabilidade.

Dado isso, além da necessidade de estudar a dinâmica de corte do sistema máquina-peça, faz-se necessário prever a modificação do comportamento dinâmica da peça que está sendo submetida ao processo de usinagem. Geralmente esta variação é obtida por meio de modelos de *FE* (Elementos Finitos) completos e por análise modal experimental em cada uma das localizações do caminho da ferramenta a medida que o material é removido (TUYSUZ; ALTINTAS, 2017). Seguy et al. (2008) utilizaram um modelo de *FE* para prever a dinâmica de uma placa de parede fina e relacionar com a qualidade superficial resultante após o fresamento de acabamento, utilizando os Diagramas de Lóbulos de Estabilidade. Alan et al. (2010) apresentaram uma formulação que leva em consideração a variação da característica dinâmica durante o ciclo de usinagem da peça para traçar o Diagrama de Lóbulos de Estabilidade. A metodologia baseia-se em um modelo de elementos finitos e consiste em remover gradativamente os elementos que encontram-se no percurso da ferramenta, representando a usinagem do material. Em seguida, Budak et al. (2012) utilizaram a formulação apresentada por Alan et al. (2010) para prever o *chatter* na usinagem de lâminas de turbina. Recentemente, Yang et al. (2016) apresentaram um modelo para a previsão da estabilidade no fresamento periférico de peças de parede fina com superfícies curvas, utilizando um modelo analítico para a determinação da dinâmica variável da peça. Uma metodologia comumente utilizada para prever a dinâmica de estruturas é conhecida como Mudança Estrutural. Inicialmente, D'Ambrogio (1990) apresentou uma formulação para prever de forma local a resposta dinâmica de estruturas, utilizando *FRF* s experimentais e dados numéricos em seus equacionamentos. Diversos autores como, Özgüven (1990), D'Ambrogio e Sestieri (2001), Hang et al. (2007), entre outros, utilizaram formulações similares para realizar a previsão de variações na dinâmica de peças,

partindo sempre de Funções Resposta em Frequência experimentais, o que torna a previsão extremamente instável, devido principalmente as incertezas contidas no processo de experimentação. Ainda, Tuysuz e Altintas (2017) apresentaram uma metodologia de previsão do comportamento dinâmico de placas de parede fina em pontos discretos da peça, utilizando para isto, um modelo analítico baseado em subestruturação.

Contudo, diante do cenário apresentado, constata-se que vários fatores justificam e motivam o estudo e o desenvolvimento de uma metodologia capaz de prever o comportamento dinâmico de uma placa de parede fina que está sendo submetida a mudanças de massa e rigidez por meio da usinagem.

## 1.1 Objetivos

Este trabalho propõe-se apresentar uma metodologia capaz de prever, no domínio da frequência, o comportamento dinâmico de uma placa de parede fina, que está sendo submetida a modificações estruturais por meio da remoção de material (durante o Processo de Fresamento) utilizando os conceitos do Método dos Elementos Finitos, Redução de Ordem de Modelo e Mudança Estrutural. Devido à extensão do presente objetivo geral, o mesmo é dividido nos objetivos específicos a seguir:

- Realizar uma revisão bibliográfica visando embasamento para pesquisa e compreensão dos trabalhos científicos mais relevantes, bem como, os mais recentes que foram desenvolvidos na área de previsão de comportamento dinâmico, redução de ordem de modelo e mudança estrutural;
- Visando conhecer as características dinâmicas do sistema envolvido, realizar análises dinâmicas experimentais e computacionais da placa de parede fina;
- Determinar as *FRFs* experimentais e numéricas a serem utilizadas para validação da metodologia de previsão proposta neste trabalho;
- Implementar o algoritmo da metodologia numérica proposta para a previsão do comportamento dinâmico;
- Comparar os resultados das *FRFs* da estrutura modificada obtidas pela metodologia proposta, com aquelas obtidas experimentalmente e pelo Método dos Elementos Finitos.

## 1.2 Estrutura do Trabalho

A estrutura de apresentação da presente dissertação foi planejada de forma que proporcione uma melhor compreensão da metodologia proposta para previsão do compor-

tamento dinâmico das modificações aplicadas a placa de parede fina. Sendo assim, o trabalho é composto por sete capítulos, que são dispostos da seguinte forma:

- **Capítulo 1 - *Introdução***: É apresentada uma breve imersão do problema nos contextos atuais, bem como, a motivação e justificativa de se fazer uma previsão do comportamento dinâmico durante o processo de fresamento. Por fim, os principais objetivos pretendidos são listados.
- **Capítulo 2 - *Fundamentação Teórica***: Capítulo dedicado ao estudo de referências bibliográficas com ênfase nas áreas de dinâmica, modelamento, Método dos Elementos Finitos (*FEM*), reduções de modelos numéricos e mudança estrutural, bem como a formulação de alguns equacionamentos utilizados no algoritmo de previsão do comportamento dinâmico.
- **Capítulo 3 - *Análises Preliminares***: São apresentadas as análises prévias realizadas com o intuito de definir as melhores estratégias a serem utilizadas na pesquisa, a ressaltar, análise de refino de malha, determinação dos pontos experimentais e o estudo do truncamento modal para dados numéricos.
- **Capítulo 4 - *Materiais e Métodos***: Inicialmente, é apontada a metodologia científica utilizada para realização deste trabalho. Em seguida, a tática aplicada para a pesquisa é apresentada e discutida, demonstrando os materiais utilizados, e o método para previsão do comportamento dinâmico é proposto.
- **Capítulo 5 - *Resultados e Discussões***: Neste capítulo, apresentam-se os resultados e as respectivas discussões na seguinte ordem. Primeiramente a análise modal experimental, seguido dos resultados da análise numérica juntamente com o índice *MAC* (Critério de Correlação Modal) para medir a representatividade do modelo. Prosseguindo, as Funções Resposta em Frequência (*FRF*) das análises harmônicas numérica e experimental, que serão utilizados na validação do método proposto. Por fim, são apresentados e discutidos os resultados obtidos pelo método proposto, comparando com dados experimentais e numéricos e o índice *FRAC* (Critério de Correlação de Resposta em Frequência).
- **Capítulo 6 - *Conclusões e Perspectivas para Trabalhos Futuros***: Apresentam-se as principais conclusões obtidas no presente trabalho com base na discussão de resultados efetuada no Capítulo 5. Dessa forma, finaliza-se a dissertação, resumindo as principais contribuições e, apresentando também as perspectivas para trabalhos futuros.
- **Capítulo 7 - *Referências Bibliográficas***: São apresentadas as literaturas utilizadas para a fundamentação teórica da pesquisa apresentada.

# Capítulo 2

## Fundamentação Teórica

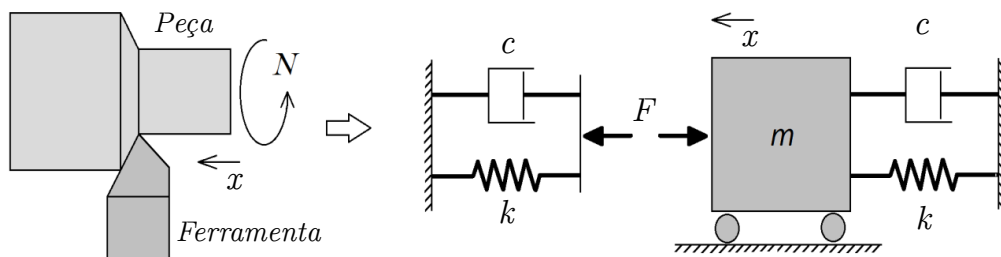
Neste capítulo é apresentado uma revisão bibliográfica dos principais temas abordados nesta dissertação. Por se tratar de um estudo relacionado à Usinagem de placas de parede fina os conhecimentos estudados são: Dinâmica de Estruturas (Vibrações), Modelamento, Análise Modal Experimental, Método dos Elementos Finitos, Métodos de Redução de Ordem de Modelo, Mudança Estrutural e Métodos de Correlação.

### 2.1 Vibrações

De acordo com Rao (2009), movimentos que se repetem após um intervalo de tempo, podem ser denominados: vibrações ou oscilações. Vibrações são iniciadas quando um elemento de inércia sofre uma perturbação, ou seja, é retirado de sua posição de equilíbrio por uma energia colocada no sistema por uma fonte externa (GRAHAM, 2000).

Em geral, um sistema vibratório inclui um meio para armazenar energia potencial (mola ou elasticidade), um meio para armazenar energia cinética (massa ou inércia) e um meio de perda gradual de energia (amortecedor). Grande parte dos sistemas práticos, normalmente sistemas contínuos de infinitos graus de liberdade, podem ser descritos usando um sistema discreto com número finito de graus de liberdade (RAO, 2009), como o mostrado na Figura 2.1.

Figura 2.1: Sistema contínuo modelado por massa, mola e amortecedor.



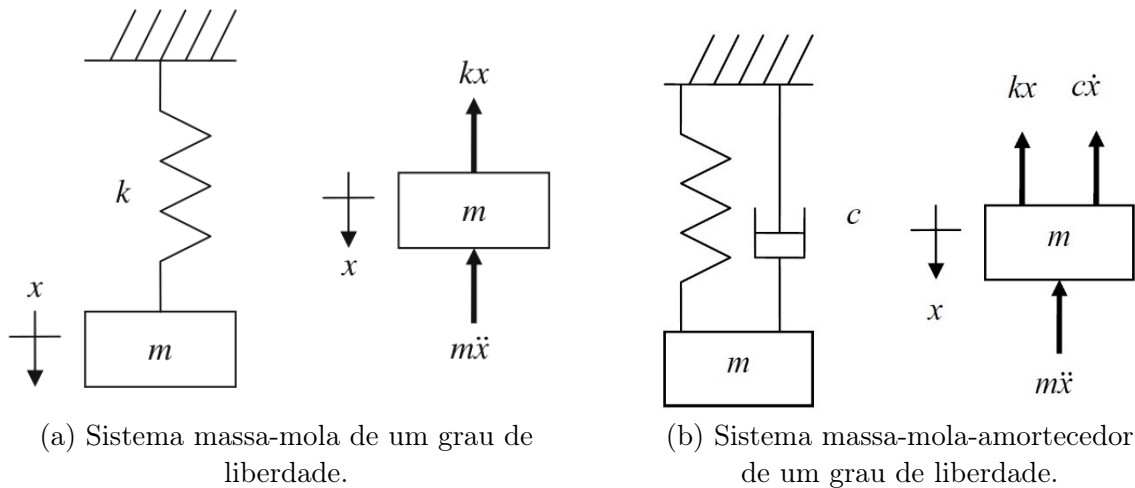
Fonte: adaptado de Schmitz e Smith (2008).

Com isso, sistemas de alta complexidade podem ser representados por combinações de massas, molas ou componentes que possuem a capacidade de se deformarem elásticamente (sem mudança de forma permanente) e amortecedores. A vibração de corpos que apresenta estas características pode ser dividida em três categorias principais: Vibração Livre, Vibração Forçada e Vibração Auto-excitada (ou do tipo *chatter*) (BALACHANDRAN; MAGRAB, 2011).

### 2.1.1 Vibração Livre

Se um sistema, após uma perturbação inicial, continuar a vibrar por conta própria, a vibração resultante é conhecida como vibração livre, ou seja, nenhuma força externa age sobre o sistema (RAO, 2009). Esta vibração pode ser dividida em não-amortecida (Figura 2.2(a)) e amortecida (Figura 2.2(b)).

Figura 2.2: Vibração livre.



Fonte: adaptado de Balachandran e Magrab (2011).

As formulações matemáticas que descrevem seu movimento são, para o sistema não amortecido a Equação 2.1.1 e pra o sistema amortecido a Equação 2.1.2 .

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad (2.1.1)$$

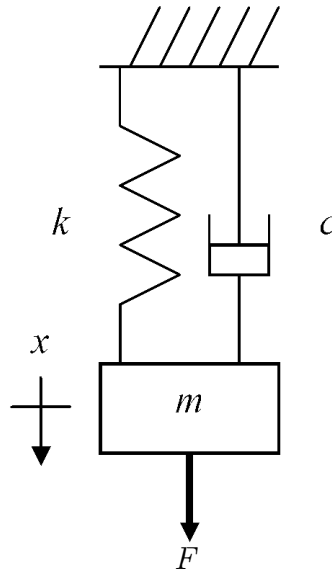
$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0. \quad (2.1.2)$$

Sendo  $m$  a massa,  $c$  o amortecimento e  $k$  a rigidez do sistema,  $t$  o tempo em segundos,  $x$ ,  $\dot{x}$  e  $\ddot{x}$  o deslocamento e suas primeira e segunda derivadas no tempo (velocidade e aceleração).

### 2.1.2 Vibração Forçada

Se um sistema estiver sujeito a uma força externa ( $F(t)$ ), a vibração resultante é conhecida como vibração forçada (RAO, 2009). O comportamento do sistema sob vibração forçada depende do tipo da excitação externa. Se esta excitação for periódica, a vibração forçada de um sistema linear (Figura 2.3) também será periódica (CHENG, 2008). Neste sistema, o amortecimento é primordial em seu mecanismo, pois caso ele não esteja presente, a amplitude de vibração será amplificada a cada ciclo, resultando no colapso do sistema ou estrutura.

Figura 2.3: Sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade em vibração forçada.



Fonte: adaptado de Balachandran e Magrab (2011).

Seu movimento é descrito pela Equação 2.1.3 .

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t). \quad (2.1.3)$$

Nos casos onde a força externa é não-harmônica, porém periódica, pode-se utilizar a expansão em série de Fourier, onde a força é decomposta em uma soma de funções harmônicas (senos e cossenos). A resposta do sistema será dada pela superposição (somatório) das respostas às funções harmônicas individuais (RAO, 2009).

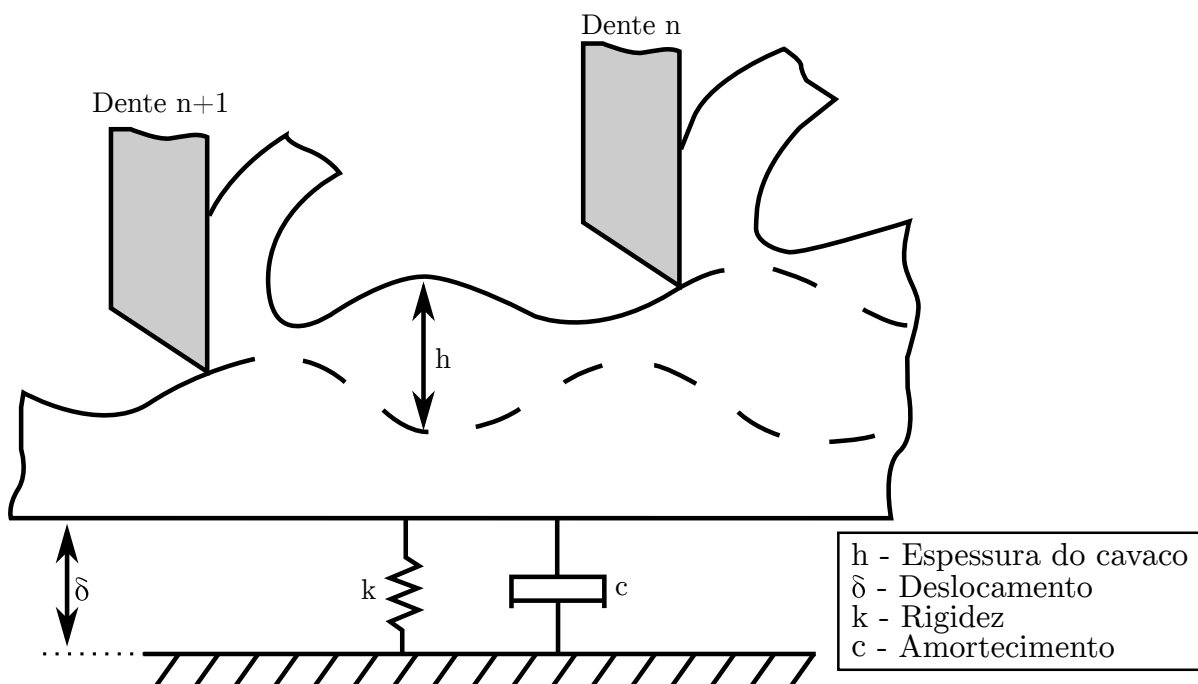
### 2.1.3 Vibração Auto-excitada (ou do tipo *chatter*)

Como descrito na subseção anterior, a vibração forçada é realizada por uma fonte externa e independente do movimento. Porém, existem inúmeros casos práticos (como

na usinagem) em que as forças que excitam o sistema são dependentes da cinemática do movimento. Este tipo de sistema é conhecido como auto-excitado, uma vez que o próprio movimento é responsável pela excitação (CHENG, 2008).

Na usinagem, as vibrações auto-excitadas (*chatter*) ocorrem devido a um mecanismo de auto-excitação durante o processo de remoção de material (Figura 2.4). Isto se dá devido ao sistema não conseguir acompanhar a dinâmica imposta pela operação de corte (BUDAK; TUNC, 2010). A espessura variável do cavaco regula a força de corte, que, por sua vez, afeta as vibrações subseqüentes da ferramenta.

Figura 2.4: Mecânismo de vibração auto-excitada no fresamento.



Fonte: adaptado de Thévenot et al. (2006).

O *Chatter* descreve as vibrações sofridas pela ferramenta ou pela peça, geradas pelas interações entre ambas. Estas interações estão geralmente classificadas em duas categorias (QUINTANA; CIURANA, 2011). A primeira, chamada de *chatter* primário, é um resultado do próprio processo de corte, causado pelo atrito entre a ferramenta e o material que está sendo usinado, ou pela excitação de um dos modos dominantes do sistema. A segunda categoria, chamada de *chatter* secundário, surge como consequência do perfil ondulado deixado na superfície da peça usinada e entre os dentes da ferramenta. Vibrações regenerativas surgem quando a passagem de um dente é afetada por esta superfície resultante da passagem do dente anterior, uma vez que as ondulações deixadas pelo dente anterior provocam variações na espessura do cavaco subseqüente, fazendo variar a força de corte. Por isso, para prever o *chatter* a característica dinâmica do sistema deve ser equacionada.

## 2.2 Análise Experimental e Numérica de Sistemas Dinâmicos

O conceito de modelo em análise dinâmica (Experimental e Numérico), pode ser apresentado como um conjunto de formulações capazes de descrever o comportamento dinâmico de um sistema físico. Este caracteriza-se pela relação entre um sinal de excitação (sinal de entrada), que pode ser: harmônica, periódica, transitória e/ou aleatória, e o sinal de resposta do sistema (sinal de saída).

### 2.2.1 Sistemas Discretos e Contínuos

Os modelos de sistemas físicos podem ser agrupados em duas categorias: modelos discretos e contínuos. Os primeiros caracterizam-se por ter um número finito de graus de liberdade, ao contrário dos modelos contínuos que possuem infinitos graus de liberdade. Entende-se por graus de liberdade, o número de coordenadas independentes necessárias para descrever de forma completa o movimento do sistema mecânico.

Nos sistemas discretos, a massa está concentrada em pontos, no centro de massa dos corpos, sendo a rigidez e amortecimento características dos elementos de ligação. Contudo, nos sistemas contínuos, a massa, a rigidez e o amortecimento estão distribuídas nas três dimensões de um sólido. Um mesmo sistema, pode ser modelado de forma discreta e contínua, diferindo fundamentalmente em termos de graus de liberdade e nas relações matemáticas entre as diferentes variáveis do sistema (MEIROVITCH, 1967).

Vários procedimentos de análise de sistemas contínuos, tanto analíticos como numéricos, têm sido desenvolvidos para o modelamento dos mesmos. No entanto, sua aplicação restringe-se a componentes de geometria muito simples, por exemplo: vigas, molas ou discos. Perante esta situação, tanto as técnicas numéricas, como o Método dos Elementos Finitos (*FEM*), quanto as técnicas experimentais, como a análise modal experimental, apresentam um papel importante, dada a simplicidade com que formas complexas podem ser modeladas em sistemas discretos, obtendo-se resultados que por outra via seriam nada triviais.

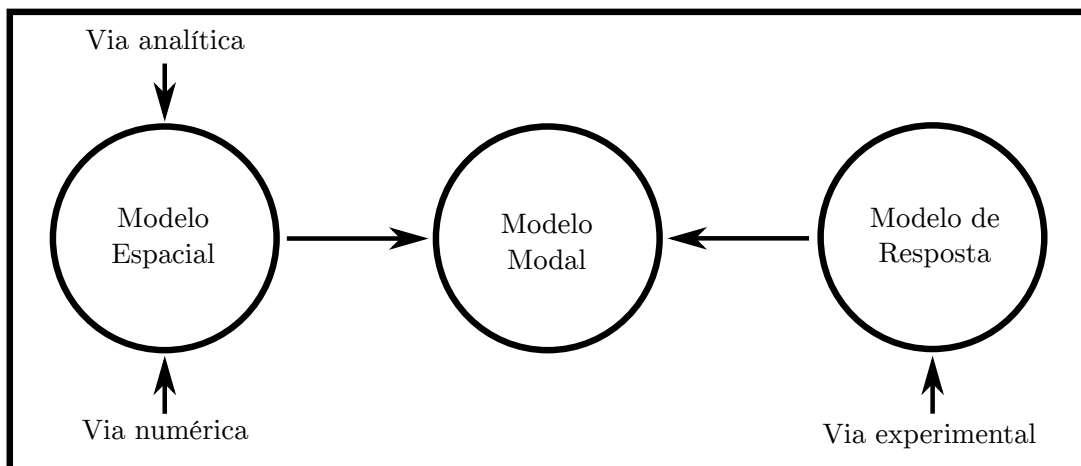
### 2.2.2 Modelamento

Matematicamente, o problema dinâmico pode ser representado por três modelos distintos:

- Modelo espacial;
- Modelo modal;
- Modelo de resposta.

De acordo com Vale (1996), o modelo espacial é consequência de uma formulação analítica e numérica, ao contrário do modelo em resposta que é normalmente obtido por medições experimentais realizadas sobre corpos de prova. O modelo modal pode ser obtido a partir dos dois modelos já citados, de acordo com a Figura 2.5.

Figura 2.5: Modelo dinâmico e suas variações.



Fonte: adaptado de Vale (1996).

### 2.2.2.1 Modelo Espacial

O modelo espacial de um sistema é constituído pela descrição das suas propriedades físicas e pela definição das equações de equilíbrio do mesmo (VALE, 1996).

Três propriedades físicas compõem o modelo espacial:

- Massa, que define a inércia como uma força proporcional a aceleração;
- Rigidez, constante de proporcionalidade entre os esforços aplicados a um corpo e o deslocamento sofrido pelos seus pontos;
- Amortecimento, como um fenômeno de dissipação de energia mecânica.

A aplicação dos princípios clássicos da dinâmica a um sistema físico, tais como: 2ª Lei de Newton, Princípio D'Alembert e Princípio de Hamilton, conduzem à obtenção da equação de equilíbrio dinâmico (Equação 2.1.3) para um sistema discreto, descrita como (EWINS, 1984):

$$[M] \left\{ \frac{d^2x(t)}{dt^2} \right\} + [C] \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} + [K] \{x(t)\} = \{F(t)\}, \quad (2.2.4)$$

onde  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  são respectivamente as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema. Sendo  $x(t)$  o deslocamento, as componentes restantes da equação correspondem

à velocidade e aceleração dos  $n$  graus de liberdade do sistema discreto. Dependendo do regime de vibração do sistema, livre ou forçado, o vetor  $F(t)$  será ou não um vetor nulo (EWINS, 1984).

Segundo Maia e Silva (1997), a integração da equação do movimento de um sistema dinâmico, por via numérica ou analítica, leva ao conhecimento da resposta do mesmo em função da variável tempo.

### 2.2.2.2 Modelo Modal

O modelo modal resulta da manipulação matemática da equação de equilíbrio do sistema mecânico (Equação 2.1.1). A solução geral desta equação, para condições iniciais não nulas, é dada por uma combinação linear de soluções do tipo

$$x = \phi e^{i\omega t}, \quad (2.2.5)$$

onde o vetor  $\phi$ , de ordem  $n \times 1$ , é formado por amplitudes que indicam quais as formas modais do problema, e é conhecido também como vetor modal. Substituindo a Equação 2.2.5 na Equação 2.1.1, obtém-se

$$(K - \omega^2 M)\phi e^{i\omega t} = 0, \quad (2.2.6)$$

que resultará em solução não-nula (a nula é a trivial), se e somente se

$$\det[K - \lambda M] = 0, \quad (2.2.7)$$

onde  $\lambda = \omega^2$ .

A Equação 2.2.7, conhecida como a equação característica do sistema, constitui-se em um problema generalizado de autovalores e autovetores, com  $N$  autovalores  $\lambda_r$  que a satisfaz.

A substituição de um autovalor  $\lambda_r$  na Equação 2.2.6 resulta num autovetor ( $\phi_r$  real correspondente ao  $r$ -ésimo modo de vibração do sistema não amortecido. Assim, a cada frequência natural  $\omega_r$  associa-se um modo de vibrar  $\phi_r$  obtido mediante a solução do sistema homogêneo que satisfaz

$$(K - \omega_r^2 M)\phi_r = 0. \quad (2.2.8)$$

Na solução deste problema, os autovalores e autovetores, correspondem ao conjunto das frequências e formas (modos) naturais de vibração do sistema. A cada autovalor é associado um autovetor que corresponde à situação de movimento síncrono da totalidade dos seus graus de liberdade (MAIA; SILVA, 1997). O modelo modal é caracterizado por um vetor das  $n$  frequências naturais de vibração e uma matriz com as  $n$  formas modais como colunas, no caso de uma extração completa. Define-se como parâmetros modais:

$\{\omega\}$  - Vetor contendo  $n$  frequências naturais de vibração,

$$\{\omega\} = \sqrt{\{\lambda\}} \quad (2.2.9)$$

$[\Phi]$  - Matriz modal ( $n \times n$ ) contendo as formas (modos) naturais de vibração em colunas.

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.2.10)$$

### 2.2.2.3 Condições de Ortogonalidade

O modelo modal da estrutura pode ser estudado empregando-se as propriedades de ortogonalidade (CLOUGH; PENZIEN, 2003), ou seja

$$\Phi^T M \Phi = m, \quad (2.2.11)$$

e

$$\Phi^T K \Phi = k, \quad (2.2.12)$$

onde

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix}, \quad (2.2.13)$$

é a matriz de massa modal (diagonal) e

$$k = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix}, \quad (2.2.14)$$

é a matriz de rigidez modal (diagonal).

### 2.2.2.4 Modelo de Resposta

Este modelo corresponde, normalmente, aos resultados do processo experimental, sendo constituído por um conjunto de Funções de Resposta em Frequência (*FRF*) que correspondem a razão entre a resposta do sistema na forma de deslocamento, velocidade

ou aceleração e a solicitação aplicada. Esta razão corresponde as seguintes equações em função da resposta obtida (VALE, 1996):

$$\{(x(t))\} = [H] \{F(t)\} - \text{Receptância}; \quad (2.2.15)$$

$$\left\{ \left( \frac{dx(t)}{dt} \right) \right\} = [H] \{F(t)\} - \text{Mobilidade}; \quad (2.2.16)$$

$$\left\{ \left( \frac{dx(t)}{dt^2} \right) \right\} = [H] \{F(t)\} - \text{Acelerância}, \quad (2.2.17)$$

onde  $[H]$  é corresponde a matriz das  $FRF$  nos  $n$  pontos medidos. Esta depende fundamentalmente das propriedades físicas da estrutura (mecânicas e geométricas) e das condições de contorno impostas à ela (MAIA; SILVA, 1997).

Segundo Ewins (1984), por aplicação de um conjunto de técnicas de ajuste das  $FRF$ , é possível evoluir para o modelo modal por definição de um conjunto de frequências e formas naturais de vibração sendo este procedimento conhecido por identificação modal.

### 2.2.2.5 Função de Transferência

Seja o sistema de vibração forçada amortecida conforme descrito anteriormente (Figura 2.1.2), o qual consiste de uma massa  $m$ , conectada a uma referência fixa por uma mola de rigidez  $k$ , e um amortecedor com coeficiente de amortecimento viscoso  $c$ . Para uma força  $F$  atuando sobre a massa do sistema, o movimento resultante da massa é restrito à uma única direção ( $x$ ), assim, um único grau de liberdade é suficiente para definir a configuração do sistema dado pela equação de movimento:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t). \quad (2.2.18)$$

Tomando-se a transformada de Laplace para solucionar uma equação diferencial de segunda ordem, dadas condições iniciais:

$$\mathcal{L} \{ \ddot{x}(t) \} = s^2 X(s) - sx(0) - \frac{dx(0)}{ds}, \quad (2.2.19)$$

onde  $x(0)$  e  $\frac{dx(0)}{ds}$  são as condições iniciais de deslocamento e velocidade, respectivamente, e  $X(s)$  é a Transformada de Laplace de  $x(t)$ . Contudo, como estamos interessados na Função de Transferência, que representa a resposta do sistema em regime permanente, as condições iniciais são tomadas nulas e a Transformada de Laplace, dada pela Equação 2.2.19, torna-se:

$$\mathcal{L} \{ \ddot{x}(t) \} = s^2 X(s). \quad (2.2.20)$$

Portanto, aplicando a Transformada de Laplace na Equação 2.2.18 , temos:

$$ms^2X(s) + csX(s) + kX(s) = F(s), \quad (2.2.21)$$

onde  $F(s)$  é a Transformada de Laplace de  $F(t)$ .

A Função de Transferência ( $G$ ), por definição, é a função que relaciona a resposta do sistema a uma excitação a ele aplicada. Neste caso, ela toma a seguinte forma:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}. \quad (2.2.22)$$

O denominador da Equação 2.2.22 é a equação característica que permite a determinação de duas raízes, as quais, para um sistema sub-amortecido (fator de amortecimento menor que um -  $\xi < 1$ ), são dadas por:

$$s_{1,2} = \sigma \pm i\omega_d \quad (2.2.23)$$

com

$$\sigma = -\xi\omega_n \quad (2.2.24)$$

e

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}, \quad (2.2.25)$$

onde  $\omega_n$  é a frequência natural,  $\omega_d$  é a frequência natural amortecida e  $\xi$  é o fator de amortecimento.

A Equação 2.2.22 pode ser agora reescrita como:

$$G(s) = \frac{1}{m(s - s_1)(s - s_2)} \quad (2.2.26)$$

onde  $s_1 = \sigma + i\omega_d$  e  $s_2 = s_1^* = \sigma - i\omega_d$ , que são as duas raízes da equação característica dadas pela Equação 2.2.23 e são denominadas de pólos da Função de Transferência. Tomando a Equação 2.2.26 e expandindo em frações parciais, a Função de Transferência pode ser reescrita como:

$$G(s) = \frac{A}{(s - s_1)} + \frac{A^*}{(s - s_1^*)} \quad (2.2.27)$$

onde os conjugados complexos  $A$  e  $A^*$  são definidos como sendo os resíduos da Função de Transferência. Os valores dos resíduos podem ser facilmente obtidos e são dados por:

$$A = \frac{1}{i2m\omega_d}. \quad (2.2.28)$$

Embora para um sistema com um grau de liberdade o resíduo  $A$  seja um número

imaginário puro, para sistemas com múltiplos graus de liberdade os resíduos são, em geral, números complexos completos, isto é, com parte real e imaginária.

### 2.2.2.6 Função Resposta em Frequência (*FRF*)

A Função Resposta em Frequência (*FRF*) é uma Função de Transferência expressa no domínio da frequência, relacionando a resposta de um ponto  $i$  a uma excitação de um ponto  $j$  (RAO, 2009). Essa grandeza é repetida como uma matriz  $[H_{ij}(\omega)]$ , com divisões compatíveis com o número de entradas e saídas consideradas. Dessa forma, a *FRF* é uma função muito utilizada na determinação do comportamento dinâmico de estruturas.

Portanto, avaliando a Função de Transferência dada pela Equação 2.2.27, considerando o domínio da frequência ( $\omega$ ) obtêm-se:

$$H(\omega) = G(s) |_{s=i\omega} = \frac{A}{i\omega - s_1} + \frac{A^*}{i\omega - s_1^*} = \frac{A}{i(\omega - \omega_d) + \xi\omega_n} + \frac{A^*}{i(\omega + \omega_d) + \xi\omega_n}. \quad (2.2.29)$$

A Equação 2.2.29 representa a expansão em frações parciais da *FRF* para um sistema de um grau de liberdade. Entretanto, a forma mais comum de se apresentar a *FRF*, consiste da manipulação da Equação 2.2.22

$$H(\omega) = G(s) |_{s=i\omega} = \frac{1}{m(i\omega)^2 + c(i\omega) + k}, \quad (2.2.30)$$

ou ainda,

$$H(\omega) = \frac{1}{k + i\omega c - \omega^2 m}. \quad (2.2.31)$$

A partir da Equação 2.2.31, considerando múltiplos graus de liberdade, tem-se:

$$[H(\omega)] = \frac{1}{[K] + i\omega[C] - \omega^2[M]}. \quad (2.2.32)$$

Considerando a inversa da Equação 2.2.32, obtêm-se a matriz de rigidez dinâmica:

$$[B(\omega)] = [H(\omega)]^{-1} = [K] + i\omega[C] - \omega^2[M]. \quad (2.2.33)$$

sendo  $[K]$ ,  $[C]$  e  $[M]$ , as matrizes de rigidez, amortecimento e massa do sistema, respectivamente,  $[H_{ij}(\omega)]$  a matriz das funções resposta em frequência,  $i$  e  $j$  os referidos pontos de resposta e excitação do sistema,  $[B(\omega)]$  a matriz de rigidez dinâmica e  $\omega$  a frequência em rad/s.

No entanto, de acordo com Fu e He (2001) e Ewins (1984), as Funções Resposta em Frequência podem ser obtida somente nos *DOFs* de interesse através da Equação 2.2.34.

$$[H_{ij}(\omega)] = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r A_{ij}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\xi_r \omega_r^2}, \quad (2.2.34)$$

onde  $[H_{ij}(\omega)]$  é a matriz das *FRF*s,  $i$  e  $j$  os referidos *DOF*s de resposta e excitação do sistema,  $N$  é o número total de autovetores do sistema (que é igual ao número total de *DOF*s do modelo de *FEM*),  $\omega_r$  a frequência natural do modo  $r$ ,  $\xi_r$  o amortecimento de cada um dos modos,  $\omega$  a frequência em rad/s e  ${}_r A_{ij}$  a constante modal, calculada como:

$${}_r A_{ij} = \Phi_{ir} \Phi_{jr}, \quad (2.2.35)$$

onde,  $\Phi_{ir}$  e  $\Phi_{jr}$  são as linhas  $i$  e  $j$  do autovetor  $r$  do sistema. Entretanto, esta série é truncada em um número finito de modos de vibração, desta forma, se apenas os primeiros modos  $m$  se enquadram na faixa de frequência de interesse, a Equação 2.2.34 é escrita como:

$$[H_{ij}(\omega)] = \sum_{r=1}^m \frac{{}_r A_{ij}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\xi_r \omega_r^2}, \quad (2.2.36)$$

sendo  $m$  o modo de truncamento da série.

Com este truncamento, surgem alguns erros e incertezas na determinação das *FRF*s. De acordo com Ewins (1984) e Vetrone et al. (2001), uma solução é que esses modos não considerados, contidos acima do modo de truncamento  $m$ , sejam representados por um termo residual de alta frequência  $R_{ij}(\omega)$ , desta forma a Equação 2.2.36 torna-se:

$$[H_{ij}(\omega)] = \sum_{r=1}^m \frac{{}_r A_{ij}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\xi_r \omega_r^2} + R_{ij}(\omega). \quad (2.2.37)$$

Onde o termo residual  $R_{ij}(\omega)$  é obtido por (VETRONE et al., 2001):

$$R_{ij}(\omega) = \sum_{r=m+1}^{N_T} \frac{{}_r A_{ij}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\xi_r \omega_r^2}, \quad (2.2.38)$$

com  $N_T \leq N$ , sendo  $N_T$  determinado considerando o erro máximo desejado, que pode ser calculado entre duas *FRF* obtidas com o truncamento da série em  $N_T$  e  $N_T - 1$ . Entretanto, de acordo com (TUYSUZ; ALTINTAS, 2017), a contribuição do amortecimento decai muito rapidamente com o aumento da frequência, desta forma, uma aproximação usual é calcular o termo residual como sendo,

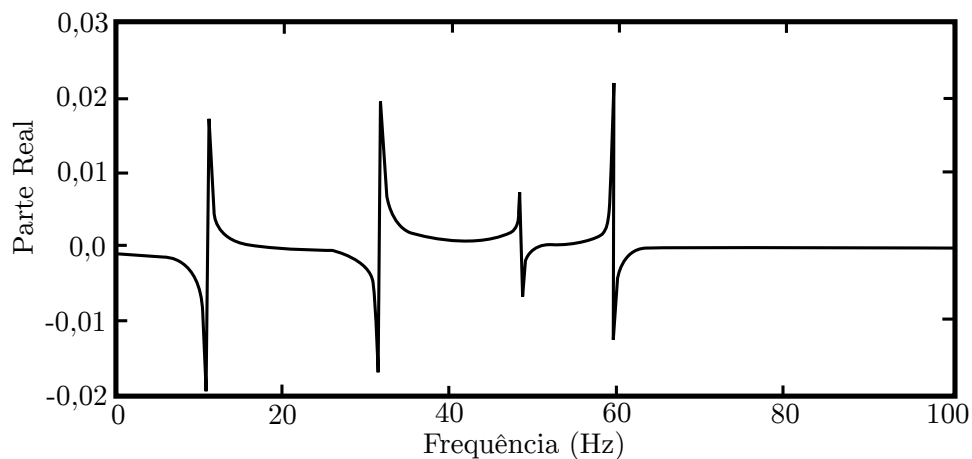
$$R_{ij}(\omega) = \sum_{r=m+1}^{N_T} \frac{{}_r A_{ij}}{\omega_r^2 - \omega^2}. \quad (2.2.39)$$

### 2.2.2.7 Gráficos *FRF* de um Sistema Amortecido de Múltiplos Graus de Liberdade

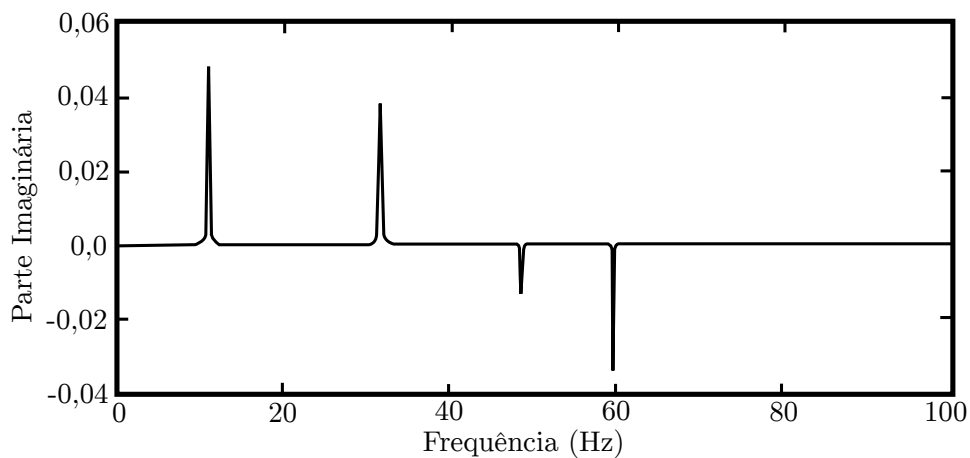
A *FRF* de um sistema com múltiplos graus de liberdade pode ser expressa graficamente de diferentes formas. A *FRF* de um sistema de múltiplos graus de liberdade não-amortecido é desprovida de gráficos úteis tais como o Diagrama de Nyquist por causa de sua parte imaginária nula. A *FRF* para um sistema amortecido de múltiplos graus de liberdade, não apresenta esta deficiência e pode dispor de uma grande variedade destes métodos gráficos, tais como: Gráficos das Parte Real e Imaginária, Gráficos Amplitude-Fase e o Diagrama de Nyquist.

Os gráficos real e imaginário, representam separadamente a parte real da *FRF* versus a frequência e sua parte imaginária em função da frequência, como pode ser visto na Figura 2.6.

Figura 2.6: Gráfico da parte real e imaginária da receptância.



(a) Parte real da *FRF* da receptância.



(b) Parte imaginária da *FRF* da receptância.

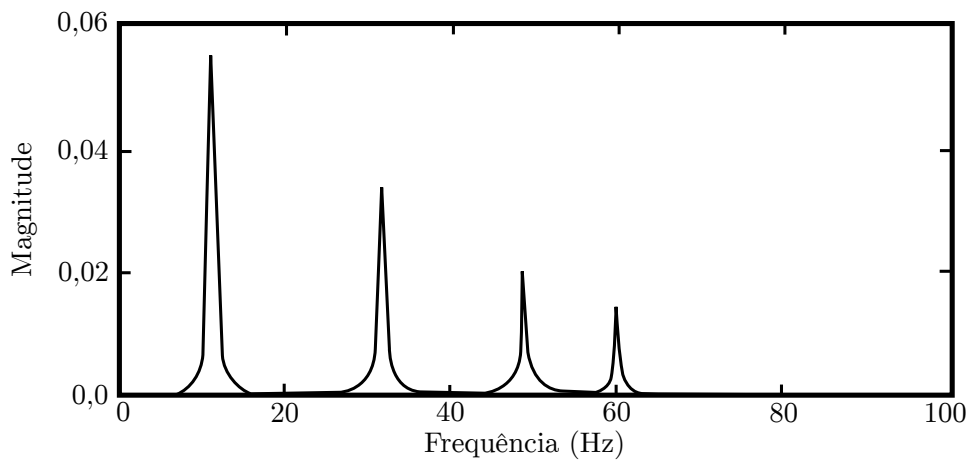
Fonte: produção do próprio autor.

O Gráfico de Amplitude-Fase, também conhecido como Diagrama de Bode, de uma  $FRF$  para um sistema amortecido de múltiplos graus de liberdade, consiste de um gráfico de sua magnitude (cálculo da resultante das partes real e imaginária da  $FRF$ ) em função da frequência e de sua fase versus a frequência. Sendo a fase da receptância calculado como:

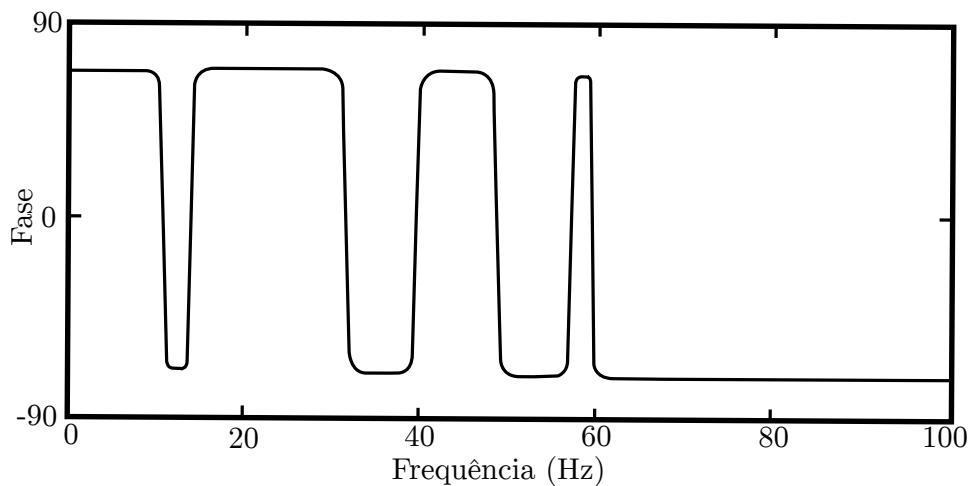
$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{Imag}{Real} \right). \quad (2.2.40)$$

A figura 2.7 mostra a magnitude e fase da receptância de um sistema qualquer de quatro graus de liberdade em escala linear.

Figura 2.7: Gráfico da magnitude-fase da receptância.



(a) Magnitude da  $FRF$  da receptância.



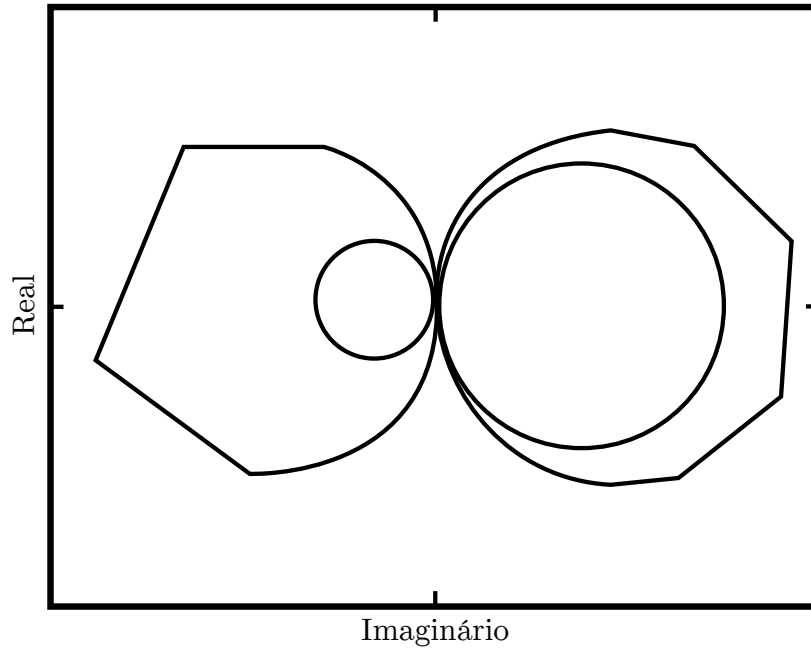
(b) Fase da  $FRF$  da receptância.

Fonte: produção do próprio autor.

Outra forma comumente utilizada na representação das  $FRF$ , é conhecida como Diagrama de Nyquist, que consiste basicamente na projeção da receptância, por exemplo,

no plano complexo, ou seja, no plano Real/Imaginário. Na Figura 2.8 pode ser visto um Diagrama de Nyquist para uma *FRF* da receptância de um sistema amortecido qualquer com quatro graus de liberdade.

Figura 2.8: Diagrama de Nyquist da receptância.



Fonte: produção do próprio autor.

### 2.2.3 Teorema da Reciprocidade: Teorema de Maxwell-Betti

*“O trabalho realizado por um esforço, durante o deslocamento do seu ponto de aplicação, devido à ação de outro esforço qualquer é igual ao trabalho realizado pelo segundo esforço, durante o deslocamento de seu ponto de aplicação, devido à ação do primeiro esforço.”* (YANG, 1986).

De acordo com Ghali et al. (2003), considerando uma estrutura de qualquer tipo que exibe comportamento elástico linear e que seja submetida a dois estados de carregamento, no primeiro estado, uma força  $P_1$  é aplicada em qualquer ponto  $A$  da estrutura (Figura 2.9(a)), sendo,

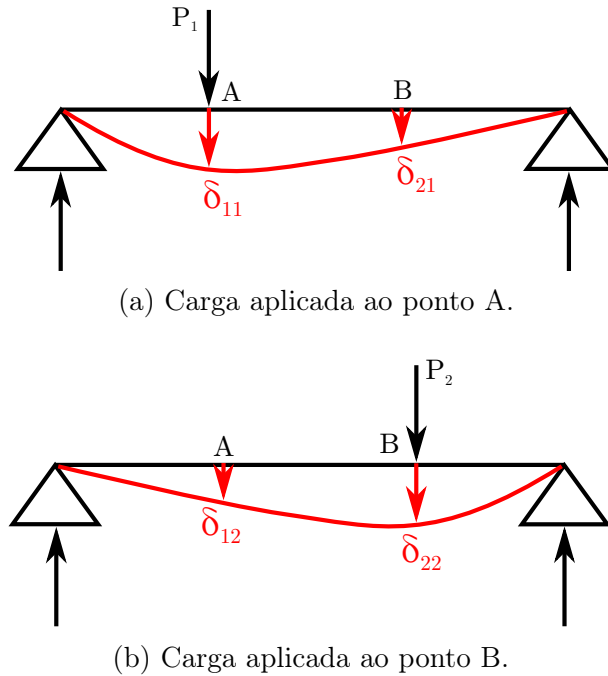
$$U = \frac{1}{2} P_1 \delta_{11}, \quad (2.2.41)$$

e no segundo estado, uma carga  $P_2$  atua em qualquer outro ponto  $B$  (Figura 2.9(b)) da estrutura, onde,

$$U = \frac{1}{2} P_2 \delta_{22}. \quad (2.2.42)$$

A Figura 2.9 ilustra a aplicação das cargas.

Figura 2.9: Aplicação das cargas no teorema de Maxwell-Betti.

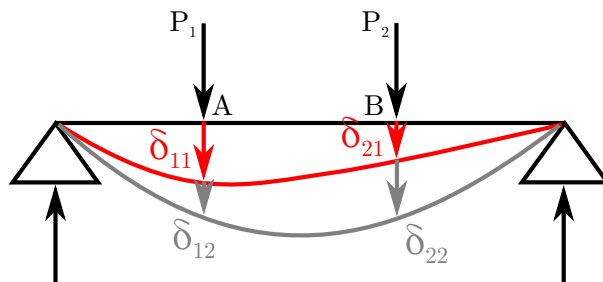


Fonte: produção do próprio autor.

Os deslocamentos nos pontos A e B, para o primeiro estado de carregamento são representados respectivamente por  $\delta_{11}$  e  $\delta_{21}$ , e para o segundo estado por  $\delta_{12}$  e  $\delta_{22}$ . Aplicando inicialmente  $P_1$  no ponto A e posteriormente  $P_2$  no ponto B como ilustra a Figura 2.10, tem-se:

$$U = \frac{1}{2}(P_1\delta_{11} + P_2\delta_{22}) + P_1\delta_{12}. \quad (2.2.43)$$

Figura 2.10: Aplicação das cargas no teorema de Maxwell-Betti A-B.

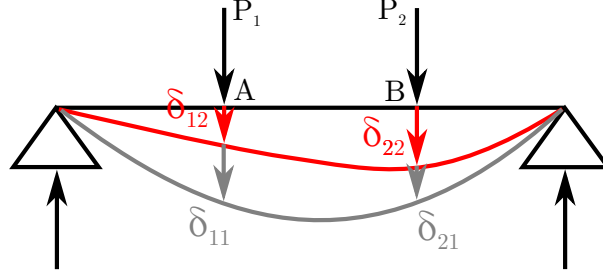


Fonte: produção do próprio autor.

De maneira análoga, aplicando inicialmente a carga  $P_2$  ao ponto B e posteriormente  $P_1$  no ponto A (Figura 2.11), tem-se:

$$U = \frac{1}{2}(P_1\delta_{11} + P_2\delta_{22}) + P_2\delta_{21}. \quad (2.2.44)$$

Figura 2.11: Aplicação das cargas no teorema de Maxwell-Betti B-A.



Fonte: produção do próprio autor.

Igualando os dois trabalhos realizados nas duas situações de carregamento, obtêm-se:

$$\frac{1}{2}(P_1\delta_{11} + P_2\delta_{22}) + P_1\delta_{12} = \frac{1}{2}(P_1\delta_{11} + P_2\delta_{22}) + P_2\delta_{21}, \quad (2.2.45)$$

ou seja,

$$P_1\delta_{12} = P_2\delta_{21}. \quad (2.2.46)$$

Considerando que a carga  $P_1$  aplicada ao ponto  $A$  e a carga  $P_2$  aplicada ao ponto  $B$  são de mesma magnitude, ou seja,  $P_1 = P_2$  tem-se:

$$\delta_{12} = \delta_{21}. \quad (2.2.47)$$

O deslocamento no ponto  $B$  provocado por uma carga unitária  $P_1 = 1$  aplicada ao ponto  $A$  é numericamente igual ao deslocamento no ponto  $A$  provocado por uma carga unitária  $P_2 = 1$  aplicado ao ponto  $B$ .

Em análise dinâmica, o Teorema da Reciprocidade de Maxwell-Betti possibilita uma simplificação no número de impactações da estrutura, ou seja, faz com que não seja necessário impactar e medir em todos os pontos, mas somente em uma parcela respeitando a reciprocidade.

## 2.2.4 Matriz de Amortecimento Proporcional ou de Rayleigh.

Todo mecanismo de dissipação de energia introduz amortecimento na vibração de uma estrutura. O amortecimento em estruturas acontece devido a mecanismos dissipadores, tais como histerese do material, fricção em juntas e microfissuras no material. Apesar desse amortecimento não ser do tipo viscoso (amortecimento devido ao movimento de um

corpo sólido mergulhado em um fluido) ele é matematicamente tratado como tal, ou seja, representado pelo produto de uma constante de viscosidade do fluido  $c$  pela velocidade do corpo. Com isso, e considerando um sistema com múltiplos graus de liberdade a equação do movimento livre amortecida é dada por:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = 0. \quad (2.2.48)$$

Em geral, a matriz de amortecimento viscoso  $[C]$  não pode ser construída das matrizes de amortecimento dos elementos, tal como é feito para as matrizes de massa e rigidez através da formulação clássica do Método de Elementos Finitos. Uma alternativa usual é a utilização do Amortecimento Proporcional (ou de Rayleigh) (RAYLEIGH, 1896). Rayleigh indicou em seu trabalho "*A Teoria do Som*", publicado inicialmente em 1845, que a matriz de amortecimento viscoso  $[C]$  pode ser obtida como uma combinação linear proporcional as matrizes de massa  $[M]$  e rigidez  $[K]$  (ou se as forças de amortecimento forem proporcionais as energias cinética e potencial do sistema), e então pode-se escrever:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K], \quad (2.2.49)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes de proporcionalidade reais e positivas. Com isso, as propriedades de ortogonalidade das matrizes de massa e rigidez (Seção 2.2.2.3) se aplicam também à matriz de amortecimento. Desta forma, a Equação 2.2.48 pode então ser desacoplada assim como a equação matricial de um sistema não-amortecido. A substituição da Equação 2.2.49 na Equação 2.2.48 leva a:

$$[M] \{\ddot{x}\} + (\alpha[M] + \beta[K]) \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = 0. \quad (2.2.50)$$

Sabendo que para um sistema massa-mola, com massa  $m$  e mola de rigidez  $k$  oscilando livremente em um fluido de viscosidade  $c$ , o amortecimento crítico é dado por:

$$c = 2m\omega_n\xi \quad (2.2.51)$$

Se o coeficiente  $c$  for definido pela expressão de Rayleigh, tem-se:

$$\alpha m + \beta k = 2m\omega_n\xi, \quad (2.2.52)$$

dividindo a equação por  $m$ ,

$$\alpha + \beta \frac{k}{m} = 2\omega_n\xi, \quad (2.2.53)$$

considerando  $\frac{k}{m} = \omega_n^2$ , tem-se:

$$\alpha + \beta\omega_n^2 = 2\omega_n\xi. \quad (2.2.54)$$

Para se obter  $\alpha$  e  $\beta$  é necessário conhecer duas frequências naturais da estrutura  $\omega_{ni}$  e  $\omega_{nj}$  e duas razões de amortecimento  $\xi_i$  e  $\xi_j$ , para que seja possível compor o sistema de equações a seguir:

$$\begin{cases} \alpha + \beta\omega_{ni}^2 = 2\omega_{ni}\xi_i \\ \alpha + \beta\omega_{nj}^2 = 2\omega_{nj}\xi_j \end{cases} \quad (2.2.55)$$

A solução do sistema linear definido em 2.2.55 fornece os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$ , que em seguida são utilizadas para compor a equação do amortecimento proporcional.

## 2.2.5 Métodos de Extração de Parâmetros Modais

Os Métodos de Extração de Parâmetros Modais são técnicas utilizadas para determinar as frequências naturais ( $fn$ ) e o amortecimento ( $\xi$ ) de estruturas a partir de suas Funções Resposta em Frequência, podendo ser utilizados para obter as curvas ( $FRF$ ) sintetizadas desta estrutura a partir do ajuste de curvas, entre outras aplicações. Segundo Masotti (2013), um dos métodos mais utilizados e conhecidos para determinação dos parâmetros modais no domínio da frequência é o Método da Banda de Meia-Potência ou Seleção de Pico (Peak-Picking -  $PP$ ). A seguir será apresentado o procedimento do método, a formulação para o ajuste das  $FRF$  juntamente com as suas principais características, vantagens e desvantagens.

### 2.2.5.1 Método da Banda de Meia-Potência ou Seleção de Pico (Peak-Picking - $PP$ )

O método é baseado na observação da resposta do sistema ( $FRF$ ), buscando um ponto de máxima amplitude (pico) próximo a frequência natural. A frequência onde o valor extremo é observado é chamado de frequência de ressonância  $\omega_r$  e é uma boa aproximação da frequência natural ( $fn$ ) não-amortecida. O amortecimento pode ser estimado encontrando-se os pontos  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , em ambos os lados do pico da  $FRF$ , que correspondem à metade da amplitude (3dB abaixo) da frequência de ressonância. Os pontos  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , são chamados de pontos de meia potência dando origem ao nome do método. A razão de amortecimento crítico é calculada pela relação:

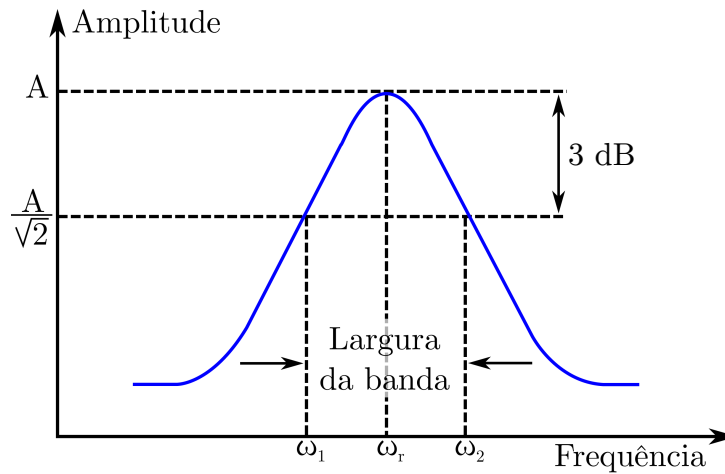
$$\xi_r = \frac{\Delta\omega}{\omega_r} = \frac{\omega_{2,r} - \omega_{1,r}}{\omega_r} \quad (2.2.56)$$

onde,  $\xi_r$ ,  $\omega_r$ ,  $\omega_{1,r}$  e  $\omega_{2,r}$  são respectivamente a razão de amortecimento crítico, a frequência natural, e os dois pontos de meia potência do modo  $r$ . Com isso, deste método são obtidas as Frequências Naturais ( $fn$ ) e a Razão de Amortecimento Crítico ( $\xi$ ) para cada um dos  $r$  modos de vibração da estrutura.

Os valores das frequências  $\omega_r$ ,  $\omega_1$  e  $\omega_2$  podem ser obtidos da leitura do gráfico da

magnitude, de acordo com a Figura 2.12.

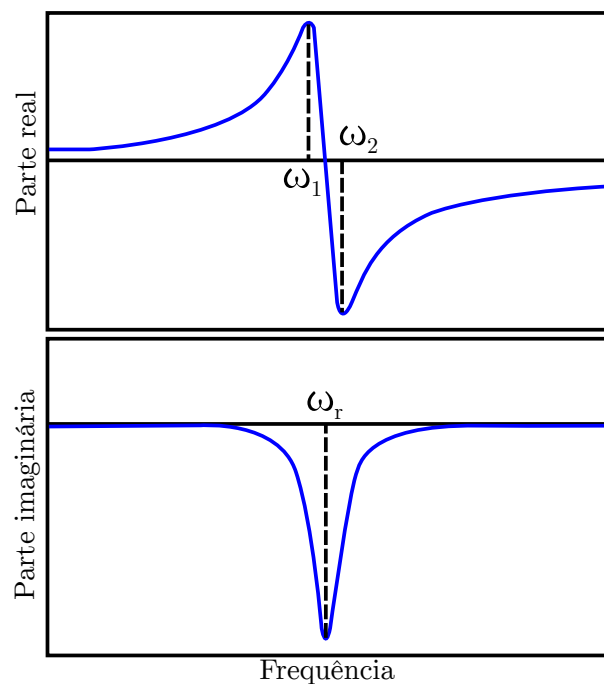
Figura 2.12: Determinação das frequências  $\omega_r$ ,  $\omega_1$  e  $\omega_2$  - magnitude.



Fonte: produção do próprio autor.

Ou ainda, da leitura nos gráficos das parcelas real e imaginária da *FRF*, como mostra a Figura 2.13.

Figura 2.13: Determinação das frequências  $\omega_r$ ,  $\omega_1$  e  $\omega_2$  - real e imaginário.



Fonte: produção do próprio autor.

O método está limitado à ausência de interferência modal, caso em que ocorre uma superposição (parcial ou total) dos picos de resposta de dois ou mais modos. Desta forma,

ele tem sua aplicação indicada para casos de baixa densidade modal, ou seja, em casos que as frequências naturais da estrutura estejam bem espaçadas.

Para verificação dos resultados obtidos, segundo Ewins (1984) e Fu e He (2001), as curvas podem ser sintetizadas (reconstruídas) a partir dos parâmetros modais determinados pelo método, utilizando a Equação 2.2.37. O termo residual  $R_{ij}(\omega)$  é obtido por (DUARTE; EWINS, 1996):

$$R_{ij}(\omega) = [H_{ij}^{exp}(\omega)] - [H_{ij}^{sint}(\omega)], \quad (2.2.57)$$

sendo  $[H_{ij}^{exp}(\omega)]$  as *FRF* obtidas experimentalmente e  $[H_{ij}^{sint}(\omega)]$  as *FRF* sintetizadas.

As principais características do método são:

- Bom para dados com baixo e alto amortecimento;
- Fácil implementação computacional;
- Bom para modos bem espaçados.

## 2.2.6 Análise Modal Experimental

No estudo da resposta dinâmica de estruturas complexas, muitas vezes devido à algumas condições de carregamentos específicos ou dificuldade de se conhecer as propriedades do material e condições de contorno, existe uma dificuldade de se obter um modelo teórico confiável que permite reproduzir corretamente o seu comportamento dinâmico, principalmente quando se tenta caracterizar amortecimento (VALE, 1996). A análise modal experimental busca estudar o real comportamento dinâmico do sistema, como base em experimentos (MAIA; SILVA, 2001).

Na análise modal experimental, onde se aplica basicamente o Modelo de Resposta (Seção 2.2.2.4), as características dinâmicas desse modelo são obtidas a partir das Funções Resposta em Frequência, que definem uma relação entre os sinais de entrada e saída do sistema. Essa relação entrada/saída pode ser obtida a partir da medida da excitação e das respostas em um conjunto de pontos previamente selecionados.

A relação entrada/saída do modelo pode ser definida utilizando a equação 2.1.3 no domínio de Laplace (variável  $s$ ), como (KREYSZIG, 2010); (OGATA et al., 2003); (RAO, 2009):

$$(s^2 [M] + s [C] + [K]) \{X(s)\} = \{F(s)\}, \quad (2.2.58)$$

e no domínio da frequência ( $\omega$ ), como:

$$([K] + i\omega[C] - \omega^2[M]) \{X(\omega)\} = \{F(\omega)\}. \quad (2.2.59)$$

Considerando a equação da matriz de rigidez dinâmica (2.2.33), tem-se:

$$[B(\omega)] \{X(\omega)\} = \{F(\omega)\}, \quad (2.2.60)$$

ou ainda,

$$[H(\omega)] = \frac{\{X(\omega)\}}{\{F(\omega)\}}. \quad (2.2.61)$$

Para um sistema com  $n$  graus de liberdade, cada termo da matriz define uma função resposta em frequência  $[H_{ij}(\omega)]$ , ( $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, n$ ) dada pela entrada medida no ponto  $i$  e a resposta medida no ponto  $j$ . Como visto na seção 2.2.2.4, de acordo com a grandesa física medida na resposta  $\{X(s)\}$ , deslocamento, velocidade ou aceleração, os resultados obtidos nas funções transferência serão respectivamente, receptância, mobilidade ou acelerância (Equações 2.2.15 à 2.2.17).

Em se tratando de dados experimentais, a aquisição de dados apresenta algumas peculiaridades técnicas. Dentre elas, é possível destacar dois fenômenos bastante conhecidos chamados: Sub-Amostragem ou *Aliasing*, e Vazamento ou *Leakage*.

- *Aliasing*: Ocorre na conversão do sinal analógico (contínuo) para o sinal digital (discreto). Caso a frequência de amostragem não seja suficientemente alta para representar o fenômeno, ocorre a sobreposição do espectro, acarretando em uma espécie de batimento entre as duas frequências (de aquisição e a contida no sinal) e a não correta representação do fenômeno envolvido. De acordo com o Teorema de Nyquist, a quantidade de amostras por unidade de tempo de um sinal, deve ser maior que o dobro da maior frequência contida no sinal a ser amostrado, evitando assim o surgimento do *Aliasing*.
- *Leakage*: A energia real do sinal se espalha pelo espectro de frequência, ou seja, ocorre uma espécie de vazamento desta energia, de uma frequência particular para as adjacentes, frequências vizinhas. Os efeitos de *Leakage* não podem ser totalmente eliminados, porém, a correta aplicação das técnicas de janelamento reduzem consideravelmente a ocorrência do fenômeno.

## 2.2.7 Método dos Elementos Finitos (*Finite Element Method - FEM*)

A solução numérica de qualquer problema matemático é, por natureza, um resultado aproximado. Em dinâmica de estruturas a utilização de métodos numéricos, como os elementos finitos, no caso de sistemas contínuos requer uma discretização espacial, sendo o meio contínuo substituído por um meio discreto que procura representar o mais fielmente o sistema real. Estes elementos (sistemas discretos) são conectados entre si, as

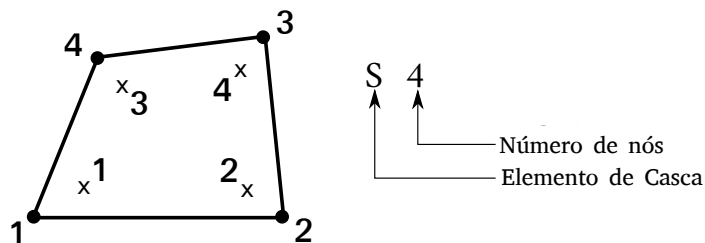
condições de contorno e de carregamento são aplicadas e as soluções do problema são então determinadas (LU, 2013).

Nas estruturas em que uma dimensão (a espessura) é significativamente menor do que as outras duas, considera-se que os elementos de placa são os mais adequados para a análise. Esta relação entre a menor aresta e a espessura, segundo Blevins e Plunkett (1980) deve ser 10:1, ou seja, a espessura deve ser 10 vezes menor que a menor aresta da placa. De acordo com (SIMULIA, 2012), a relação a ser obedecida é de 15:1. Entretanto, a maioria dos pacotes de análise *FEM* como o *ABAQUS 6.12*, disponibilizam para o usuário uma série de elementos de casca robustos para solução tanto de problemas de placa fina, que atendem as relações de espessura e aresta descritas acima, como os de placa espessa que não atendem esta relação.

Na biblioteca do *ABAQUS 6.12*, estes elementos são descritos como elementos de casca de âmbito geral. Dentre eles, é importante resaltar os elementos:

- ***S4*** - Elemento de casca com quatro nós, linear e seis graus de liberdade por nó (três componentes de deslocamento e três componentes de rotação), com integração numérica completa;

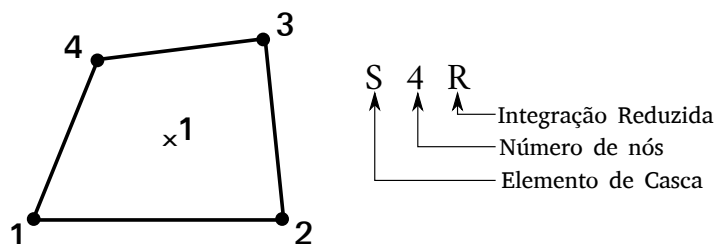
Figura 2.14: Elemento *S4*.



Fonte: adaptado de Simulia (2012).

- ***S4R*** - Elemento de casca com quatro nós, linear e seis graus de liberdade por nó (três componentes de deslocamento e três componentes de rotação), com integração numérica reduzida;

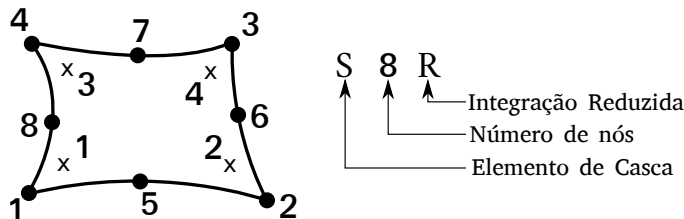
Figura 2.15: Elemento *S4R*.



Fonte: adaptado de Simulia (2012).

- **S8R** - Elemento de casca com oito nós, quadrático e seis graus de liberdade por nó (três componentes de deslocamento e três componentes de rotação), com integração numérica reduzida.

Figura 2.16: Elemento *S8R*.



Fonte: adaptado de Simulia (2012).

### 2.2.7.1 Integração Numérica Total e Reduzida

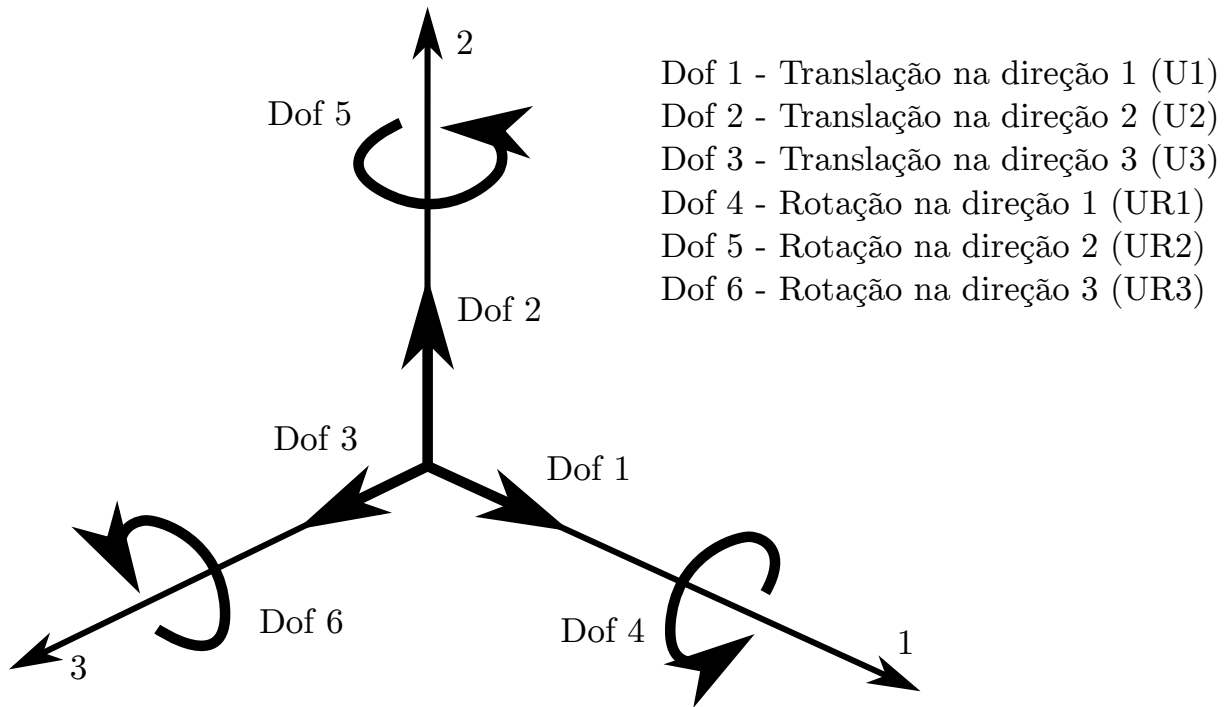
De acordo com Simulia (2012) a expressão "**Integração Total**" refere-se ao número de pontos de Gauss necessários para que a integração numérica dos termos polinomiais na matriz de rigidez de um elemento seja exata, em outras palavras, o número de pontos de integração é suficiente para integrar exatamente a expressão da simulação a ser realizada, pelo menos para o comportamento linear do material. Como exemplo, o elemento casca linear *S4*, que usa dois pontos de integração em cada direção, como pode ser visto na Figura 2.14.

Já os elementos ditos de "**Integração Reduzida**" utilizam um ponto de integração menor em cada direção quando comparados com os elementos totalmente integrados, ou seja, o número de pontos de Gauss é uma ordem inferior ao que integraria exatamente. Como exemplo, pode ser tomado o elemento linear de casca *S4R*, que tem apenas um único ponto de integração localizado no centróide do elemento (Figura 2.15). Segundo Simulia (2012), somente elementos quadrilaterais e hexaédricos podem usar um esquema de integração reduzida. Soluções que utilizam elementos com integração reduzida tendem a utilizarem menos recursos computacionais, entretanto, uma análise de seu impacto no resultado na grandeza de interesse deve ser avaliada, pois, erros numéricos tendem a ser induzidos.

### 2.2.7.2 Elemento de Casca - *S4R*

Este tipo de elemento é quadrilateral, linear, possui 4 nós (Figura 2.15) e utiliza integração reduzida na sua formulação. Os graus de liberdade considerados são seis: três componentes de deslocamento e três componentes de rotação por nó (SIMULIA, 2012). Esta relação de *DOF* pode ser vista na Figura 2.17.

Figura 2.17: Graus de liberdade de deslocamento e rotação -  $S4R$ .



Fonte: produção do próprio autor.

Esta configuração de graus de liberdade do Elemento  $S4R$  do *ABAQUS 6.12*, cuja sua formulação completa é apresentada em *Abaqus-6.12-Theory-Guide (2017)*, resulta em matrizes de massa e rigidez de ordem  $24 \times 24$  para cada elemento,

$$[M]^e = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,24} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,24} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{24,1} & m_{24,2} & \cdots & m_{24,24} \end{bmatrix}, \quad (2.2.62)$$

$$[K]^e = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \cdots & k_{1,24} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \cdots & k_{2,24} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{24,1} & k_{24,2} & \cdots & k_{24,24} \end{bmatrix}. \quad (2.2.63)$$

Uma vez calculadas as matrizes de massa  $[M]^e$  e rigidez  $[K]^e$  para cada elemento, calculam-se as matrizes de massa e rigidez globais,  $[M]$  e  $[K]$ , respectivamente, como

$$[M] = \bigoplus_{e=1}^{ne} [M]^e, \quad (2.2.64)$$

e

$$[K] = \bigoplus_{e=1}^{ne} [K]^e, \quad (2.2.65)$$

onde  $ne$  é o número de elementos total da malha e  $\bigoplus$  é um operador de sobreposição local-global, (SIMULIA, 2012), (BATHE, 2006), (ZIENKIEWICZ et al., 1977).

### 2.2.7.3 Análise Modal Numérica

Para esta análise, onde se pretende obter as frequências naturais ( $fn$ ) e as formas naturais de vibração do sistema, munido das matrizes de massa (Equação 2.2.64) e rigidez (Equação 2.2.65) da estrutura, torna-se possível solucionar o problema de autovalores e autovetores (Equação 2.2.8), determinando assim as frequências naturais pela Equação 2.2.9 e os modos de vibração obtidos da matriz de autovetores (Equação 2.2.10).

## 2.3 Métodos de Redução de Ordem de Modelos Numéricos

A utilização do *FEM* na resolução de problemas estáticos e/ou dinâmicos, pode implicar em um volume de cálculo considerável devido à discretização da estrutura em estudo, que origina matrizes de elevada ordem. Esta situação obriga a elevados recursos computacionais sempre que existe a necessidade de compatibilizar dados numéricos com os dados obtidos experimentalmente, ou a sua baixa eficiência computacional quando apenas se pretende conhecer as *FRFs* em alguns pontos da estrutura. A razão principal para utilização da redução de ordem de modelo, reside no fato destes permitirem otimizar os recursos computacionais reduzindo a ordem das matrizes envolvidas nos cálculos e assim sendo o tempo despendido nos mesmos, tentando que não sejam comprometidas as características dinâmicas do sistema em estudo (SANCHES et al., 2015).

A utilização destes métodos é importante em aplicações, tais como:

- Redução de custo computacional;
- Redução dos modelos obtidos pelo *FEM* com o objetivo de os tornar compatíveis com os graus de liberdade utilizados experimentalmente;
- Validação de modelos;
- Acoplamento de Estruturas;
- Ajuste de Modelo.

### 2.3.1 Aspectos Gerais

A ideia geral envolvida na redução de um modelo matemático é a de encontrar, através de uma mudança de base, um subespaço  $T \in \mathbb{R}^{G,F}$ , com  $F \ll G$ , de modo que as  $g$  variáveis  $x$  sejam escritas em função de um conjunto reduzido de  $f$  coordenadas  $z$ , conforme a equação a seguir (KOUTSOVASILIS, 2009):

$$\{x\}_{(g,1)} = [T]_{(g,f)} \{z\}_{(f,1)}. \quad (2.3.66)$$

A transformação é independente do tempo, de modo que (RADEŞ, 2009):

$$\{\dot{x}\}_{(g,1)} = [T]_{(g,f)} \{\dot{z}\}_{(f,1)}, \quad (2.3.67)$$

$$\{\ddot{x}\}_{(g,1)} = [T]_{(g,f)} \{\ddot{z}\}_{(f,1)}. \quad (2.3.68)$$

A partir desta consideração algébrica, e levando em conta a equação do movimento em conjunto com *FEM*, é constituída a base dos Métodos de Redução de Ordem de Modelo. A equação do movimento de sistemas amortecidos em vibração livre possuindo  $N$  graus de liberdade é descrita por uma equação diferencial de segunda ordem, definida por:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{0\}. \quad (2.3.69)$$

Substituindo as Equações 2.3.66 , 2.3.67 e 2.3.68 em 2.3.69 e pré-multiplicando por  $[T]^T$ , obtêm-se a equação do movimento reduzida:

$$[M^{Red}] \{\ddot{z}(t)\} + [C^{Red}] \{\dot{z}(t)\} + [K^{Red}] \{z(t)\} = \{0\}, \quad (2.3.70)$$

onde,

$$[M^{Red}] = [T]^T [M] [T], \quad (2.3.71)$$

$$[K^{Red}] = [T]^T [K] [T], \quad (2.3.72)$$

$$[C^{Red}] = [T]^T [C] [T]. \quad (2.3.73)$$

Desta forma, basta a determinação da matriz de transformação  $[T]$  para que o processo de redução das matrizes de massa, rigidez e amortecimento do modelo seja realizado. É importante salientar que esta redução aplicada a matriz de amortecimento, só é possível, devido a condição de proporcionalidade descrita na Seção 2.2.49 . São disponíveis inúmeros métodos para a determinação desta matriz de transformação  $[T]$ , dentre eles o *SEREP* (*System Equivalent Reduction Expansion Process*) que será apresentado a seguir.

### 2.3.2 *SEREP - System Equivalent Reduction-Expansion Process*

O método de redução de *SEREP* foi proposto por O'Callahan et al. (1989) como um método de redução que preserva as características dinâmicas do modelo original para os modos de interesse, sendo assim, extremamente indicado para análises dinâmicas. Os autores ressaltam algumas particularidades do *SEREP*, em relação aos demais métodos:

- Os modos selecionados são preservados no modelo reduzido;
- A qualidade do modelo reduzido não depende da escolha dos graus de liberdade *masters*, desde que, a escolha contemple os *DOFs* na direção de interesse;
- As frequências naturais e formas modais do modelo reduzido são exatamente iguais às frequências naturais e formas modais, para os modos selecionados, do modelo completo.

A metodologia consiste em construir a matriz de transformação  $[T]$  a partir dos autovetores previamente calculados com as matrizes de massa e rigidez do sistema global, sendo posteriormente, selecionados um conjunto destes para o processo de redução. Com isso, a característica dinâmica do sistema é mantida.

Em um primeiro momento deve-se realizar a seleção dos graus de liberdade que serão mantidos ativos no sistema, chamados de *masters* ( $m$ ). De acordo com O'Callahan et al. (1989) o número de graus de liberdade *masters* deve ser no mínimo igual o ao número de modos de interesse mais um. Os graus de liberdade remanentes são chamados de *slaves* ( $s$ ). Por se tratar de um modelo modal, a equação do movimento a ser considerada será a do sistema livre não amortecido. Depois desta seleção as matrizes de massa e rigidez devem ser reorganizadas, caso contrário o modelo produz erros na aproximação ao sistema global. Neste sentido, existe a necessidade de reorganizar as matrizes de forma adequada, decompondo-as em sub-matrizes de acordo com a Equação 2.3.74 .

$$\begin{bmatrix} [M_{mm}]_{(m,m)} & [M_{ms}]_{(m,s)} \\ [M_{sm}]_{(s,m)} & [M_{ss}]_{(s,s)} \end{bmatrix}_{(N,N)} \begin{Bmatrix} \{\ddot{x}_m\}_{(m,1)} \\ \{\ddot{x}_s\}_{(s,1)} \end{Bmatrix}_{(N,1)} + \begin{bmatrix} [K_{mm}]_{(m,m)} & [K_{ms}]_{(m,s)} \\ [K_{sm}]_{(s,m)} & [K_{ss}]_{(s,s)} \end{bmatrix}_{(N,N)} \begin{Bmatrix} \{x_m\}_{(m,1)} \\ \{x_s\}_{(s,1)} \end{Bmatrix}_{(N,1)} = \{0\}. \quad (2.3.74)$$

$x_m$  e  $x_s$  - representam os vetores de deslocamento contendo os graus de liberdade *masters* e *slaves*.

$\ddot{x}_m$  e  $\ddot{x}_s$  - representam os vetores de aceleração contendo os graus de liberdade *masters* e *slaves*.

A ordem de cada uma das sub-matrizes é dada pelos respectivos índices ( $(m, m)$ ,  $(m, s)$ ,  $(s, m)$ ,  $(s, s)$ ), sendo,  $m$  o número de graus de liberdade definidos como *masters*

e  $s$  o número de graus de liberdade definidos como *slaves*. Mesmo com a reorganização das matrizes as suas ordens continuam sendo  $(N, N)$ , sendo  $N$ , o número total de *DOF* do sistema discretizado por *FEM*.

A base do algoritmo para o desenvolvimento da matriz de transformação do método, é a Equação 2.3.74, sendo a solução de  $a$  autovalores e autovetores podendo ser descrita como:

$$\{x\}_{(N,1)} = [\Phi]_{(N,a)} \{q\}_{(a,1)}, \quad (2.3.75)$$

onde  $[\Phi]$  é a matriz modal de ordem  $N \times a$ , sendo que  $N$ , representa o número de graus de liberdade total do sistema,  $a$  representa o número de modos escolhidos e  $\{q\}$  representa o vetor dos deslocamentos associados aos graus de liberdade modais do sistema.

A equação 2.3.75 pode ser reescrita subdividindo o vetor de graus de liberdade globais  $\{x\}$  e a matriz modal global  $[\Phi]$  em duas partes distintas sendo, a primeira referente aos graus de liberdade *masters* a preservar no sistema e as restantes *slaves* a excluir do sistema, resultando em:

$$\begin{Bmatrix} \{x_m\}_{(m,1)} \\ \{x_s\}_{(s,1)} \end{Bmatrix}_{(N,1)} = \begin{bmatrix} [\Phi_m]_{(m,a)} \\ [\Phi_s]_{(s,a)} \end{bmatrix}_{(N,a)} \{q\}_{(a,1)}. \quad (2.3.76)$$

Considerando somente os graus de liberdade *masters*, da Equação 2.3.76 resulta:

$$\{x_m\}_{(m,1)} = [\Phi_m]_{(m,a)} \{q\}_{(a,1)}, \quad (2.3.77)$$

sendo,  $[\Phi_m]$  a matriz modal contendo apenas os graus de liberdade *masters* de ordem  $m \times a$  não quadrada uma vez que, o número de graus de liberdade ativos  $m$  será no mínimo igual ao número de modos mantidos ativos  $a$  mais um. Portanto, a resolução da Equação 2.3.77 em ordem ao vetor de graus de liberdade  $\{q\}$  requer a formulação da matriz inversa generalizada (Pseudo-inversa) de  $[\Phi_m]$ , que é descrita por:

$$[\Phi_m]^\dagger = ([\Phi_m]^T [\Phi_m])^{-1} [\Phi_m]^T. \quad (2.3.78)$$

Onde  $[\Phi_m]^\dagger$  representa a inversa generalizada de  $[\Phi_m]$ . Com isso, é possível a obtenção do vetor dos deslocamentos modais com a solução da Equação 2.3.77 como,

$$\{q\}_{(a,1)} = [\Phi_m]_{(a,m)}^\dagger \{x_m\}_{(m,1)}. \quad (2.3.79)$$

Substituindo a Equação 2.3.79 em 2.3.76 obtêm-se a seguinte expressão do vetor de deslocamentos global, em função do vetor de deslocamentos reduzidos.

$$\{x\}_{(N,1)} = \begin{bmatrix} [\Phi_m]_{(m,a)} \\ [\Phi_s]_{(s,a)} \end{bmatrix}_{(N,a)} [\Phi_m]_{(a,m)}^\dagger \{x_m\}_{(m,1)}. \quad (2.3.80)$$

Portanto, é possível definir a matriz de transformação do método como,

$$[T]_{(N,m)} = \begin{bmatrix} [\Phi_m]_{(m,a)} \\ [\Phi_s]_{(s,a)} \end{bmatrix}_{(N,a)} [\Phi_m]_{(a,m)}^\dagger, \quad (2.3.81)$$

ou ainda:

$$[T] = \begin{bmatrix} [\Phi_m][\Phi_m]^\dagger \\ [\Phi_s][\Phi_m]^\dagger \end{bmatrix}. \quad (2.3.82)$$

Sabendo que  $[\Phi_m][\Phi_m]^\dagger$  é igual a matriz identidade  $[I]$  de mesma dimensão  $m \times m$ , temos:

$$[T] = \begin{bmatrix} [I] \\ [\Phi_s][\Phi_m]^\dagger \end{bmatrix}. \quad (2.3.83)$$

Onde  $[T]$  representa a matriz de transformação para o método *SEREP*. Sendo as matrizes de massa, rigidez e amortecimento do sistema reduzido, calculadas pelas Equações 2.3.71 , 2.3.72 e 2.3.73 respectivamente, obedecendo a reordenação das matrizes originais exemplificada em 2.3.74 .

## 2.4 Modelamento de Modificações Estruturais

Durante a concepção de quaisquer estruturas mecânicas, uma série de critérios de projeto devem ser seguidos e cumpridos. Contudo, qualquer modificação aplicada a uma estrutura tem o efeito de alterar as propriedades estruturais, tais como, frequências e modos naturais de vibração, e as distribuições de tensão e deformação. Estas modificações devem ser previstas para evitar uma série de problemas.

Para prever com precisão o comportamento dinâmico, um modelo de elementos finitos (*FEM*) da estrutura pode ser construído. No entanto, pode se tornar difícil e custoso construir um novo modelo a cada modificação. D'Ambrogio e Sestieri (2001) e Hang et al. (2007), propuseram a utilização de um modelamento da modificação estrutural que utiliza diretamente as informações da resposta dinâmica da estrutura original (através das *FRF*), e dados dinâmicos da estrutura modificadora para realizar esta predição.

Segundo Sestieri e D'ambrogio (1989), a resposta de um sistema pode ser expressa a partir da equação 2.2.61 , como:

$$\{X_0\} = [H_0] \{F\}, \quad (2.4.84)$$

onde  $[H_0]$  é o termo genérico utilizado para representar a matriz de *FRFs* (seção 2.2.2.4) da estrutura original, e sua inversa  $[B_0]$  é denominada matriz de rigidez dinâmica. Portanto, reorganizando a equação 2.4.84 , temos:

$$\{F\} = [B_0] \{X_0\}. \quad (2.4.85)$$

Após a aplicação da modificação na estrutura, a resposta  $\{X_1\}$  do sistema é representado por:

$$\{F\} = [B_0 + \Delta B] \{X_1\}, \quad (2.4.86)$$

onde  $[\Delta B]$  é a diferença das matrizes de rigidez dinâmica original ( $B_0$ ) e modificada ( $B_1$ ) introduzida pela modificação estrutural (HANG et al., 2007).

$$[\Delta B] = [B_1] - [B_0], \quad (2.4.87)$$

e sabendo que  $[B] = [H]^{-1}$ , então:

$$[\Delta B] = [H_1]^{-1} - [H_0]^{-1}, \quad (2.4.88)$$

$$[H_1]^{-1} = [H_0]^{-1} + [\Delta B]. \quad (2.4.89)$$

Multiplicando toda a equação 2.4.89 por  $[H_0]$ , temos:

$$[H_0] [H_1]^{-1} = [H_0] [H_0]^{-1} + [H_0] [\Delta B], \quad (2.4.90)$$

sabendo que  $[H_0] [H_0]^{-1}$  é igual a matriz identidade de mesma dimensão  $[I]$ , temos:

$$[H_0] [H_1]^{-1} = [I] + [H_0] [\Delta B]. \quad (2.4.91)$$

Multiplicando ambos os lados da equação 2.4.91 por  $[H_0]^{-1}$ , temos:

$$[H_0]^{-1} [H_0] [H_1]^{-1} = [H_0]^{-1} ([I] + [H_0] [\Delta B]), \quad (2.4.92)$$

sendo  $[H_0]^{-1} [H_0]$  igual a matriz identidade de mesma dimensão  $[I]$ , resulta:

$$[I] [H_1]^{-1} = [H_0]^{-1} ([I] + [H_0] [\Delta B]). \quad (2.4.93)$$

Como  $[I] [H_1]^{-1}$  é igual a  $[H_1]^{-1}$ , tem-se:

$$[H_1]^{-1} = [H_0]^{-1} ([I] + [H_0] [\Delta B]). \quad (2.4.94)$$

Por fim, invertendo todos os termos da equação 2.4.94, obtêm-se (D'AMBROGIO; SESTIERI, 2001):

$$[H_1] = ([I] + [H_0] [\Delta B])^{-1} [H_0]. \quad (2.4.95)$$

Considerando a equação da Matriz de Rigidez Dinâmica (Equação 2.2.33 ) apresentada na Seção 2.2.2.6, a diferença das matrizes de rigidez dinâmica  $[\Delta B]$  pode ser calculada também, como:

$$[\Delta B] = [\Delta K] + i\omega [\Delta C] - \omega^2 [\Delta M], \quad (2.4.96)$$

onde  $[\Delta K]$ ,  $[\Delta C]$  e  $[\Delta M]$  são respectivamente, as diferenças entre as matrizes de rigidez, amortecimento e massa das estruturas modificada e original obtidas pelo discretização da estrutura no Método dos Elementos Finitos, e  $\omega$  é a referida frequência em *rad/s*.

## 2.5 Critérios de Correlação

Como forma de validar os resultados obtidos em um teste dinâmico modal, tanto numérico quanto experimental, algumas funções e coeficientes podem ser utilizados. Dentre eles, o indicador Critério de Correlação Modal (*MAC - Modal Assurance Criterion*), que, de acordo com Pastor et al. (2012) é uma das ferramentas mais populares para a comparação da quantitativa de vetores modais. Já para medir a qualidade das Funções Resposta em Frequência o índice calculado é o Critério de Correlação de Resposta em Frequência (*FRAC - Frequency Response Assurance Criterion*). A seguir estes dois indicadores serão apresentados e equacionados.

### 2.5.1 Critério de Correlação Modal - *MAC*

O *MAC* é um critério que destina-se a comparar pares de vetores modais provenientes de diferentes vias aplicadas à mesma estrutura. Seu resultado é uma quantidade escalar estando sempre entre 0 e 1, pois, o índice é normalizado pela magnitude dos vetores. O critério é definido pela seguinte expressão:

$$MAC_{ABm} = \frac{\{\Phi_B\}_m^T \{\Phi_A\}_m \{\Phi_A\}_m^T \{\Phi_B\}_m}{\{\Phi_B\}_m^T \{\Phi_B\}_m \{\Phi_A\}_m^T \{\Phi_A\}_m}, \quad (2.5.97)$$

sendo  $A$  e  $B$  as representações das duas vias de obtenção dos dados modais, o índice  $m$  representa o  $m$ -ésimo modo de vibração,  $\Phi$  são os autovetores associados ao modo  $m$  e  $T$  representa a transposta do vetor.

Segundo Allemang (2003), um valor do *MAC* entre 0,9 a 1,0 indica uma boa proximidade dos modos. Por outro lado, se o valor for perto de zero, conclui-se que os modos de vibrações são diferentes. De acordo com Ewins (1984) isto pode ser devido a uma das seguintes razões:

- O sistema não é estacionário. Isso pode ocorrer se o sistema for não linear e dois conjuntos de dados forem adquiridos em diferentes situações ou níveis de excitação. Se o sistema for não linear o *MAC* não apresentará bons resultados;

- Há ruídos no vetor modal de referência. Este caso é semelhante com o que acontece quando o sinal da *FRF* é contaminado por ruído na entrada;
- A estimativa de parâmetros pode conter erros. As medições das *FRFs* podem estar certas, mas a estimativa de parâmetros modais pode não ser coerente com os dados;

Caso as três possibilidades anteriores não forem confirmadas, o *MAC* igual à zero pode indicar que há ortogonalidade entre os modos, caracterizando assim, dois modos distintos.

## 2.5.2 Critério de Correlação de Resposta em Frequência - *FRAC*

O *FRAC* é um critério de correlação que foi definido por Heylen e Avitabile (1998) que destina-se a correlacionar as *FRFs* da mesma estrutura obtidas através de duas vias distintas. De acordo com Allemang (2003) a expressão que define o cálculo do índice do critério é dado por:

$$FRAC_{AB}(i, j) = \frac{\left( \{H_{ij}(\omega)\}_A^H \{H_{ij}(\omega)\}_B \right)^2}{\left( \{H_{ij}(\omega)\}_A^H \{H_{ij}(\omega)\}_A \{H_{ij}(\omega)\}_B^H \{H_{ij}(\omega)\}_B \right)}, \quad (2.5.98)$$

onde o *FRAC* é definido para um par de *FRFs*,  $\{H_{ij}(\omega)\}$ , sendo *A* e *B* a simbologia das duas vias de obtenção das Funções de Resposta em Frequência, representando a resposta na coordenada *i* devido a força aplicada na coordenada *j* em todas as frequências  $\omega$  e *H* é a transposta complexa conjugada (Operador Hermitiano) do vetor da *FRF*.

A exemplo do *MAC*, o resultado do presente critério é um valor escalar de magnitude variando entre 0 e 1, devido a normalização pela magnitude dos vetores, onde, o valor 1 indica correlação perfeita e 0 ausência de correlação. Ainda, de acordo com Allemang (2003), um valor do *FRAC* entre 0,9 a 1,0 indica uma boa proximidade das *FRFs*.



# Capítulo 3

## Materiais e Métodos

Este capítulo descreve os principais materiais e equipamentos utilizados, bem como, cita algumas hipóteses e aproximações consideradas tanto, no modelo adotado, quanto no aparato experimental. Além disso, demonstra toda a metodologia adotada para a obtenção de cada um dos resultados, e por fim, a lógica praticada no algoritmo proposto.

### 3.1 Materiais e Equipamentos

O corpo-de-prova utilizado no estudo é uma placa de aço SAE 1045 de 200 mm de comprimento, 80 mm de largura e 6,2 mm de espessura, como pode ser visto na figura 3.1. As placas têm cinco furos de 9 mm para a fixação nos adaptadores superior e inferior, para representação do engaste. As propriedades mecânicas do material adotadas para a análise numérica são:

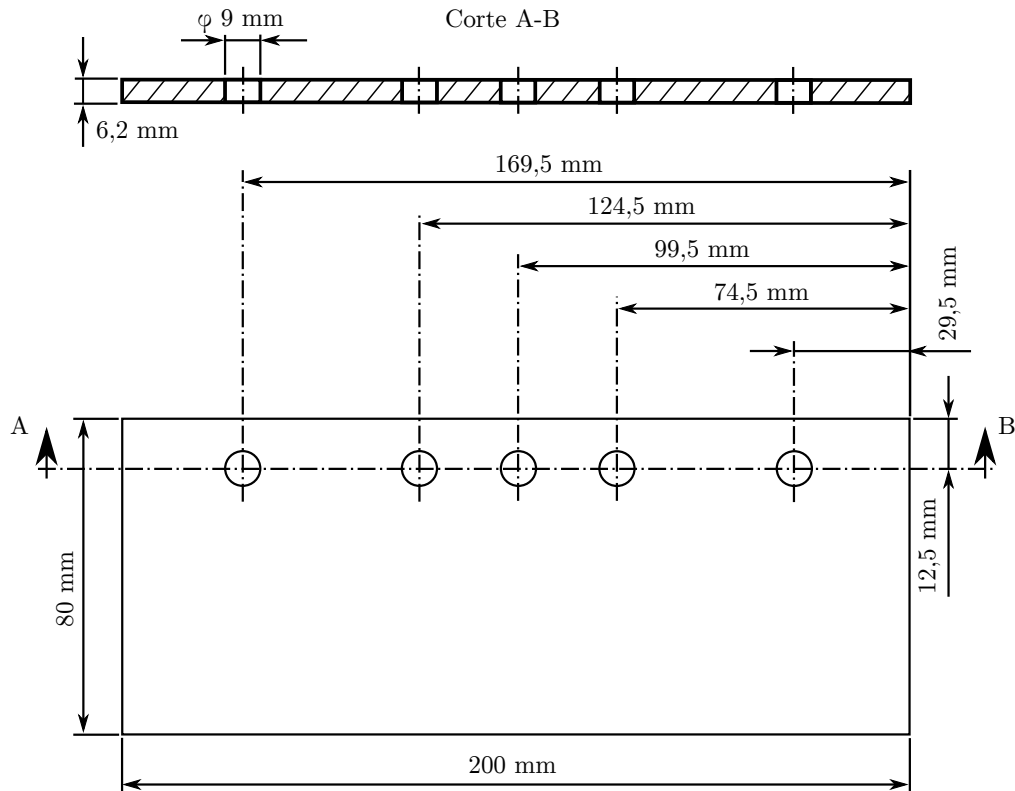
Tabela 3.1: Propriedades mecânicas do aço SAE 1045.

<b>Propriedades Mecânicas - SAE 1045</b>	
Módulo de Young ( $E$ )	207 $GPa$
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0,3
Densidade ( $\rho$ )	7850 $kg/m^3$

Fonte: adaptado de Budynas e Nisbett (2009).

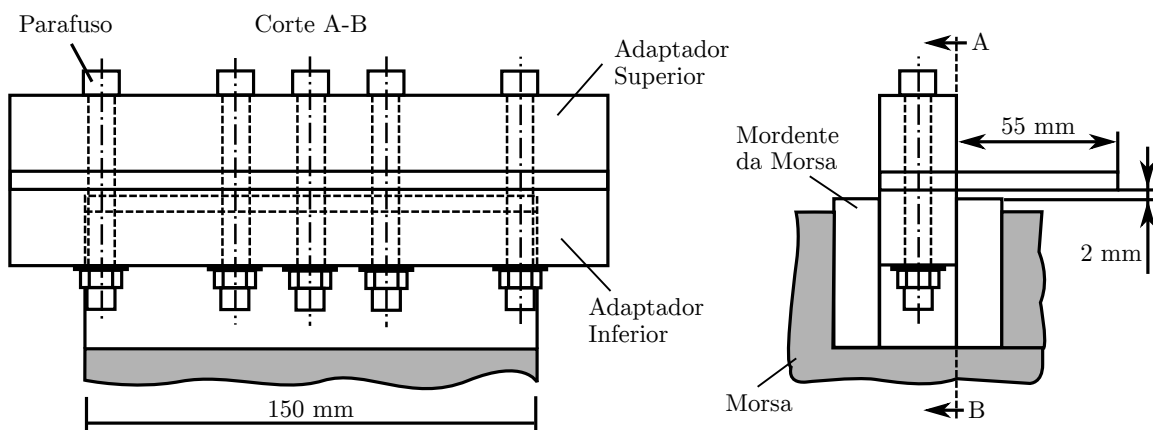
Para a fixação da placa na morsa sobre a mesa do centro de usinagem, são utilizados dois adaptadores de aço de secção quadrada com 25 mm de largura e 200 mm de comprimento, posicionados um em cada lado da placa. Para a fixação de todo este aparato, 5 parafusos *allen* de diâmetro 8 mm e comprimento de 70 mm com porca e arruela lisa, foram utilizados. Com estas dimensões e montagem, resulta-se em um placa com 55 mm de balanço, conforme pode ser observado na Figura 3.2.

Figura 3.1: Geometria de estudo.



Fonte: produção do próprio autor.

Figura 3.2: Fixação da placa na morsa.



Fonte: produção do próprio autor.

Com o objetivo de reduzir ao máximo as variações nos dados experimentais, o seguinte procedimento de montagem foi adotado:

- Um torque de  $3 \text{ kgf.m}$  foi aplicado e controlado em cada um dos parafusos de fixação da placa nos adaptadores, utilizando um torquímetro de estalo modelo 2550-13 da marca Robust;

- A fixação do adaptador inferior no mordente da morsa sobre a mesa do centro de usinagem, foi posicionado de modo que a superfície da placa estivesse orientada horizontalmente. A planicidade da superfície da placa em relação ao plano de usinagem formado pela ferramenta é verificada utilizando um relógio comparador mecânico do fabricante Pantec, modelo 12307-10-1, não permitindo que a tolerância de planicidade de 0,1mm fosse ultrapassada.

Nas análises experimentais, os ensaios foram realizados por meio de teste de impactação em pontos discretos da estrutura. As *FRF* obtidas em cada um destes pontos foram agrupadas resultando no comportamento dinâmico do sistema. Foram utilizados um martelo de impacto Brüel & Kjær modelo *8206-003* (sensibilidade  $1,050 \text{ mV/N}$ ) e um acelerômetro piezoelétrico da mesma marca modelo *4397* (sensibilidade  $0,9931 \text{ mV/m/s}^2$ ) para medição das respostas da estrutura. A fixação do acelerômetro foi realizado por adesivo acrílico. Martelo e acelerômetro foram conectados a um sistema de aquisição de sinal modelo *SXCI-1000* com placa para acelerômetro modelo *SXCI-1530* da marca *National Instruments* (Figura 3.3). Para a aquisição de dados foi utilizado o *software LabView*.

Figura 3.3: Aparato experimental.

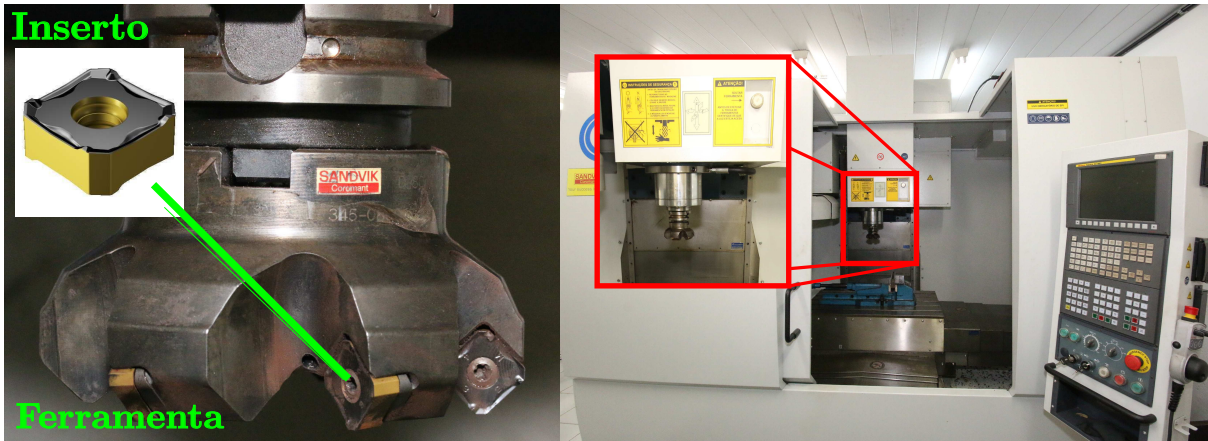


Fonte: produção do próprio autor.

A usinagem da placa para a aplicação das modificações estruturais utilizadas na validação do algoritmo proposto, foi realizada no centro de usinagem *Romi D600*, com capacidade de rotação de até  $10.000 \text{ RPM}$ . A ferramenta utilizada para este procedimento foi uma fresa frontal modelo *Sandwick CoroMill 490* com ângulo de posição da aresta de corte de  $45^\circ$ , diâmetro  $80\text{mm}$  e 6 insertos de corte de metal duro com recobrimento de nitreto de titânio, modelo *345R-1305M-PM 4230*, também do fabricante *SANDVIK*, específicos para o fresamento de aço (Figura 3.4). Para estes insertos, a faixa de avanço

por dente recomendada pelo fabricante é de 0,15 a 0,40 mm/dente e a faixa de velocidade de corte 190 a 250 m/min.

Figura 3.4: Centro de usinagem, ferramenta e insertos utilizados no experimento.



Fonte: produção do próprio autor.

Para os estudos numéricos foram utilizados os *softwares*, *ABAQUS 6.12* para os modelamentos e análises dinâmicas e o *Scilab* para os demais cálculos numéricos. Todos os materiais e equipamentos acima descritos, encontram-se disponíveis no Laboratório de Dinâmica da Usinagem do Centro de Ciências Tecnológica da UDESC.

## 3.2 Hipóteses e Considerações

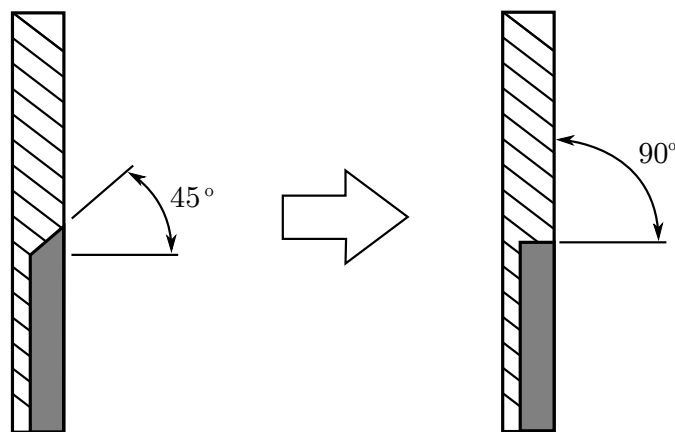
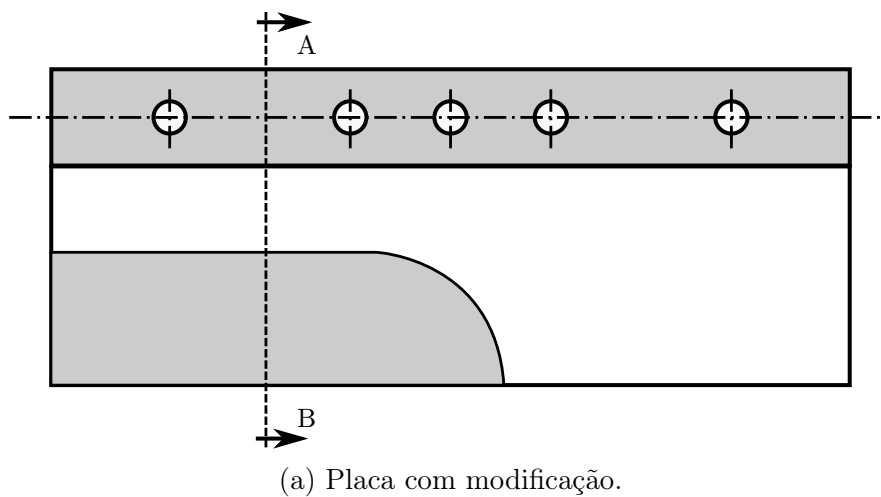
Para o desenvolvimento deste estudo, foram necessárias algumas considerações e hipóteses a respeito de diversos pontos, como os descritos a seguir:

- O aço SAE 1045, material utilizado na confecção do corpo de prova (placa), é isotrópico (propriedades iguais em qualquer direção), homogêneo (propriedades iguais em qualquer ponto), elástico (curvas de carregamento e descarregamento iguais, não apresentando deformações residuais) e linear (proporcionalidade entre tensão e deformação);
- O comprimento em balanço da placa (55 mm) inicia logo após o posicionamento dos adaptadores de fixação (Figura 3.2) ocorrendo de forma homogênea ao longo do comprimento total da placa (200 mm);
- Para o modelo virtual (modelos de Elementos Finitos), todo componente ou parte do conjunto que encontrasse além do engaste, localizado após os 55 mm de balanço da placa, como: adaptadores de fixação, parafusos (inclusive a homogeneidade das

forças aplicadas), porcas, aruelas, morsa, etc; podem ser simplificados por estruturas de menor complexidade;

- Na modelagem (Método dos Elementos Finitos e método proposto) das placas com modificação, o ângulo no final da espessura de penetração de 35 mm é considerado como sendo  $90^\circ$  em relação à superfície da peça (Figura 3.5(b)), uma aproximação, uma vez que o ângulo deixado pela ferramenta de corte após o procedimento de usinagem é de  $45^\circ$ , dado em função da geometria dos inserts utilizados no fresamento das placas.

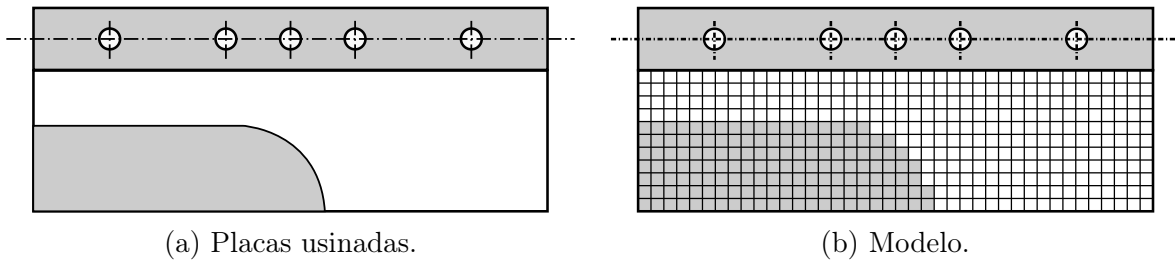
Figura 3.5: Aproximação do ângulo no final da espessura de penetração.



Fonte: produção do próprio autor.

- No modelo (*FEM* e Modelo Proposto) das placas usinadas parcialmente em relação ao seu comprimento total (200 mm), o raio resultante da remoção parcial do material (Figura 3.6(a)) foi aproximado pelos elementos quadrados da malha utilizada (Figura 3.6(b)).

Figura 3.6: Aproximação numérica do raio de usinagem.

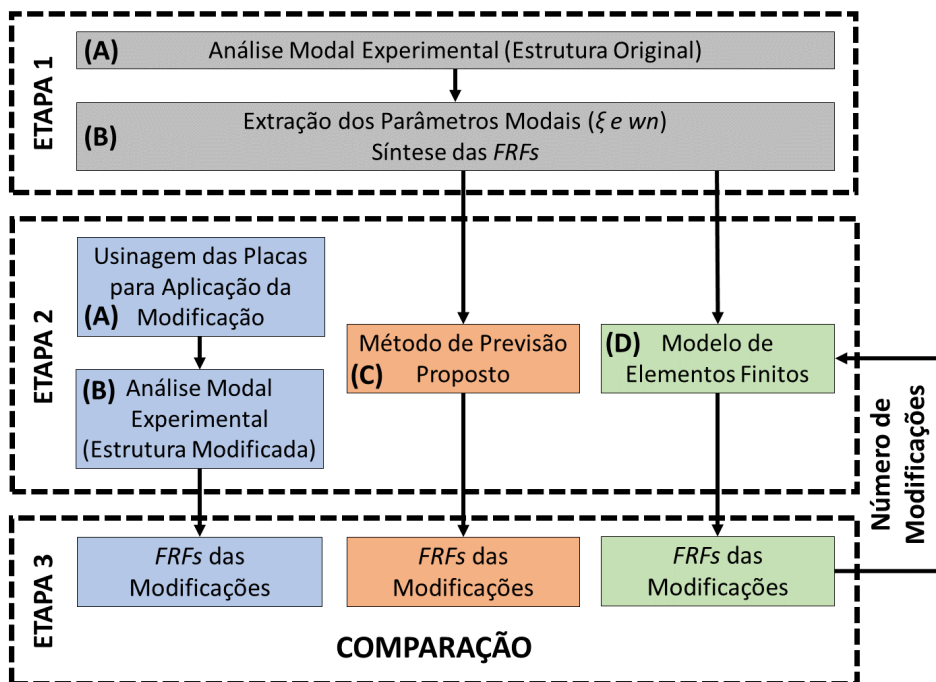


Fonte: produção do próprio autor.

### 3.3 Métodos

A metodologia desenvolvida neste trabalho, como pode ser observado resumidamente na Figura 3.7, consiste em três etapas principais. Inicialmente, na Etapa 1 a realização de uma análise modal experimental na estrutura original, ou seja, sem considerar a remoção de material por Usinagem, e a extração dos parâmetros modais da estrutura. Em seguida, a Etapa 2 é dedicada a aplicação das modificações e para a determinação das *FRF* da estrutura modificada, tanto pela via experimental, quanto pelo *FEM* e método proposto. Por fim, a etapa 3, onde é feita a comparação das Funções Resposta em Frequência, obtidas das três formas.

Figura 3.7: Fluxograma da metodologia adotada.



Fonte: produção do próprio autor.

A seguir será detalhada cada uma das etapas com suas devidas subseções. Para uma melhor didática, as ações descritas em cada etapa são identificadas e nomeadas, como o exemplo a seguir: *E2.C* - Etapa 2 subseções (*C*).

- *E1.A* - Realização de uma análise modal experimental a fim de conhecer o comportamento dinâmico da placa sem modificação. A estratégia adotado para a determinação dos pontos experimentais da análise modal é descrito na Seção 4.3. E ainda, a obtenção das *FRF* da estrutura original nos pontos de passagem dos dentes da ferramenta. É importante salientar que estes pontos de análise são diferentes dos utilizados na análise modal, e serão apresentados em seguida.
- *E1.B* - Extração dos parâmetros modais ( $fn, \xi$ ). Para esta etapa o método de extração de parâmetros utilizado é o Método da Seleção de Picos (*PP- Peak-Picking*), onde sua formulação foi apresentada e discutida na Seção 2.2.5.1.
- *E2.A* - Aplicação da modificação na estrutura, ou seja, momento em que se fez necessário o fresamento da placa. A Figura 3.8, demonstra os três estágios de modificação aplicados, os quais são vistos na Tabela 3.2 (profundidade de avanço -  $a_f$ ) juntamente com penetração de trabalho ( $a_e$ ) e a profundidade de corte ( $a_p$ ) que foram mantidas constantes. As modificações na estrutura foram aplicadas utilizando o centro de usinagem *Romi D600* e a fresa frontal modelo *Sandwick CoroMill 490*. Esta etapa precede a etapa *E2.B*, e foi repetida até que todas as modificação tivessem sido aplicadas.

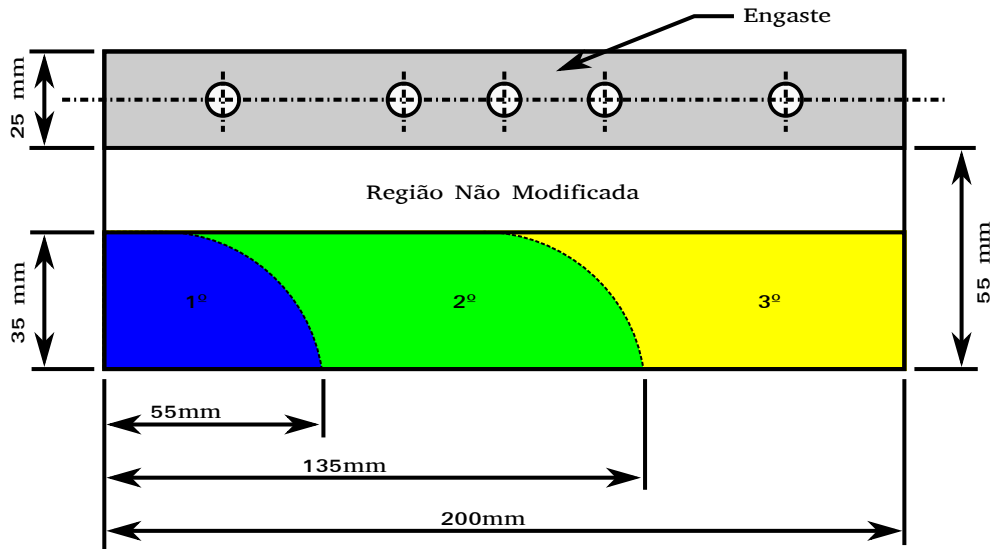
Tabela 3.2: Características da modificação.

Estágio	Profundidade de avanço ( $a_f$ )	Penetração de Trabalho ( $a_e$ )	Profundidade de Corte ( $a_p$ )
1	55,0 mm	35,0 mm	2,5 mm
2	135,0 mm		
3	200,0 mm		

Fonte: produção do próprio autor.

- *E2.B* - Etapa de medição das *FRF* em cada um dos estágios de modificação da placa nos pontos de passagem da ferramenta. Esta etapa foi repetida até que todas as modificação tivessem sido aplicadas.
- *E2.C* - Cálculo das *FRF* das modificações utilizando o método proposto (Figura 3.18. Esta etapa foi repetida até que todas as modificação tivessem sido aplicadas.
- *E2.D* - Determinação das *FRF* da estrutura modificada utilizando o Método dos Elementos Finitos. Esta etapa foi repetida até que todas as modificação tivessem sido aplicadas.

Figura 3.8: Estágios de modificação.



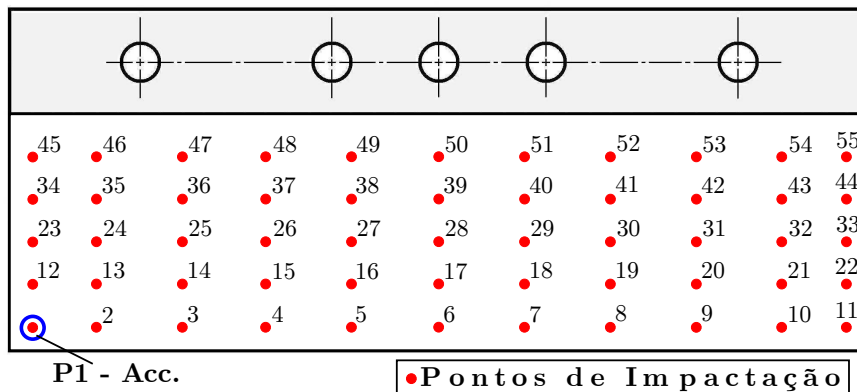
Fonte: produção do próprio autor.

- *E3* - Destinada para a comparação das Funções Resposta em Frequência da estrutura modificada obtidas pelos três métodos (experimental - *E3.A*, método proposto - *E3.B* e *FEM* - *E3.C*) para cada um dos estágios de modificação. Etapa também destinada a análise dos dados obtidos.

### 3.3.1 Análise Modal Experimental

Inicialmente, considerando a malha experimental determinada na Seção 4.3 e representada na Figura 3.9, fez-se o teste de impactação da análise modal experimental com a placa montada na morsa sobre a mesa do centro de usinagem conforme ilustra a Figura 3.10.

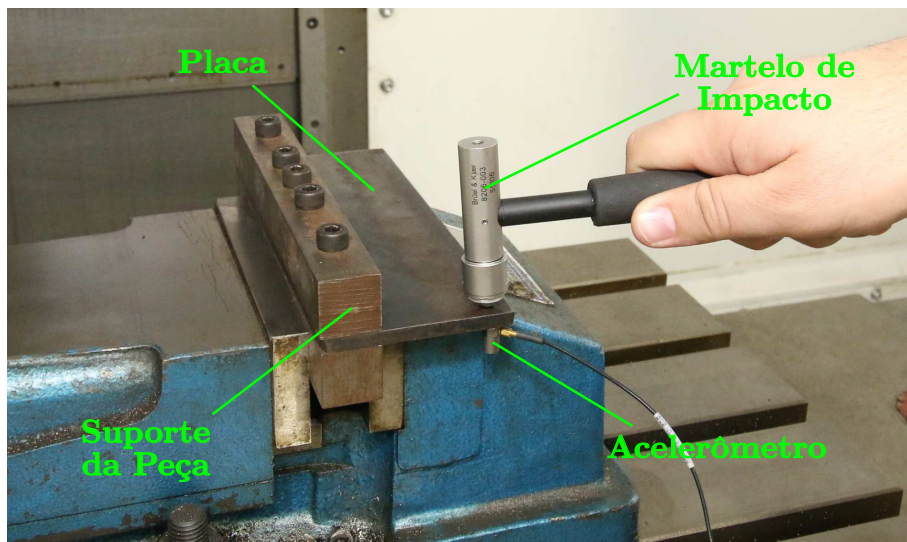
Figura 3.9: Malha dos pontos experimentais - Análise modal.



Fonte: produção do próprio autor.

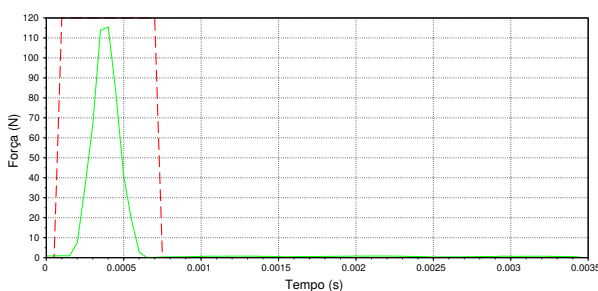
O acelerômetro foi colado, no ponto 1, na parte inferior da placa, e então impactou-se na parte superior três vezes em cada ponto, de 1 até 55. O processamento dos dados foi realizado por um programa feito no *software LabView*, com janelamento do tipo exponencial para o acelerômetro (Figura 3.11(b)) e janelamento transiente para o martelo (Figura 3.11(a)), faixa de frequências de 1 *Hz* a 20 *kHz* com um incremento de 1 *Hz* e taxa de aquisição de 20 *kHz*, que forneceram as parcelas real e imaginária de cada uma das Funções Resposta em Frequência.

Figura 3.10: Análise modal experimental.

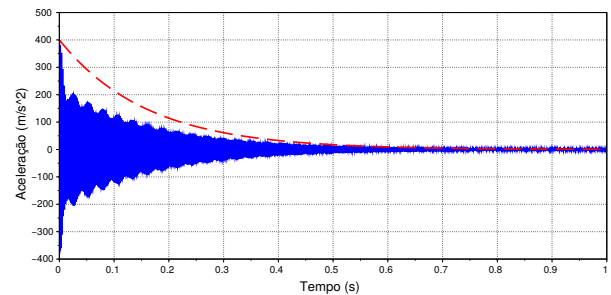


Fonte: produção do próprio autor.

Figura 3.11: Janelamento experimental.



(a) Janelamento do martelo.



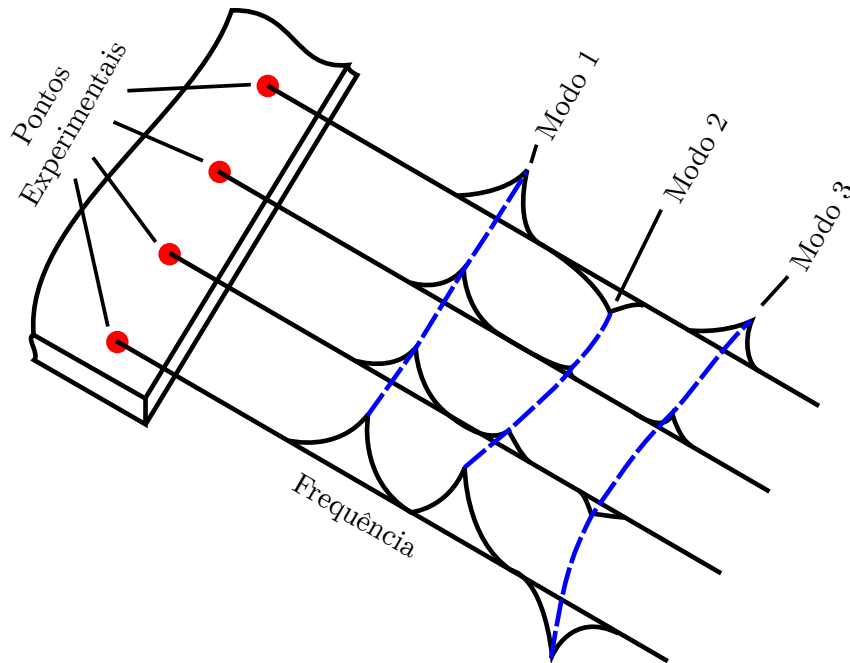
(b) Janelamento do acelerômetro.

Fonte: produção do próprio autor.

Em seguida, utilizando o método de extração de parâmetros da Seleção de Picos foi possível determinar as frequências naturais da placa ( $f_n$ ). Com isso, o procedimento para determinar as formas modais pode ser realizado, onde, fazendo a leitura do deslocamento modal em cada uma das frequências naturais em cada uma das 55 *FRFs* (Figura

3.12), foi possível compor o autovetor (Forma Modal) experimental associado a cada um dos autovalores (Frequência Natural), conforme descrito na Tabela 3.3.

Figura 3.12: Determinação das formas modais experimentais.



Fonte: produção do próprio autor.

Tabela 3.3: Matriz para extração das formas modais.

	Pontos Experimentais	Autovalores (Frequências Naturais)				
		fn1	fn2	fn3	...	fni
Autovetores	1	H 1,fn1	H 1,fn2	H 1,fn3	...	H 1,fn <sub>i</sub>
	2	H 2,fn1	H 2,fn2	H 2,fn3	...	H 2,fn <sub>i</sub>
	3	H 3,fn1	H 3,fn2	H 3,fn3	...	H 3,fn <sub>i</sub>
	...	...	...	...	...	...
	55	H 55,fn1	H 55,fn2	H 55,fn3	...	H 55,fn <sub>i</sub>

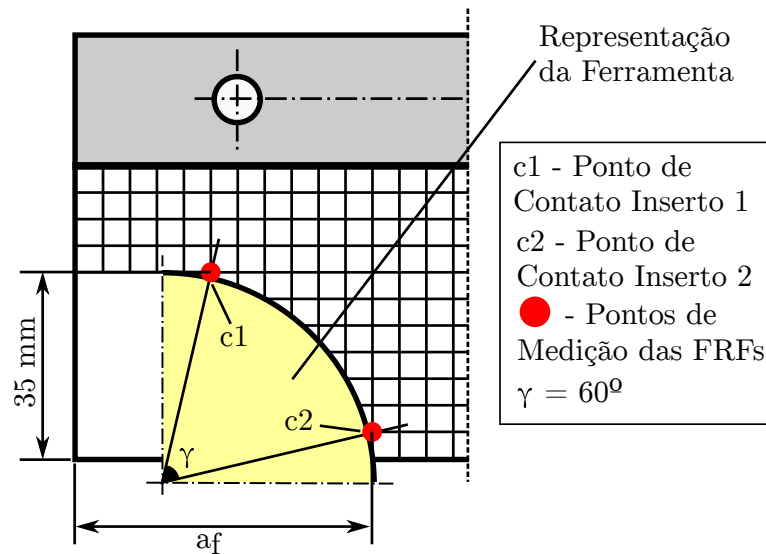
Fonte: produção do próprio autor.

Conhecendo a coordenada espacial de cada um dos 55 pontos experimentados, e com os deslocamentos modais obtidos da Tabela 3.3, a forma de vibrar de cada um dos modos de interesse pode ser traçada. Com este procedimento é possível extrair as frequências e formas naturais de vibração e ainda, se desejado, a razão de amortecimento ( $\xi$ ) de cada um dos modos. Este procedimento se fez necessário, pois para conhecer a forma modal da placa, os pontos contidos no caminho de passagem da ferramenta, que são apresentados a seguir, seriam insuficientes.

### 3.3.2 Análise Dinâmica - *FRF*s Experimentais

Inicialmente, considerando os estágios de modificação apresentados na Figura 3.8 e a malha numérica vista na Figura 4.3 determinou-se a quantidade e a posição dos pontos de obtenção das *FRF*. Um estudo da posição dos insertos da ferramenta durante a usinagem foi realizado para auxiliar na determinação dos pontos e é apresentado na Figura 3.13.

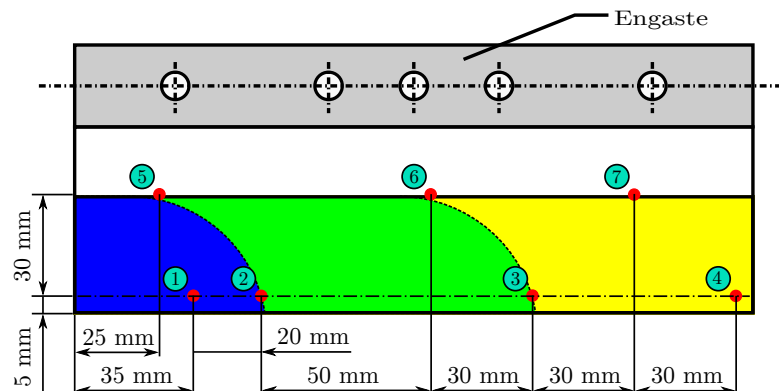
Figura 3.13: Geometria dos pontos de contato dos insertos.



Fonte: produção do próprio autor.

Desta forma, para cada estágio de modificação ( $a_f$ ) são utilizados dois pontos para medição das *FRF*, o que resulta em um total de seis pontos para a modificação completa. Além destes seis pontos que variam com a modificação, um ponto adicional fixo, também foi considerado. A Figura 3.14 ilustra os sete pontos escolhidos na placa para se realizar a análise dinâmica.

Figura 3.14: Geometria dos pontos para análise dinâmica experimental.



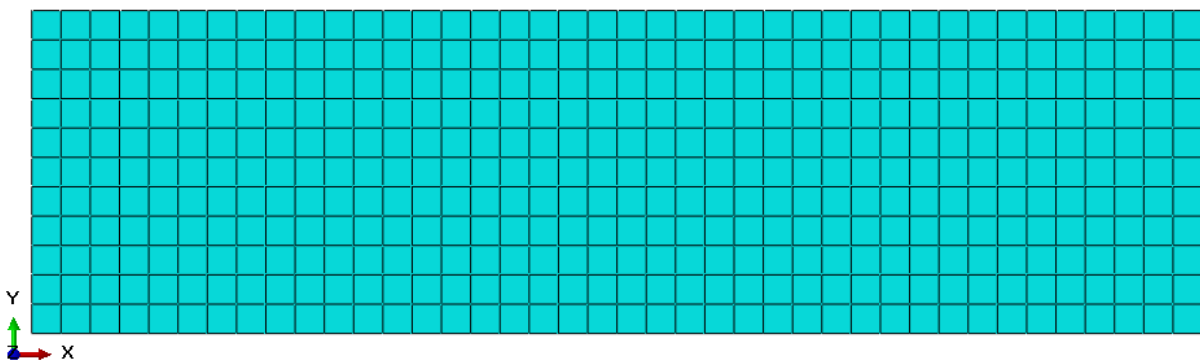
Fonte: produção do próprio autor.

Os pontos descritos na Figura 3.14, foram utilizados tanto na análise dinâmica da estrutura original, quanto na análise dinâmica das modificações. Em seguida, de forma analoga a análise modal experimental, o acelerômetro foi colado, no ponto 1, na parte inferior da placa, e então impactou-se a placa três vezes em cada ponto, de 1 até 7, obtendo assim 7 Funções Resposta em Frequência para cada estágio de modificação, mais 7 *FRF* para a estrutura original. Em seguida, após cada estágio de modificação o acelerômetro foi colado em ambos os pontos de interface do referido estágio, e impactado em ambos os pontos, resultando em mais 2 *FRF* para cada estágio. O processamento dos dados foi realizado no programa feito no *software LabView* utilizando as mesmas configuração já apresentadas. Em seguida empregou-se o procedimento de extração de parâmetros modais, de onde resultaram as frequências ( $fn$ ) e a razão de amortecimento ( $\xi$ ) de cada um dos modos, nos pontos contidos no caminho discreto de passagem da ferramenta.

### 3.3.3 Análise Modal Numérica

A modelagem e análise numérica da placa foi realizada no *software ABAQUS 6.12*. O primeiro passo foi determinar, por meio do estudo do refino da malha, o número de elementos a ser utilizado. Esta análise é apresentada na Seção 4.1. Como resultado da análise de refino, obteve-se uma malha com 40 elementos na direção X e 11 elementos na direção Y, totalizando em uma malha com um tamanho de 440 elementos (Figura 3.15), e, por simplicidade, o elemento de 4 nós e integração reduzida *S4R*, foi adotado, o que resulta em um número de 492 nós e 2952 graus de liberdade para a malha.

Figura 3.15: Malha com 440 elementos.

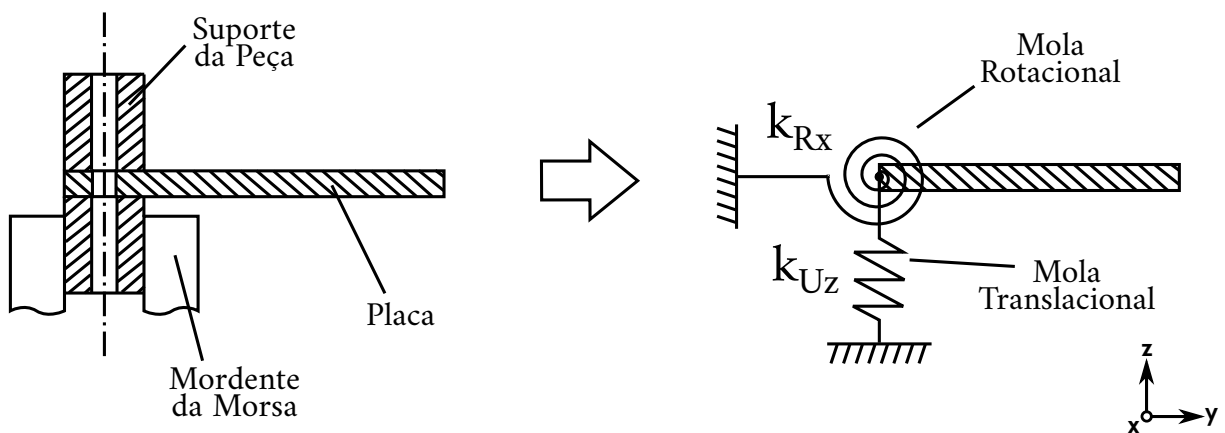


Fonte: produção do próprio autor.

O segundo passo consistiu em ajustar e validar este modelo de *FEM* aos dados experimentais obtidos anteriormente. Para o ajuste das frequências naturais e formas modais, foram inseridas molas rotacionais nos graus de liberdade de rotação em torno do eixo X ( $K_{Rx} = 780,4 \text{ Nm/rad}$ ) e molas de translacionais nos graus de liberdade de

translação no eixo Z ( $K_{Uz} = 25,727 \text{ MN/m}$ ) dos 41 nós da interfase com o engaste (Figura 3.16). Nos demais 4 graus de liberdade restantes de cada um dos nós desta mesma interface, foram aplicadas as condições de contorno de engaste (deslocamento nulo). Para determinação das rigidezes das molas o método de Otimização por Enxame de Partículas (*PSO*) foi aplicado. Todo o procedimento de otimização das rigidezes é descrito no Apêndice A. As propriedades do material da placa consideradas para análise foram as do aço SAE 1045 descritas na Tabela 3.1 e as propriedades geométricas adotados foram as apresentadas na Figura 3.1.

Figura 3.16: Método de ajuste do modelo.



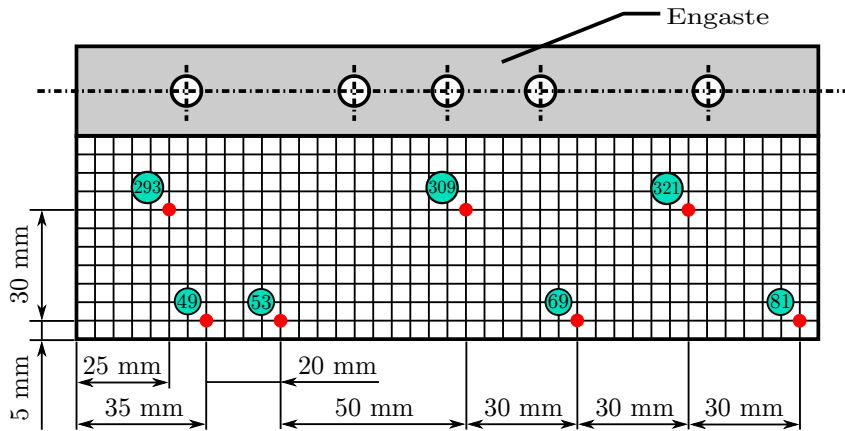
Fonte: produção do próprio autor.

Na sequência, foi realizada a solução do problema de autovalores e autovetores (Análise Modal Numérica) para identificar as frequências naturais e os modos de vibração da placa, utilizando o módulo implícito do *ABAQUS 6.12*. Para evitar que os modos de interesse sofressem variações causadas pelo erro numérico, foi definida a solução das dez primeiras frequências e formas naturais de vibração (maior do que o dobro da maior frequência de interesse), garantindo uma maior qualidade da resposta obtida. Após a realização desta análise modal numérica, para medição da representabilidade do modelo de *FEM*, comparações foram realizadas. Dentre elas, comparação das frequências naturais, e ainda, o cálculo do Critério de Correlação Modal (*MAC*), cuja sua formulação é descrita na Seção 2.5.1.

### 3.3.4 Análise Dinâmica - *FRF*s Numéricas

Para a determinação das Funções Resposta em Frequência numéricas nos pontos discretos de contato dos insertos no caminho da ferramenta, a malha considerada foi a determinada na Seção 4.1, e em seguida, os pontos experimentais foram correlacionados com a malha numérica como apresentada na Figura 3.17.

Figura 3.17: Geometria dos pontos para análise dinâmica numérica.



Fonte: produção do próprio autor.

Desta forma, considerando o modelo ajustado descrito na Figura 3.16, a Equação 2.2.37 e os graus de liberdade de translação em  $Z$  (grau de liberdade 3) dos referidos nós da malha numérica descrita anteriormente (Figura 3.17) foi possível realizar a análise dinâmica numérica do sistema. Como parâmetros de solução, considerou-se uma faixa de frequências de  $1\text{ Hz}$  a  $6\text{ kHz}$  (Maior que duas vezes a frequência do maior modo de interesse) com um número de pontos de 6000, o que resulta em uma resolução de  $1\text{ Hz}$ . O modo de truncamento da série ( $N_T$ ) considerado foi o modo 15, definido na Seção 4.4 do estudo do truncamento modal. As propriedades do material da placa consideradas para análise foram as do aço SAE 1045 descritas na Tabela 3.1 e as propriedades geométricas adotados foram as apresentadas na Figura 3.1.

Desta análise resultam as Funções Resposta em Frequência numéricas, que juntamente com as  $FRF$  obtidas experimentalmente servirão como parâmetros de comparação para a validação do método de previsão de comportamento dinâmico proposto neste estudo. Contudo, se faz necessário medir a precisão dos resultados obtidos neste modelo numérico frente aos resultados da análise experimental. Para isso, comparações foram realizadas, dentre elas, comparações diretas das Funções Resposta em Frequência numéricas e experimental, e ainda o cálculo do Critério de Correlação de Resposta em Frequência ( $FRAC$ ), cuja sua formulação é descrita na Seção 2.5.2.

### 3.3.5 Análise Dinâmica - $FRF$ s Método Proposto

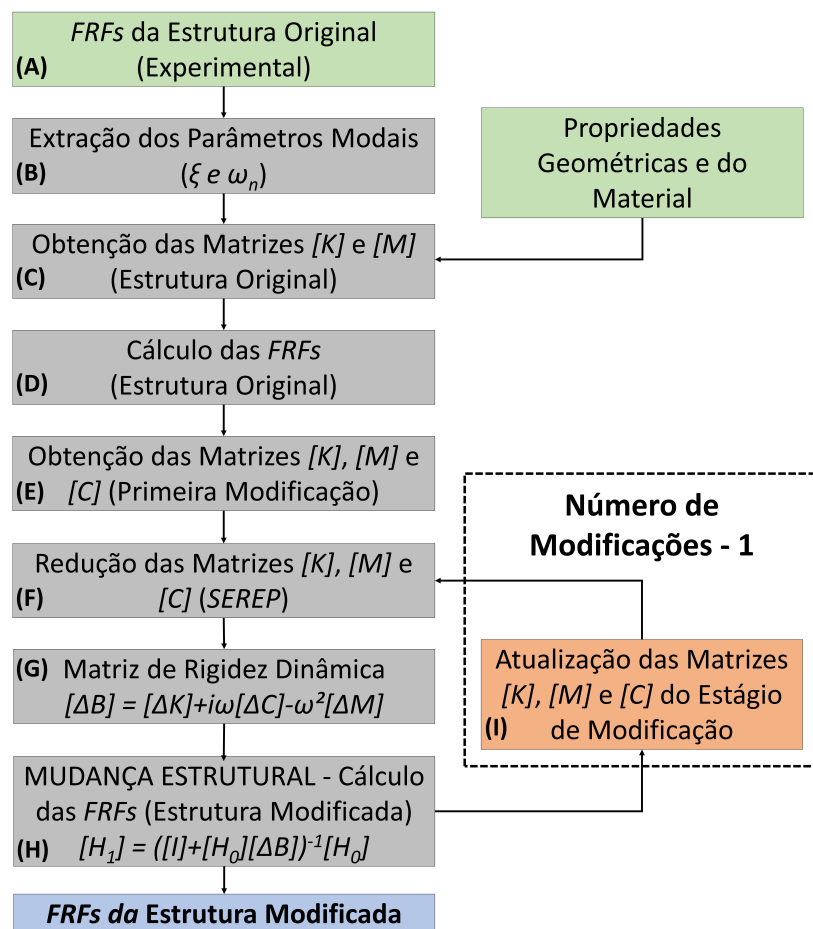
Para o método de previsão da característica dinâmica da placa proposto neste estudo, são considerados principalmente os conceitos de extração de parâmetros modais ( $PP$ ), amortecimento proporcional, mudança estrutural, redução de ordem de modelo e elementos finitos. A exemplo das análises numéricas, as propriedades geométricas adotadas foram as descritas na Figura 3.1 e as propriedades do material foram as do aço SAE

1045 que são apresentadas na Tabela 3.1. Como parâmetros de solução considerou-se uma faixa de frequências de 1 Hz a 6 kHz (Maior que duas vezes a frequência do maior modo de interesse) com um número de pontos de 6000, o que resulta em uma resolução de 1 Hz. O modo de truncamento da série ( $N_T$ ) considerado foi o modo 15, definido na Seção 4.4 do estudo do truncamento modal. A malha considerada foi a descrita no Apêndice 4.1, considerando a mesma correlação com os pontos experimentais descritos na seção anterior (Figura 3.17).

Um algoritmo computacional foi elaborado no *software Scilab 6.0.0*, o qual entrega as Funções Resposta em Frequência atualizadas da estrutura modificada a partir dos dados da estrutura original. O tipo de elemento finito adotado na atualização das matrizes de Massa e Rigidez é o  $S4R$  contido na biblioteca de elementos do *ABAQUS*, cuja a construção de suas matrizes de massa e rigidez são descritas na Seção 2.2.7.2.

Na Figura 3.18 é apresentado o fluxograma que descreve de forma gráfica a lógica adotada para o algoritmo da metodologia proposta. Em seguida, são apresentadas, detalhadas e discutidas cada uma das etapas do código.

Figura 3.18: Fluxograma do algoritmo.



Fonte: produção do próprio autor.

- (A) Consiste em determinar as Funções Resposta em Frequência experimentais da estrutura original, ou seja, sem modificação. Este procedimento já foi apresentado e discutido na Seção 3.3.2;
- (B) Extrai das *FRF* da estrutura original os parâmetros modais da placa. Neste caso o método de extração adotado foi o da Seleção de Picos (*PP*), cuja sua formulação é descrita na Seção 2.2.5.1;
- (C) Etapa em que, considerando os parâmetros modais extraídos em (B) para ajustar o modelo, as propriedades geométricas da placa sem modificação apresetadas na Figura 3.1, as propriedades do material, neste caso do aço SAE 1045 descrito na Tabela 3.1 e considerando o elemento *S4R* obtem-se as matrizes de Massa  $[M_0]$  e de Rigidez  $[K_0]$  da estrutura original;
- (D) Cálculo da Funções Resposta em Frenquência numéricas da estrutura original, considerando a Equação 2.2.37 , onde as razões de amortecimento ( $\xi$ ) utilizadas em cada modo são as obtidas em (B);
- (E) Determinação das matrizes de Massa  $[M_1]$ , Amortecimento  $[C_1]$  (utilizando amortecimento proporcional) e de Rigidez  $[K_1]$  da primeira modificação aplicada na estrutura;
- (F) Redução da ordem das matrizes  $[M_0]$ ,  $[M_1]$ ,  $[C_0]$ ,  $[C_1]$ ,  $[K_0]$  e  $[K_1]$  para o número de pontos discretos utilizados na análise experimental utilizando *SEREP*. Isto se faz necessário devido a formulação da mudança estrutural adotada para a atualização da *FRF*, além de reduzir consideravelmente o tempo de processamento do algoritmo. A ordenação dos *DOF* deve ser respeitada.
- (G) O cálculo das matrizes de rigidez dinâmica da estrutura original ( $[B_0]$ ) e modificada ( $[B_1]$ ) pode ser realizado. A diferença entre estes dois modelos produz a matriz de rigidez dinâmica da modificação  $[\Delta B]$  (Equação 2.4.96 );
- (H) A resposta dinâmica (Matriz de *FRF* -  $[H_1]$ ) da estrutura modificada pode ser calculada pela equação 2.4.95 ;
- (I) Passo de atualização das matrizes  $[M_1]$ ,  $[C_1]$  e  $[K_1]$  considerando a partir do segundo estágio de modificação até o fim das modificações.

As maiores vantagens do método proposto para atualização da característica dinâmica é a utilização de um modelo de ordem reduzida que resulta em um menor tempo de processamento e principalmente o fato de após a obtenção da matriz de *FRF* da estrutura original  $[H_0]$  e da matriz de *FRF* da primeira modificação, para os demais estágios basta uma atualização para a obtenção de suas novas características dinâmicas.

Desta análise resultam as Funções Resposta em Frequência em cada um dos estágios de modificação. Se faz necessário medir a acurácia dos resultados obtidos neste modelo de atualização frente aos resultados da análise experimental e numérica. Para isso, comparações foram realizadas, dentre elas, comparações diretas das Funções Resposta em Frequência, e ainda o cálculo do Critério de Correlação de Resposta em Frequência (*FRAC*), cuja sua formulação é descrita na Seção 2.5.2.



# Capítulo 4

## Análises Preliminares

Neste capítulo são apresentadas algumas análises preliminares utilizadas na determinação dos tamanhos das malhas numérica e experimental, para a seleção dos tipos de elementos a serem utilizados na análise numérica, os quais encontram-se disponíveis na biblioteca do *ABAQUS 6.12*, e ainda, algumas considerações referentes ao modelamento.

### 4.1 Análise de Refino de Malha

A forma com que um problema físico contínuo é discretizado, implica diretamente na qualidade da resposta obtida pela solução numérica deste problema. Por isso uma malha de qualidade, com tipo e número de elementos correto, se faz necessário na análise por elementos finitos. Um procedimento para se determinar uma malha de qualidade, é conhecido como análise de refino de malha. Este consiste em monitorar o comportamento da grandeza física de interesse, enquanto varia-se alguns parâmetros como, número e tipo de elementos, até que o erro desejado seja alcançado.

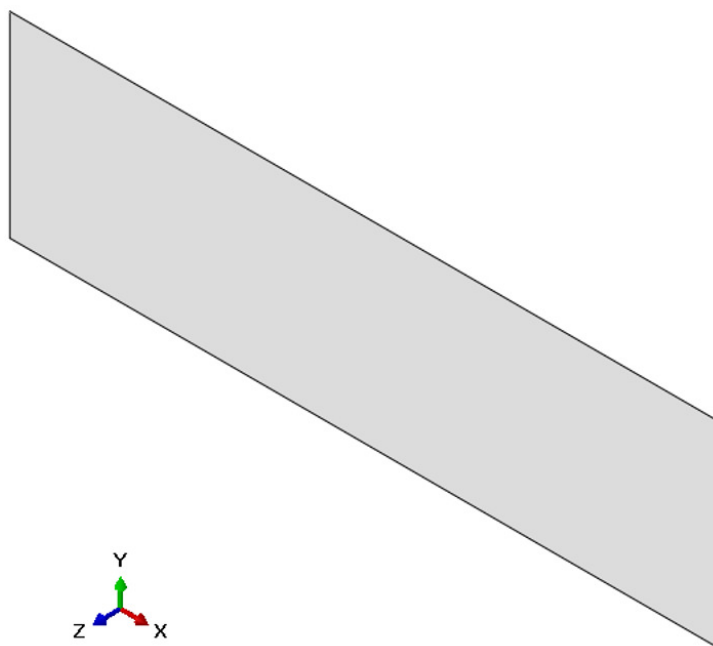
### 4.2 Determinação do Tamanho de Malha e Tipo de Elemento

Para determinar o número e o tipo de elementos de casca a serem utilizados no modelo de elementos finitos do problema proposto, modelou-se a peça no *software ABAQUS 6.12* como visto na Figura 4.1, utilizando três formulações de elementos e nove tamanhos de malha diferentes. As grandezas monitoradas foram: os valores das frequências naturais dos quatro primeiros modos de vibração e os elementos utilizados foram o *S4*, *S4R* e *S8R*, elementos apresentados na Seção 2.2.7. Para critério de refino o erro relativo <sup>1</sup> entre a malha atual e a malha anterior foi calculado, sendo 1% o erro máximo aceitável.

---

<sup>1</sup> $erro = \frac{fn_m - fn_{m-1}}{fn_{m-1}} * 100$ , onde  $m$  é a número da malha que está sendo analisada.

Figura 4.1: Modelo da placa - *ABAQUS*.



Fonte: produção do próprio autor.

A Tabela 4.1, apresenta os tamanhos de malha e tipo de elementos estudados na análise de refino e os respectivos valores das frequências naturais de vibração para cada um dos quatro modos.

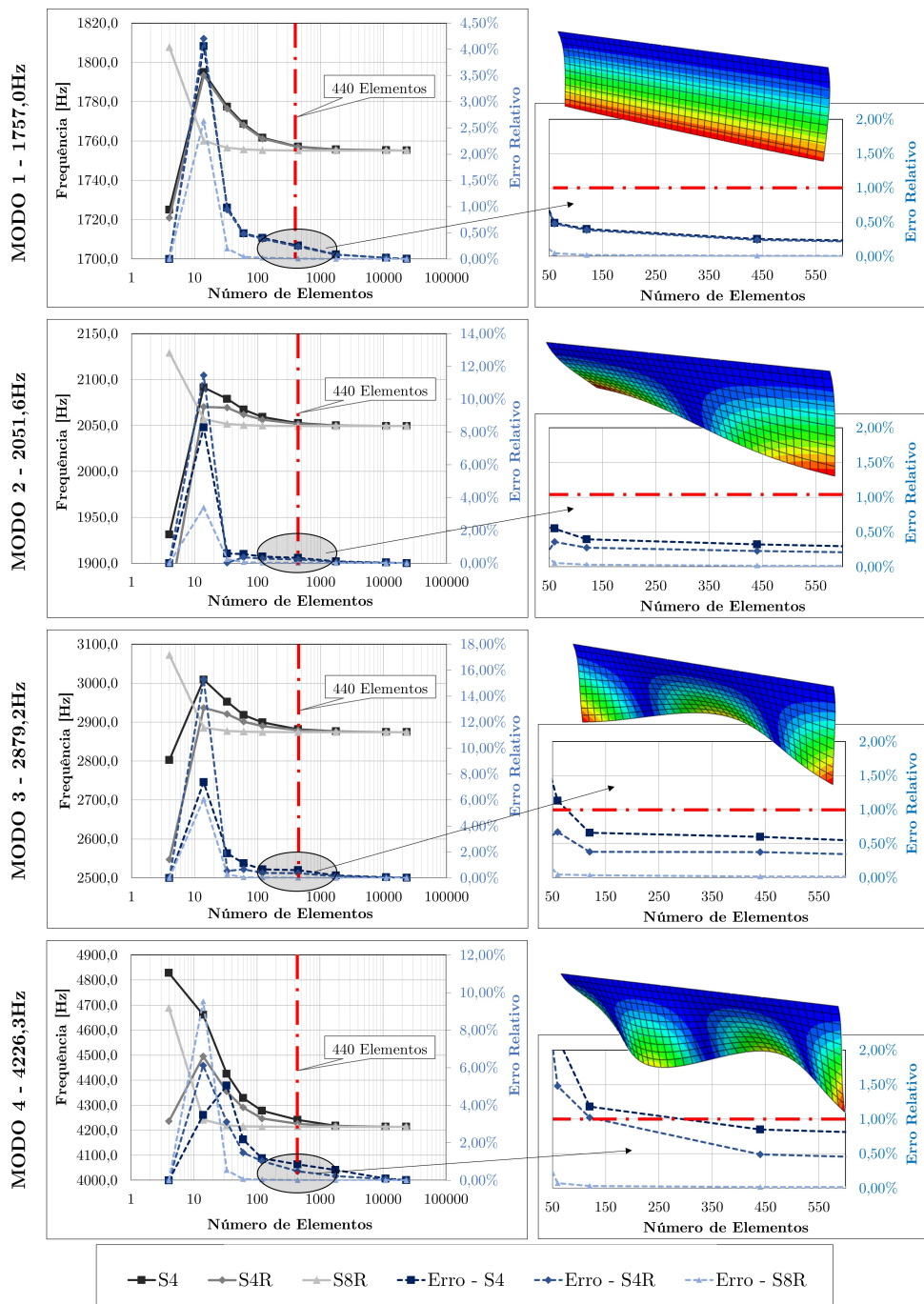
Tabela 4.1: Análise de refino de malha.

Modo	Tipo de Elemento	Número de Elementos da Malha								
		4	14	33	60	120	440	1760	11000	23280
1	S4	1725,1	1795,1	1777,5	1768,8	1761,7	1757,2	1755,7	1755,3	1755,2
	S4R	1721,0	1793,4	1776,5	1768,0	1761,2	1757,0	1755,6	1755,2	1755,2
	S8R	1807,7	1760,1	1756,6	1755,8	1755,4	1755,2	1755,2	1755,2	1755,2
2	S4	1931,2	2091,3	2078,9	2067,4	2059,2	2052,5	2050,2	2049,4	2049,3
	S4R	1857,3	2070,3	2069,5	2062,0	2056,3	2051,6	2049,9	2049,4	2049,3
	S8R	2129,1	2056,8	2051,7	2050,5	2049,8	2049,4	2049,3	2049,3	2049,3
3	S4	2802,6	3009,1	2951,9	2918,5	2899,2	2881,8	2876,2	2874,5	2874,3
	S4R	2547,3	2936,6	2920,7	2901,1	2890,1	2879,2	2875,5	2874,4	2874,2
	S8R	3072,1	2885,2	2877,2	2875,8	2874,8	2874,3	2874,2	2874,1	2874,1
4	S4	4829,0	4661,1	4425,6	4329,2	4278,1	4241,8	4218,2	4214,3	4213,8
	S4R	4236,1	4495,3	4355,4	4291,0	4247,1	4226,3	4216,8	4214,0	4213,7
	S8R	4688,9	4241,8	4218,8	4215,8	4214,4	4213,7	4213,5	4213,5	4213,5

Fonte: produção do próprio autor.

A Figura 4.2 apresenta o comportamento das frequências naturais de vibração para cada um dos quatro primeiros modos com o aumento do refinamento da malha, onde observa-se que, a partir da malha com 440 elementos, as frequências naturais numéricas convergem para um mesmo valor para os três tipos de elementos considerados, para o qual, o erro relativo calculado entre a malha atual e a malha anterior é inferior a 1%.

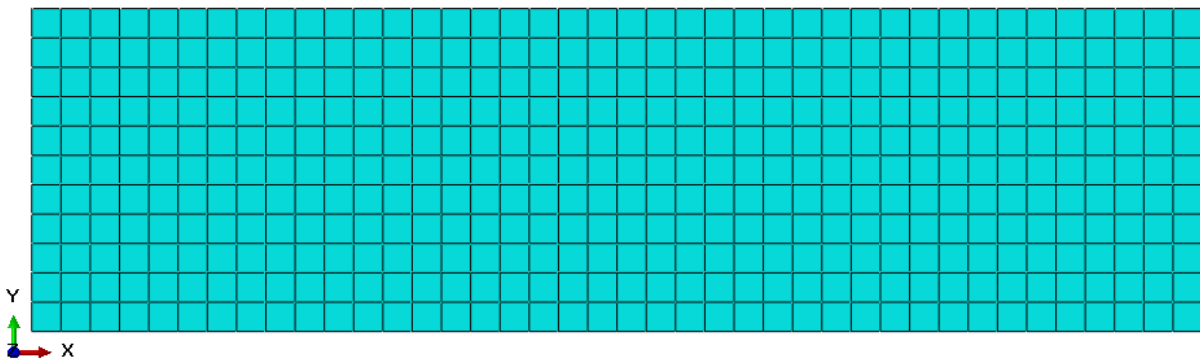
Figura 4.2: Análise gráfica do refino de malha.



Fonte: produção do próprio autor.

Considerando estes resultados de refino, pode-se definir como características da malha para os modelos de Elementos Finitos, um tamanho de 440 elementos (Figura 4.3), com razão de aspecto 1 (comprimento do elemento igual a sua altura). Por simplicidade, o elemento de casca de quatro nós e integração numérica reduzida (*S4R*) foi escolhido, uma vez, que é possível observar uma pequena influência na qualidade dos resultados analisados. Desta configuração, resultam um número de 492 nós e 2952 graus de liberdade para a malha.

Figura 4.3: Malha com 440 elementos.

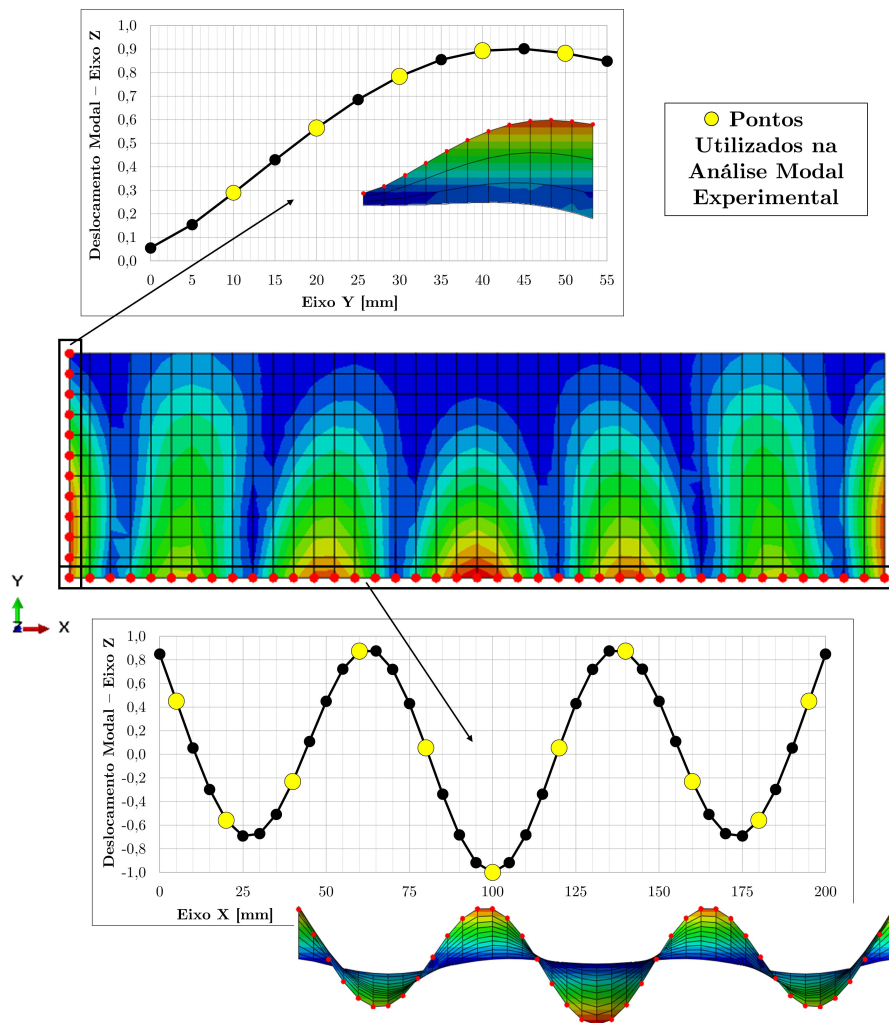


Fonte: produção do próprio autor.

### 4.3 Deteminação dos Pontos da Análise Modal Experimental

O procedimento aplicado para determinar o número de pontos a serem experimentados, e suas posições, baseou-se em uma simulação numérica (Método dos Elementos Finitos) da placa original (sem modificação) no *software ABAQUS 6.12*, utilizando a malha selecionada na seção anterior, com as dimensões descritas na Figura 3.1 e propriedades do material citadas na Tabela 3.1. Após o modelamento, realizou-se uma análise modal numérica, onde foram traçados os deslocamentos modais máximos nas coordenadas  $X$  e  $Y$  (Figura 4.4) da décima forma modal de vibração da placa (forma modal maior que duas vezes a maior frequência de interesse - quarto modo, exclusivamente para este caso a análise modal numérica foi realizada até o vigésimo modo de vibração), possibilitando assim a escolha adequada da posição e do número de pontos capazes de representar os picos e vales dessa forma modal. Com esta configuração de pontos de análise, é sabido que a forma modal da quarta frequência natural de vibração (modo de interesse), também será representada de forma adequada.

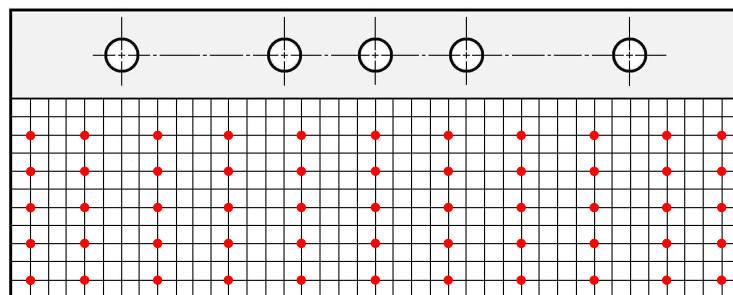
Figura 4.4: Definição dos pontos experimentais da análise modal.



Fonte: produção do próprio autor.

Com isso, obteve-se uma malha experimental com 11 pontos no eixo  $X$  e 5 pontos no eixo  $Y$ , resultando em 55 pontos de impactação, como visto na figura a seguir:

Figura 4.5: Malha dos pontos experimentais.



Fonte: produção do próprio autor.

A ordenação e as coordenadas  $X$  e  $Y$  de cada um dos 55 pontos experimentais é representada na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Ordenação e coordenadas dos pontos experimentais.

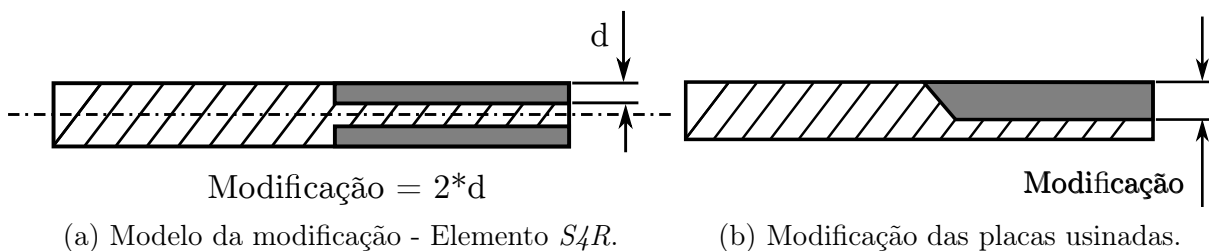
		<i>Posição no Eixo X [mm].</i>										
		<b>5</b>	<b>20</b>	<b>40</b>	<b>60</b>	<b>80</b>	<b>100</b>	<b>120</b>	<b>140</b>	<b>160</b>	<b>180</b>	<b>195</b>
<i>Posição no Eixo Y [mm].</i>	<b>10</b>	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
	<b>20</b>	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
	<b>30</b>	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
	<b>40</b>	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
	<b>50</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Fonte: produção do próprio autor.

### 4.3.1 Análise do Erro Relacionado à Simplificação de Simetria no Modelo da Modificação

Uma das considerações adotadas na formulação do elemento casca, assume que a peça modelada apresenta simetria em relação ao seu plano médio Figura 4.6(a), o que não é visto no problema estudado neste trabalho, onde a placa sofre modificações em uma de suas faces, reduzindo a sua espessura, conforme pode ser visto na Figura 4.6(b).

Figura 4.6: Aproximação numérica da modificação.

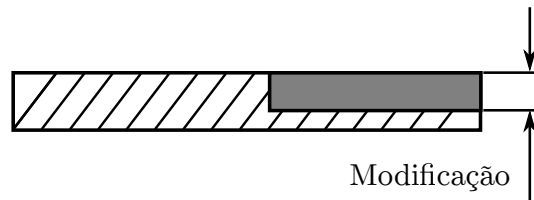


Fonte: produção do próprio autor.

Para avaliar a influência na resposta dinâmica prevista pelo algoritmo, um estudo numérico foi realizando variando a profundidade de corte ( $a_p$ ) de 0,0 mm (ou seja, sem modificação) até 3,5 mm (modificação maior que 50% da espessura da placa) em dois modelos distintos. Em um primeiro modelo, utilizando a formulação tradicional do elemento de casca  $S4R$ , considerando o modelo simétrico conforme descrito na Figura 4.6(a), e tamanho de malha conforme descrito na Seção 4.1. Para o ajuste do modelo, as rigidezes das molas consideradas foram:  $K_{Uz} = 25,727 \text{ GN/m}$  para os graus de liberdade de translação e  $K_{Rx} = 780,4 \text{ Nm/rad}$  para os graus de liberdade de rotação da interface peça

sistema de fixação, obtidas pelo procedimento descrito no Apêndice A. Para o segundo modelo, foi considerada uma compensação matemática do elemento  $S4R$  disponível na formulação do *ABAQUS 6.12*, onde a simetria não é computada, sendo o modelo gerado a partir do plano inferior da peça, conforme pode ser visto na Figura 4.7. O tamanho de malha considerado foi 440 elementos conforme descrito na Seção 4.1, e para o ajuste do modelo as rigidezes das molas consideradas foram:  $K_{Uz} = 56,890 \text{ MN/m}$  para os graus de liberdade de translação e  $K_{Rx} = 782,8 \text{ Nm/rad}$  para os graus de liberdade de rotação da interface peça sistema de fixação. O procedimento considerado para a determinação destas rigidezes é análogo ao descrito no Apêndice A.

Figura 4.7: Aproximação numérica da modificação.



Fonte: produção do próprio autor.

Análises modais foram realizadas em ambos os modelos, onde o erro relativo entre eles pode ser calculado, comparado e avaliado. A Tabela 4.3 apresenta os resultados desta análise considerando o primeiro modo de vibração da placa.

Tabela 4.3: Análise da simetria no modelo da modificação - Modo 1.

Profundidade de corte ( $a_p$ )	Plano Médio [Hz]	Plano Inferior [Hz]	Erro Relativo [%]
Sem Modificação	997,25	997,25	0,00
0,5mm	1032,00	1032,40	0,04
1,0mm	1069,20	1069,90	0,07
1,5mm	1108,30	1109,20	0,08
2,0mm	1148,00	1149,00	0,09
2,5mm	1185,10	1186,00	0,08
3,0mm	1212,70	1213,30	0,05
3,5mm	1216,50	1216,50	0,00

Fonte: produção do próprio autor.

Da mesma forma, na Tabela 4.4 são apresentados os resultados desta análise para o segundo modo de vibração.

Tabela 4.4: Análise da simetria no modelo da modificação - Modo 2.

Profundidade de corte ( $a_p$ )	Plano Médio [Hz]	Plano Inferior [Hz]	Erro Relativo [%]
Sem Modificação	1372,40	1372,40	0,00
0,5mm	1372,70	1373,90	0,09
1,0mm	1377,40	1379,70	0,17
1,5mm	1385,90	1389,30	0,25
2,0mm	1397,00	1401,10	0,29
2,5mm	1406,90	1410,40	0,25
3,0mm	1407,50	1411,70	0,30
3,5mm	1382,50	1385,70	0,23

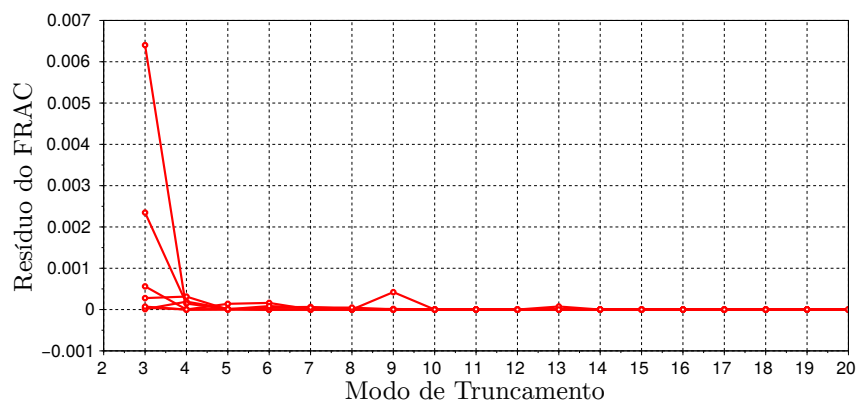
Fonte: produção do próprio autor.

Considerando os resultados acima, observa-se que a simplificação de simetria adotada, apresenta pequena influência nos resultados obtidos, onde, o maior erro relativo encontrado foi de 0,30% para o segundo modo de vibração da placa com uma profundidade de corte ( $a_p$ ) aplicada, igual a 3,0 mm, o que resulta em um erro absoluto do valor da frequência natural de 4,2 Hz. Desta forma, para os estudos de modificação deste trabalho, adotou-se: uma profundidade de corte de 2,5 mm para a representação das modificações, e a utilização da formulação tradicional do elemento *S4R* do *ABAQUS 6.12* para o modelamento da placa em ambos modelos numéricos (Método dos Elementos Finitos e método proposto).

## 4.4 Análise do Truncamento Modal Numérico

Considerando as Equações 2.2.37 e 2.2.39 para o cálculo das Funções Resposta em Frequência numéricas, um estudo para definição do modo de truncamento  $N_T$  se faz necessário. Para este estudo, o resíduo do Critério de Correlação de Resposta em Frequência (*FRAC*) obtido entre duas *FRF* consecutivas truncadas em  $N_T - 1$  e  $N_T$ , foi calculado e monitorado. Estas Funções Resposta em Frequência foram calculadas somente nos pontos de interesse das análises dinâmicas, descritas nas Seções 3.3.2, 3.3.4 e 3.3.5. Os resultados da convergência são apresentados na Figura 4.8, onde, é visto que o resíduo do *FRAC* para todos os pontos de interesse analisados, apresentam uma excelente estabilidade a partir do truncamento modal da série no modo quinze, onde a magnitude deste resíduo encontra-se na ordem de  $1 \times 10^{-6}$ . Desta forma, foi definido como modo de truncamento  $N_T$  para as Funções Resposta em Frequência das análises numéricas (Método dos Elementos Finitos e Método Proposto) o décimo quinto modo de vibração da estrutura.

Figura 4.8: Convergência do resíduo do *FRAC* para o estudo do truncamento modal numérico.



Fonte: produção do próprio autor.



# Capítulo 5

## Resultados e Discussões

### 5.1 Análise Modal

Pretendendo conhecer o comportamento dinâmico e as características modais da placa, uma análise modal experimental, e posteriormente, uma análise modal numérica, foram realizadas somente na estrutura intacta, ou seja, sem usinagem (modificação), e seus resultados são descritos e discutidos nesta seção.

#### 5.1.1 Análise Modal Experimental

Após o procedimento experimental ter sido realizado conforme descrito na Seção 3.3.1, realizou-se a indentificação das formas e parâmetros modais - frequência natural ( $fn$ ) e fator de amortecimento ( $\xi$ ) - dos dois primeiros modos de vibrar da placa (primeiro modo de flexão e primeiro modo de torção), e a síntese destas  $FRF$ s para verificar a precisão dos parâmetros extraídos. Para isto, foi utilizado o método de seleção de picos ( $PP$ ), método simples e de fácil aplicação. A utilização deste método de extração de parâmetros só é possível devido a baixa densidade modal da estrutura, em outras palavras, devido ao grande espaçamento entre os modos. A Tabela 5.1, apresenta os parâmetros modais<sup>1</sup> obtidos pelo método da seleção e picos.

Tabela 5.1: Parâmetros modais - Método da seleção de picos.

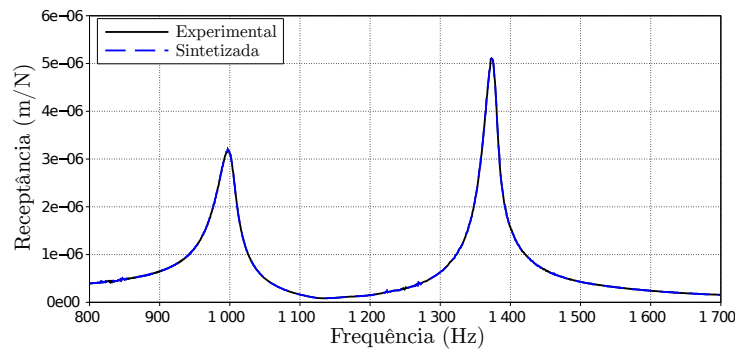
	Modo 1		Modo 2	
	Média	Desvio	Média	Desvio
$fn$	997,25	1,61	1372,38	1,08
$\xi$	0,0145	0,0005	0,0073	0,0003

Fonte: produção do próprio autor.

<sup>1</sup>Média de 55 pontos. Os dados de cada ponto podem ser vistos no Apêndice B.

Cada um dos modos selecionados é utilizado para compor a expressão analítica que irá gerar as curvas sintetizadas que representam as *FRF*s medidas, conforme descrito na Seção 2.2.5.1. A Figura 5.1, compara a magnitude da *FRF* experimental com a sintetizada (*PP*). O termo 1FZ1UZ refere-se a *FRF* obtida da medição da resposta no ponto experimental 1 na direção *Z* submetido a uma excitação nos mesmos ponto e direção. A mesma notação será adotada para as demais comparações nesta subsecção.

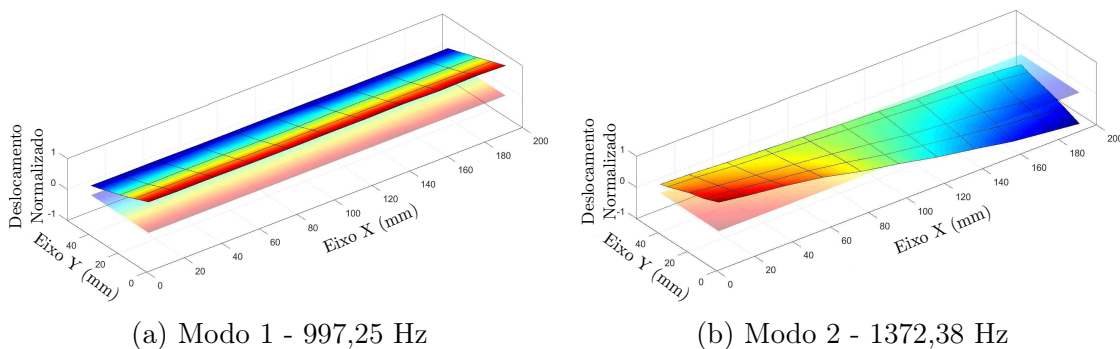
Figura 5.1: Experimental vrs. Sintetizada - Método da seleção de picos - 1FZ1UZ.



Fonte: produção do próprio autor.

É possível observar, que para os dois primeiros modos de vibrar da estrutura, a *FRF* sintetizada apresenta uma excelente correlação com a *FRF* experimental. Sendo assim, os parâmetros modais determinados pelo método, pode ser considerados uma boa estimativa de  $fn$  e  $\xi$  para as análises futuras. Em seguida, munido dos parâmetros modais, foi possível traçar as formas modais da placa, obtidas experimentalmente.

Figura 5.2: Formas modais experimentais.



Fonte: produção do próprio autor.

Da análise experimental é possível fazer uma leitura clara dos dois primeiros modos de vibrar da placa - primeiro modo de flexão e primeiro modo de torção - onde os respectivos parâmetros modais, frequência natural ( $fn$ ) e fator de amortecimento ( $\xi$ ), são os descritos na Tabela 5.1.

### 5.1.2 Análise Modal Numérica - *FEM*

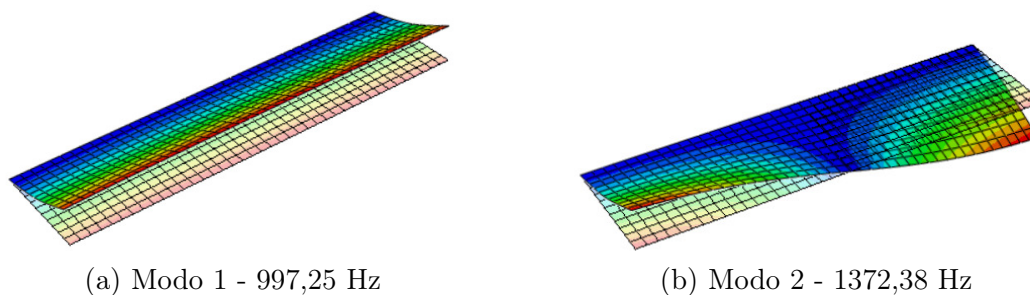
Em seguida, uma análise modal numérica foi realizada utilizando o programa *ABAQUS 6.12* conforme descrita na seção 3.3.3, buscando determinar os mesmos modos de vibração da placa. Na tabela 5.2 são apresentadas as frequências naturais dos modos apresentados na Figura 5.3, obtidos através desta análise numérica.

Tabela 5.2: Frequências naturais numéricas (*FEM*).

Modo	Frequência Natural [Hz]
1	997,25
2	1372,38

Fonte: produção do próprio autor.

Figura 5.3: Formas modais numéricas (*FEM*).



Fonte: produção do próprio autor.

Uma comparação entre os resultados experimentais e numéricos das frequências naturais da placa foi realizada calculando o erro relativo entre eles (Tabela 5.3).

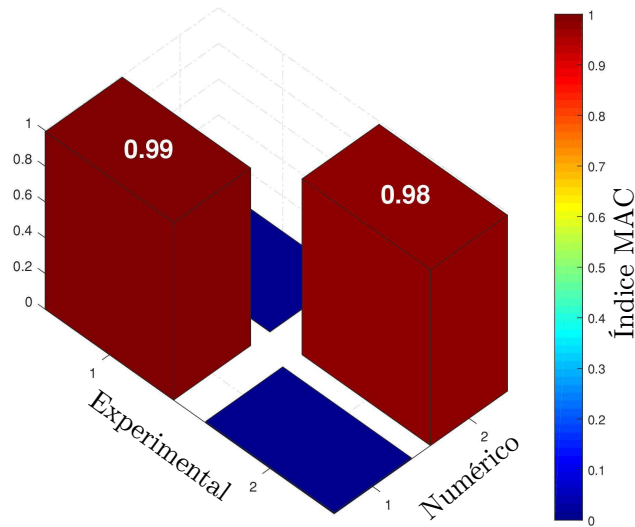
Tabela 5.3: Comparação entre as frequências naturais experimentais e *FEM*.

Modo	Frequência Natural [Hz] - Experimental	Frequência Natural [Hz] - <i>FEM</i>	Erro Relativo [%]
1	997,25	997,25	0,00
2	1372,38	1372,38	0,00

Fonte: produção do próprio autor.

Além da comparação entre as frequências naturais, a comparação da forma de vibrar de cada um dos modos também foi realizada utilizando como parâmetro de qualidade o índice *MAC*. A Figura 5.4 apresenta o *MAC* obtido entre os modos experimentais e numéricos.

Figura 5.4: MAC - Experimental vrs. Numérico (*FEM*).



Fonte: produção do próprio autor.

O erro relativo apresentado entre o modelo numérico e média dos dados experimentais é nulo para ambos os modos (Tabela 5.3). O índice *MAC* mínimo obtido, que foi para o segundo modo de vibração da placa, foi de 0,98 (índices *MAC* acima de 0,90 são considerados aceitáveis nas literaturas especializadas). Com isso, é possível afirmar que o modelo numérico utilizado apresenta uma excelente correlação com os dados experimentais para os dois primeiros modos de vibração da placa.

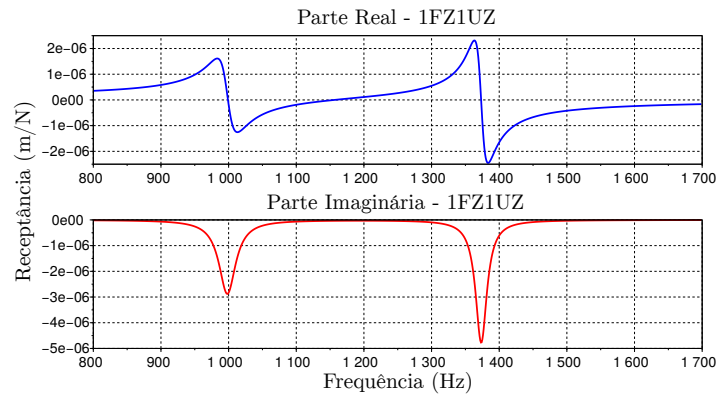
## 5.2 Análise Dinâmica - *FRF*

Posteriormente, com os parâmetros e formas modais, numéricas e experimentais devidamente verificadas, foi possível iniciar a análise das Funções Resposta em Frequência da placa. Inicialmente, serão apresentados os dados obtidos através da análise experimental, que em seguida, servirão como referência para verificação tanto das *FRF*s obtidas pela análise de Elementos Finitos como pelo método de previsão proposto neste trabalho, que serão apresentadas em seguida.

### 5.2.1 Análise Dinâmica - *FRF*s Experimentais

Considerando o percurso de passagem da ferramenta sobre a placa conforme descrito na seção 3.3.2, aplicando a teoria da reciprocidade de Maxwell e utilizando o método de seleção de picos para sintetizar as curvas, as *FRF*s experimentais serão inicialmente apresentadas. Na Figura 5.5 são apresentadas as partes real e imaginária da *FRF* no ponto 1FZ1UZ, referente a estrutura sem modificação.

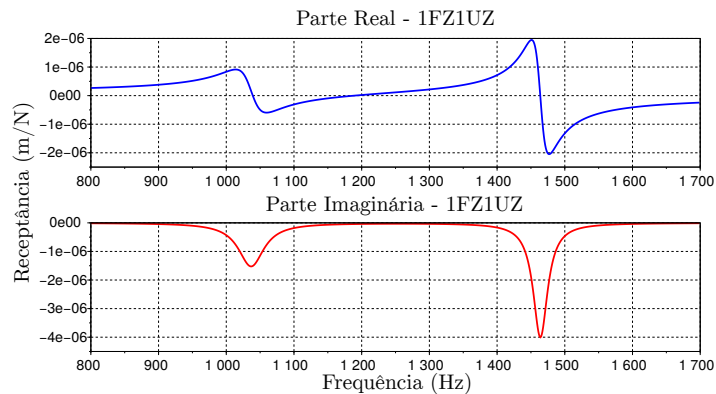
Figura 5.5: *FRF* Experimental - Estrutura original.



Fonte: produção do próprio autor.

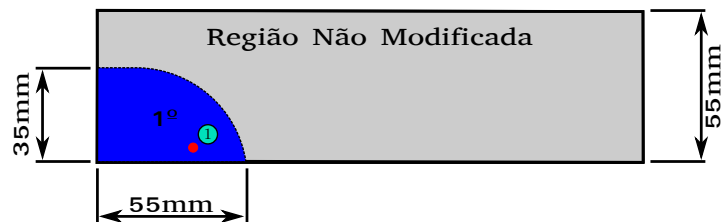
Igualmente, são apresentadas as parcelas real e imaginária das *FRF*s experimentais para cada um dos três estágios de aplicação da modificação. Na Figura 5.6 é ilustrada a *FRF* experimental no ponto 1FZ1UZ, após o primeiro estágio (Figura 5.7).

Figura 5.6: *FRF* Experimental - Primeiro estágio de modificação.



Fonte: produção do próprio autor.

Figura 5.7: Primeiro estágio de modificação.

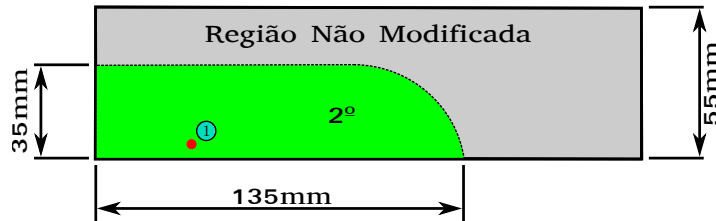


Fonte: produção do próprio autor.

Em seguida, após o segundo estágio de modificação com 135 mm de comprimento

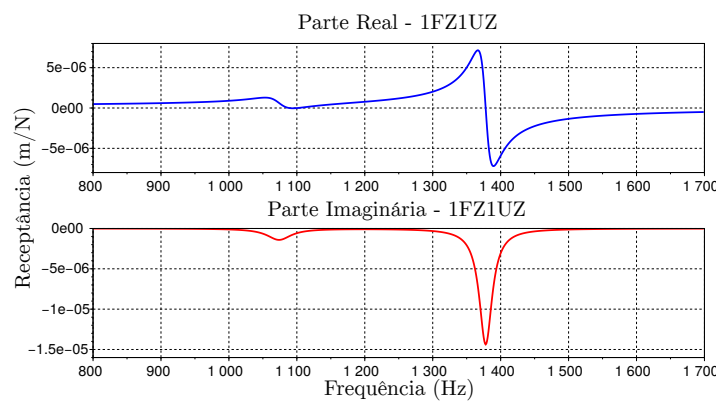
ter sido aplicado a placa (Figura 5.8), a *FRF* resultante para o ponto 1FZ1UZ foi obtida, e é apresentada na Figura 5.9.

Figura 5.8: Segundo estágio de modificação.



Fonte: produção do próprio autor.

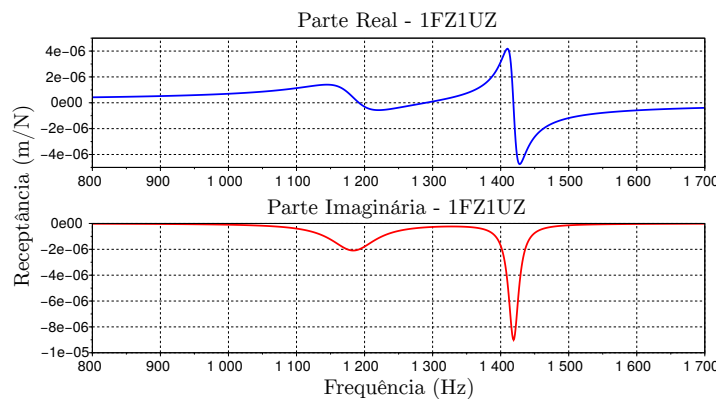
Figura 5.9: *FRF* Experimental - Segundo estágio de modificação.



Fonte: produção do próprio autor.

Por fim, na Figura 5.10 é apresentada a *FRF* experimental (ponto 1FZ1UZ), para o terceiro estágio de modificação (Figura 5.11).

Figura 5.10: *FRF* Experimental - Terceiro estágio de modificação.



Fonte: produção do próprio autor.

Figura 5.11: Terceiro estágio de modificação.



Fonte: produção do próprio autor.

Para verificar o impacto das modificações aplicadas a estrutura, a Tabela 5.4 apresenta a variação das duas primeiras frequências naturais de vibração da placa ao longo dos estágios de modificação. Partindo dela intacta, ou seja, sem modificação, até completamente usinada terceiro estágio de modificação.

Tabela 5.4: Frequências naturais ao longo dos estágios de modificação.

Estágio de Modificação	Modo 1 - [Hz]	Modo 2 - [Hz]
Sem Modificação	997,00	1373,00
Primeiro	1036,00	1464,00
Segundo	1074,00	1378,00
Terceiro	1184,00	1419,00

Fonte: produção do próprio autor.

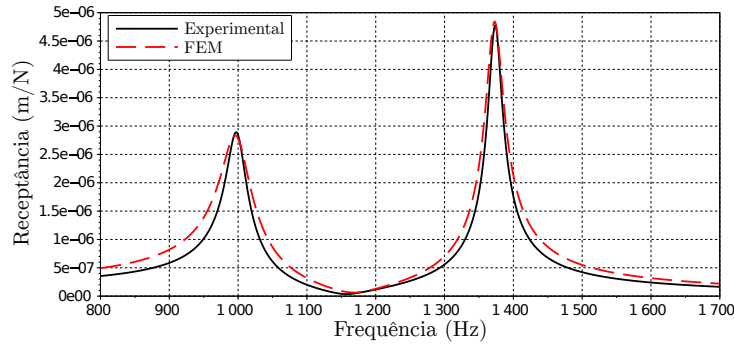
Para o primeiro modo de vibrar da estrutura (modo de flexão), é visível uma relação direta do aumento da frequência natural com o avanço da modificação sobre a placa. Isto significa que a redução da componente de rigidez da placa, que relaciona módulo de elasticidade e espessura, exerce mais influência sobre a estrutura do que a componente de inércia (redução da massa). Já para o segundo modo de vibração da placa (modo de torção) está relação não é tão direta, apresentando um aumento da frequência natural após a o primeiro estágio de modificação em relação a placa sem modificação, diminuindo levemente para o segundo estágio e voltando a subir após a modificação ter sido aplicada em todo o comprimento da placa (terceiro estágio).

## 5.2.2 Análise Dinâmica - *FRF*s Numéricas (*FEM*)

Em seguida, localizando no modelo de *FEM* os nós da malha referentes aos pontos discretos da análise experimental e considerando o percurso da ferramenta de corte sobre a placa, foi possível calcular as *FRF*s utilizando o Método dos Elementos Finitos. Primeiramente, na Figura 5.12 é apresentada uma comparação entre as Funções Resposta em Frequência 49FZ49UZ numérica e 1FZ1UZ experimental, referente a estrutura original

(sem modificação). O termo 49FZ49UZ refere-se a *FRF* obtida da medição da resposta no nó 49 da malha numérica na direção Z submetido a uma excitação nos mesmos nó e direção. A mesma notação será adotada para as demais comparações nesta subsecção.

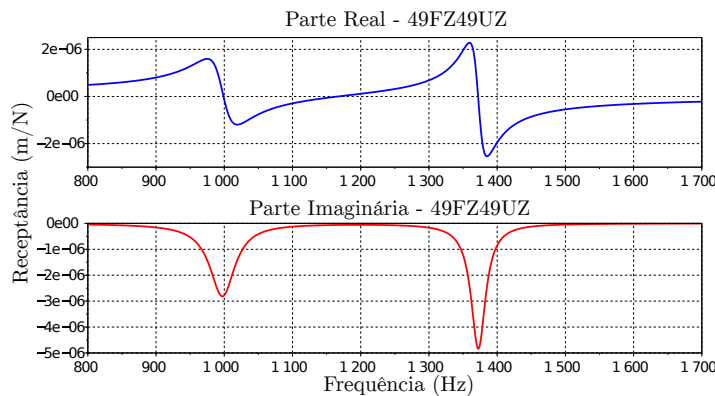
Figura 5.12: Experimental vrs. *FEM* - Estrutural original.



Fonte: produção do próprio autor.

Da Figura 5.12 é visível uma fiel representatividade da Função Resposta em Frequência experimental pelo modelo numérico. Contudo, isto já era esperado uma vez que o modelo de Elementos Finitos foi ajustado para melhor representar os dados experimentais. As parcelas, real e imaginária da mesma Função Resposta em Frequência numérica 49FZ49UZ, são apresentadas na Figura 5.13.

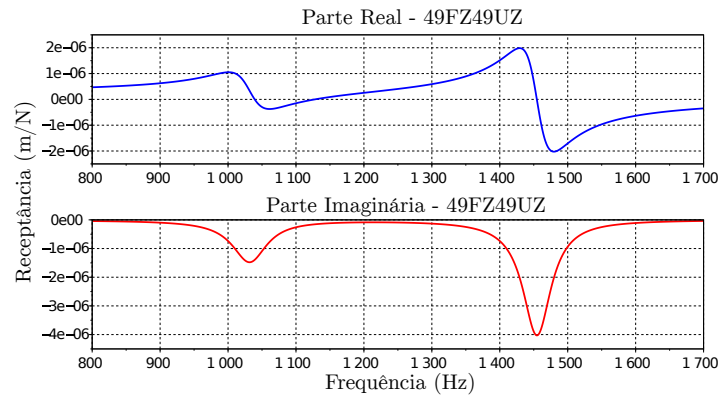
Figura 5.13: *FRF* Numérica (*FEM*) - Estrutura original.



Fonte: produção do próprio autor.

Em seguida, são apresentadas as parcelas real e imaginária das *FRF*s obtidas através do Método dos Elementos Finitos para cada um dos três estágios de aplicação da modificação. A Figura 5.14 apresenta a Função Resposta em Frequência numérica no nó 49FZ49UZ (nó referente ao ponto 1FZ1UZ experimental), para o primeiro estágio de modificação (55 mm de usinagem). A Figura 5.15 apresenta o modelo da placa utilizado para este procedimento.

Figura 5.14: *FRF* Numérica (*FEM*) - Primeiro estágio de modificação.



Fonte: produção do próprio autor.

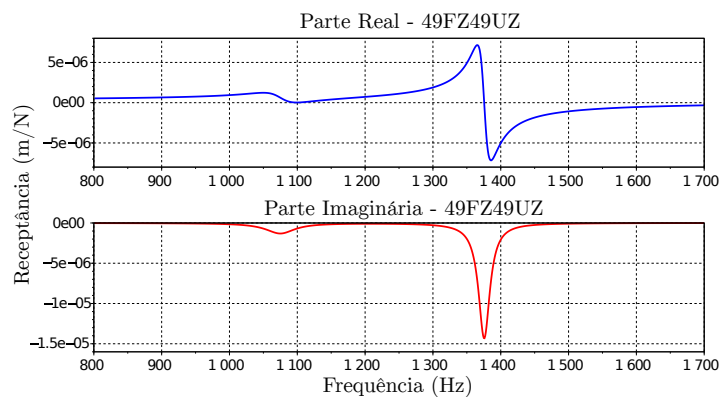
Figura 5.15: Relação malha numérica, pontos experimentais - Primeiro estágio.



Fonte: produção do próprio autor.

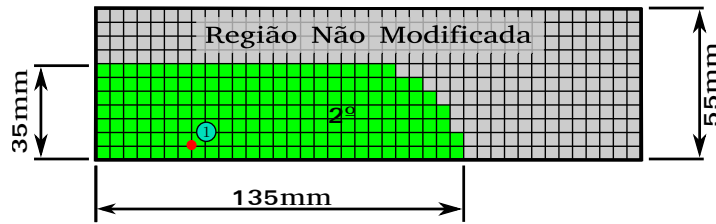
Na Figura 5.16 é apresentada a Função Resposta em Freqüência (real e imaginária) obtida numericamente para o segundo estágio de modificação (135 mm de usinagem). Os nós da malha do Modelo de Elementos Finitos onde foi aplicada a excitação e adquirida a resposta da *FRF*, coincidentes com os pontos experimentais, e o modelo utilizado, são descritos na Figura 5.17.

Figura 5.16: *FRF* Numéricas (*FEM*) - Segundo estágio de modificação.



Fonte: produção do próprio autor.

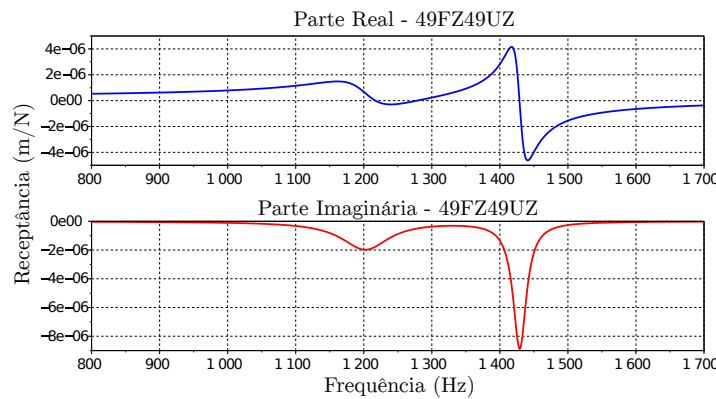
Figura 5.17: Relação malha numérica, pontos experimentais - Segundo estágio.



Fonte: produção do próprio autor.

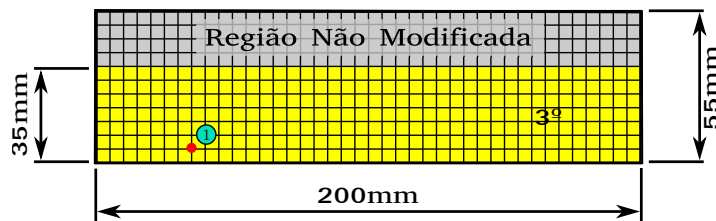
Encerrando a análise utilizando o *FEM*, na Figura 5.18 é apresentada a *FRF* 49FZ49UZ, referente ao terceiro estágio de modificação, onde, na Figura 5.19 é apresentada a modificação aplicada para este último estágio, e também a correlação do ponto experimental com o referido nó da malha numérica.

Figura 5.18: *FRF* Numéricas (*FEM*) - Terceiro estágio de modificação.



Fonte: produção do próprio autor.

Figura 5.19: Relação malha numérica, pontos experimentais - Terceiro estágio.



Fonte: produção do próprio autor.

Uma comparação, calculando o erro relativo percentual <sup>2</sup>, entre as frequências naturais lidas nas Funções Resposta em Frequência 1FZ1UZ experimental e 49FZ49UZ

$${}^2_{erro} = \frac{fn_{exp} - fn_{num}}{fn_{exp}} * 100$$

numérica da placa a medida que os estágios de modificação vão sendo aplicados é apresentado nas Tabelas 5.5, referente ao primeiro modo de flexão e 5.6, referente ao primeiro modo de torção.

Tabela 5.5: Comparação do primeiro modo de flexão numérico e experimental ao longo dos estágios de modificação.

<b>Estágio de Modificação</b>	<b>Frequência Natural [Hz] - Experimental</b>	<b>Frequência Natural [Hz] - <i>FEM</i></b>	<b>Erro Relativo [%]</b>
Sem Modificação	997,00	997,00	0,00
Primeiro	1036,00	1026,00	0,97
Segundo	1074,00	1077,00	0,28
Terceiro	1184,00	1185,00	0,10

Fonte: produção do próprio autor.

Tabela 5.6: Comparação do primeiro modo de torção numérico e experimental ao longo dos estágios de modificação.

<b>Estágio de Modificação</b>	<b>Frequência Natural [Hz] - Experimental</b>	<b>Frequência Natural [Hz] - <i>FEM</i></b>	<b>Erro Relativo [%]</b>
Sem Modificação	1373,00	1374,00	0,08
Primeiro	1464,00	1455,00	0,62
Segundo	1378,00	1374,00	0,29
Terceiro	1419,00	1410,00	0,64

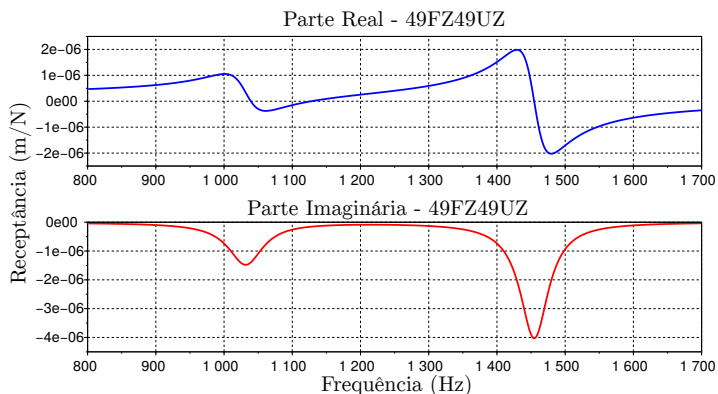
Fonte: produção do próprio autor.

Das Tabelas 5.5 e 5.6 é possível observar uma ótima representatividade das frequências naturais experimentais pelo modelo numérico, onde o maior erro apresentado foi 0,97% para o primeiro modo de flexão da placa no primeiro estágio de modificação. Contudo, ainda pode ser considerado uma diferença bastante modesta, pois este erro representa uma variação de 10Hz, podendo ser considerado um excelente resultado.

### 5.2.3 Análise Dinâmica - *FRF*s Método Proposto

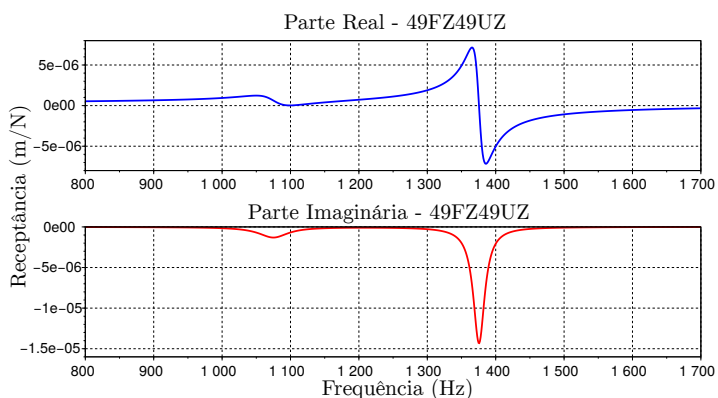
No mesmo nó da malha (nó 49) referente ao ponto discreto da análise experimental (ponto 1) descrito na subseção anterior, foram obtidas as *FRF*s por meio do método aqui proposto, conforme descrito na Seção 3.3.5. Nas Figuras 5.20, 5.21 e 5.22 são apresentadas as parcelas real e imaginária das *FRF*s para o primeiro, segundo e terceiro estágios de modificação, cujos modelos são os apresentados nas Figuras 5.15, 5.17 e 5.19.

Figura 5.20: *FRF* Método proposto - Primeiro estágio de modificação.



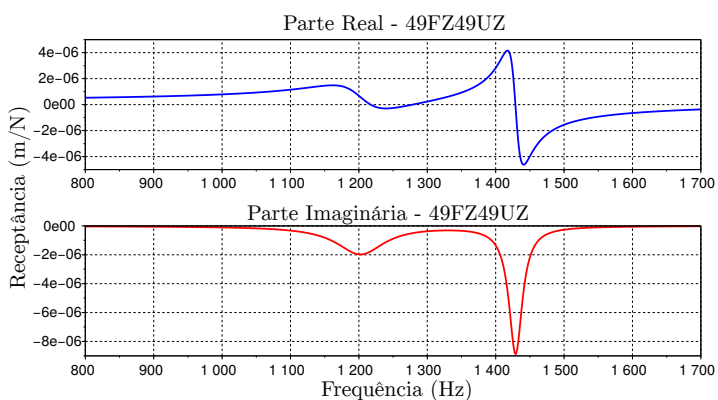
Fonte: produção do próprio autor.

Figura 5.21: *FRF* Método proposto - Segundo estágio de modificação.



Fonte: produção do próprio autor.

Figura 5.22: *FRF* Método proposto - Terceiro estágio de modificação.



Fonte: produção do próprio autor.

A mesma comparação entre as frequências naturais realizada na subseção anterior é feita para os resultados obtidos pelo método proposto. Esta comparação é apresentada

nas Tabelas 5.7 referente ao primeiro modo de flexão, e 5.8 referente ao primeiro modo de torção.

Tabela 5.7: Comparação do primeiro modo de flexão proposto e experimental ao longo dos estágios de modificação.

<b>Estágio de Modificação</b>	<b>Frequência Natural [Hz] - Experimental</b>	<b>Frequência Natural [Hz] - Proposto</b>	<b>Erro Relativo [%]</b>
Sem Modificação	997,00	-	-
Primeiro	1036,00	1026,00	0,97
Segundo	1074,00	1077,00	0,28
Terceiro	1184,00	1185,00	0,10

Fonte: produção do próprio autor.

Tabela 5.8: Comparação do primeiro modo de torção proposto e experimental ao longo dos estágios de modificação.

<b>Estágio de Modificação</b>	<b>Frequência Natural [Hz] - Experimental</b>	<b>Frequência Natural [Hz] - Proposto</b>	<b>Erro Relativo [%]</b>
Sem Modificação	1373,00	-	-
Primeiro	1464,00	1455,00	0,62
Segundo	1378,00	1374,00	0,29
Terceiro	1419,00	1410,00	0,64

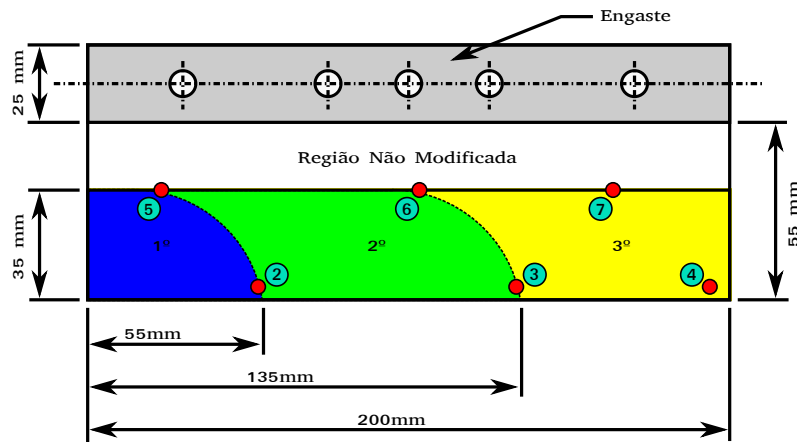
Fonte: produção do próprio autor.

A comparação das frequências naturais obtidas da leitura das Funções Resposta em Frequência experimentais e previstas pelo método proposto (Tabelas 5.7 e 5.8), a exemplo dos resultados obtidos através do modelo *FEM*, mostra um erro relativo máximo de 0,97% para o primeiro modo no primeiro estágio de modificação, o que representa uma diferença absoluta de 10 Hz. Novamente, são consideradas diferenças muito modestas, podendo ser considerada uma excelente previsão das *FRFs*.

### 5.3 Comparações

A fim de avaliar a efetividade do modelo proposto foram comparadas as Funções Resposta em Frequência em pontos discretos da estrutura conforme demonstra a Figura 5.23. Estas *FRFs* foram obtidas por meio da análise experimental, análise numérica (Método dos Elementos Finitos) e através do modelo de previsão proposto neste trabalho.

Figura 5.23: Locais de medição e estágios de modificação.



Fonte: produção do próprio autor.

Desta forma, foram definidos para comparação os postos na interface de cada um dos estágios de modificação, ou seja, para o primeiro estágio os pontos analisados foram 2 e 5, para o segundo estágio os pontos foram 3 e 6, e para o terceiro estágio os pontos considerados foram 4 e 7. Contudo, se faz necessário correlacionar estes pontos experimentais com os referidos nós da malha numérica utilizada. Na tabela 5.9 são apresentados cada um dos pontos experimentais e os seus referidos nós da malha numérica.

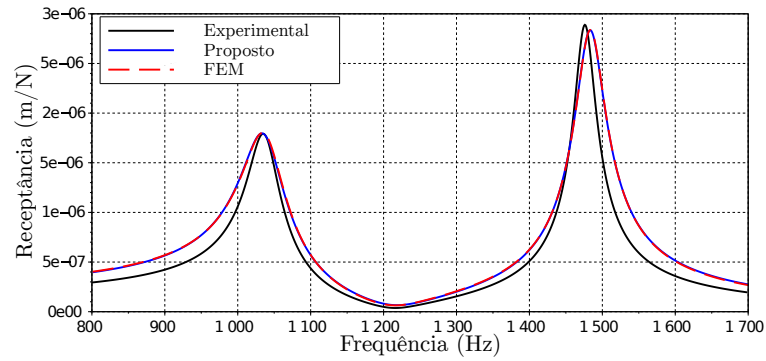
Tabela 5.9: Pontos experimentais e nós da malha numérica para cada estágio de modificação.

Estágio de Modificação	Pontos Experimentais	Nós da Malha Numérica
Primeiro	2	53
	5	293
Segundo	3	69
	6	309
Terceiro	4	81
	7	321

Fonte: produção do próprio autor.

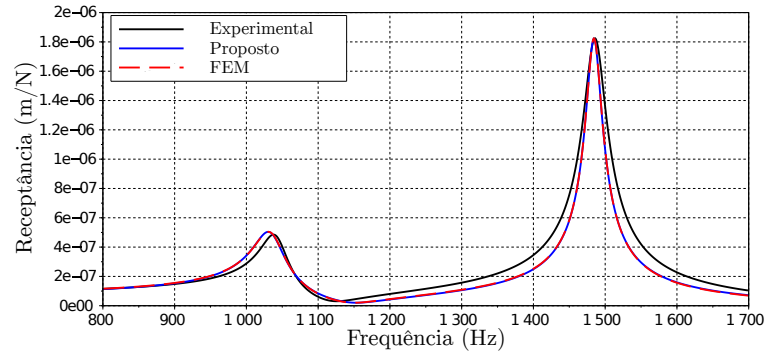
Com isso, é possível apresentar as *FRF*s para o primeiro estágio de modificação. Primeiramente, as Figuras 5.24 e 5.25 trazem a comparação da magnitude entre as *FRF*s obtidas experimentalmente, numericamente e pelo método proposto. Os termos 2FZ2UZ e 5FZ5UZ referem-se as *FRF*s obtidas das medições das respostas nos pontos experimentais 2 e 5 na direção Z submetido a excitações nos mesmos pontos e direção. Por facilidade, será adotada a nomenclatura experimental para todas as *FRF*s desta seção.

Figura 5.24: Magnitude 2FZ2UZ - Primeiro estágio de modificação.



Fonte: produção do próprio autor.

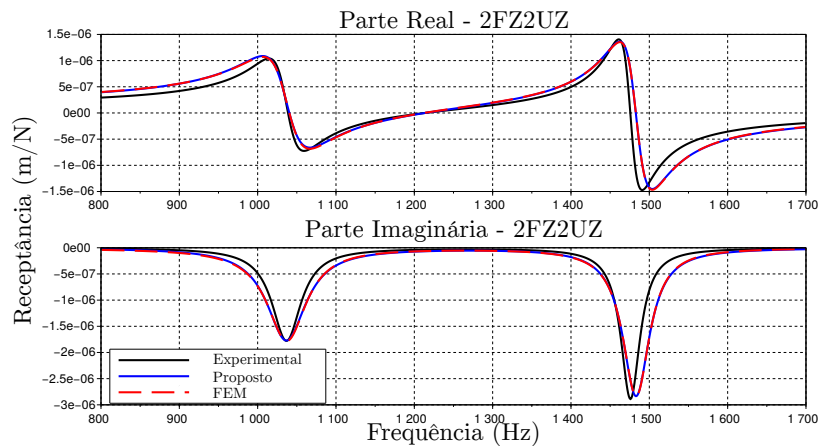
Figura 5.25: Magnitude 5FZ5UZ - Primeiro estágio de modificação.



Fonte: produção do próprio autor.

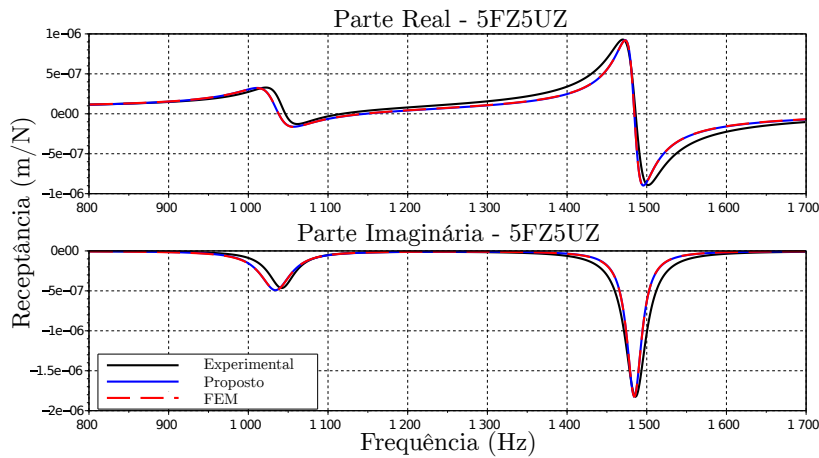
Nas Figuras 5.26 e 5.27, são comparadas as parcelas real e imaginária das mesmas *FRFs* da interface considerando o mesmo estágio de modificação.

Figura 5.26: Parcelas real e imaginária 2FZ2UZ - Primeiro estágio de modificação.



Fonte: produção do próprio autor.

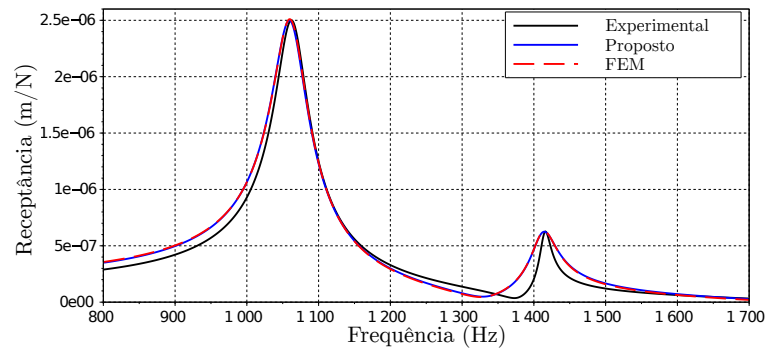
Figura 5.27: Parcelas real e imaginária 5FZ5UZ - Primeiro estágio de modificação.



Fonte: produção do próprio autor.

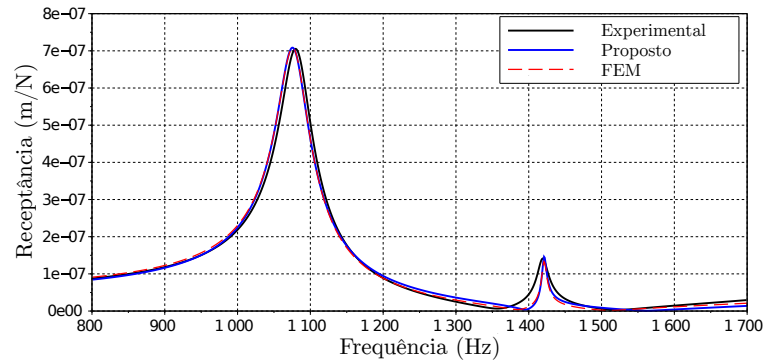
Das Funções Resposta em Frequência obtidas nos pontos referentes ao primeiro estágio de modificação (pontos 2 e 5) é visto uma boa representatividade das *FRF*s experimentais tanto pelo modelo de Elementos Finitos quanto para o método proposto. Considerando inicialmente uma comparação entre os dados obtidas pelo método proposto e pelo Método dos Elementos Finitos é visto uma altíssima correlação entre as curvas, onde visualmente nenhuma diferença entre ambas Funções Resposta em Frequência é observada. Quando comparadas as Funções Resposta em Frequência de vias numéricas (Método dos Elementos Finitos e método proposto) com as obtidas experimentalmente, a representatividade das previsões pode ser considerada muito boa, uma vez que as curvas aproximam-se consideravelmente das Funções Resposta em Frequência experimentais. Em seguida, analisando o primeiro modo de vibração, os picos das amplitudes dos dois modelos apresentam valores levemente maiores que os experimentais, porém visualmente idênticos entre si. A mesma análise pode ser feita considerando o eixo da frequência, contudo o valor da frequência natural obtida experimentalmente é levemente maior que os obtidos pelo Método dos Elementos Finitos e pelo método proposto, cerca de 0,40% (média dos dois pontos). Considerando o segundo modo de vibração, as Funções Resposta em Frequência numéricas (Método dos Elementos Finitos e método proposto) para o ponto 5FZ5UZ apresentam uma menor diferença quando comparadas com as Funções Resposta em Frequência experimentais, visualmente idênticas tanto para os picos de amplitude quanto para a frequência natural. Já para a Função Resposta em Frequência obtida no ponto 2FZ2UZ é visível um pequeno deslocamento da frequência natural, sendo as obtidas por via numérica 9 Hz maiores que a experimental, cerca de 0,61%. Em seguida, as Figuras 5.28 e 5.29 trazem a comparação da magnitude entre as Funções Resposta em Frequência obtidas para o segundo estágio de modificação, ou seja, nos pontos 3 e 6.

Figura 5.28: Magnitude 3FZ3UZ - Segundo estágio de modificação.



Fonte: produção do próprio autor.

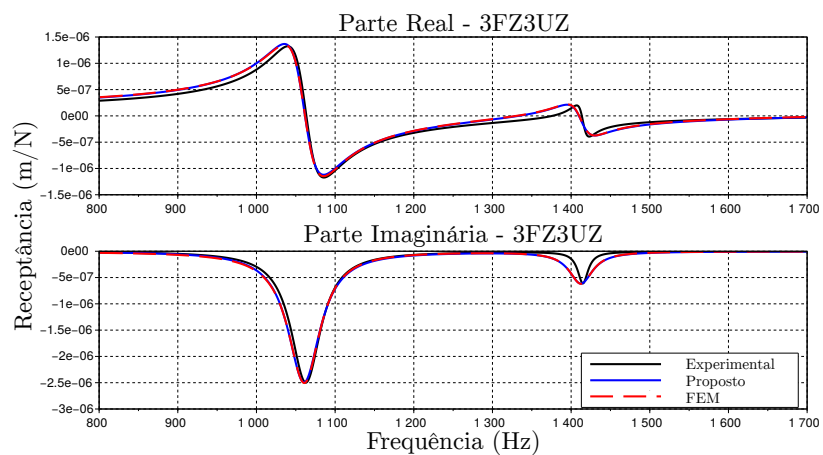
Figura 5.29: Magnitude 6FZ6UZ - Segundo estágio de modificação.



Fonte: produção do próprio autor.

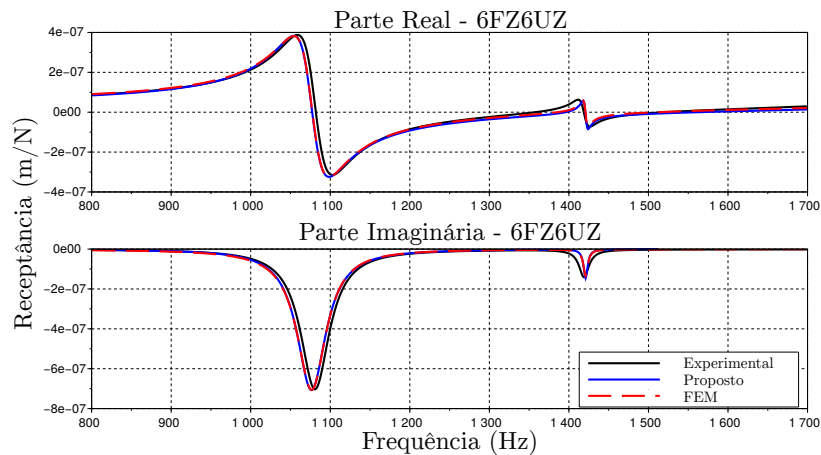
A comparação das parcelas real e imaginário das *FRF*s nos pontos 3 e 6 referentes ao segundo estágio de modificação são apresentados nas Figuras 5.30 e 5.31.

Figura 5.30: Parcelas real e imaginária 3FZ3UZ - Segundo estágio de modificação.



Fonte: produção do próprio autor.

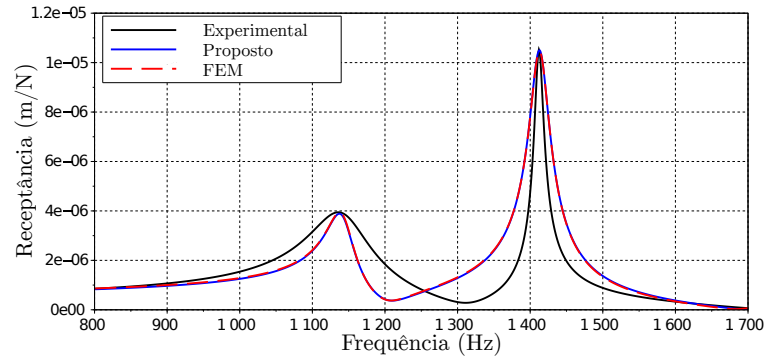
Figura 5.31: Parcelas real e imaginária 6FZ6UZ - Segundo estágio de modificação.



Fonte: produção do próprio autor.

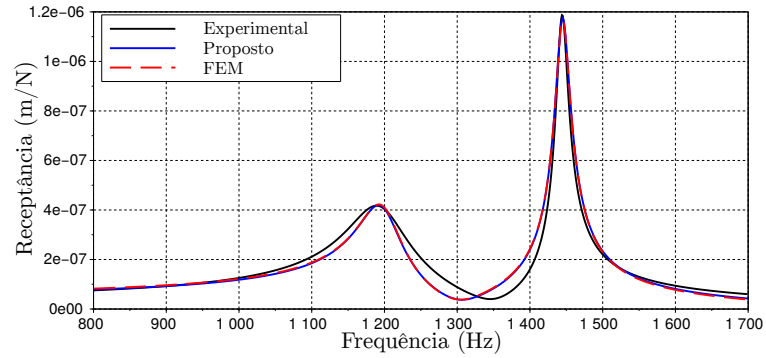
A exemplo das Funções Resposta em Freqüência obtidas nos pontos 2 e 5 (primeiro estágio), as Funções Resposta em Freqüência obtidas para o segundo estágio de modificação (pontos 3 e 6) podem ser consideradas uma excelente previsão das Funções Resposta em Freqüência experimentais, visto que, além da proximidade no formato das curvas, as frequências naturais e as amplitudes lidas nos picos de ressonância dos modelos numéricos (Método dos Elementos Finitos e método proposto) tem grande correlação com os dados experimentais. Para o primeiro modo de vibração, as duas Funções Resposta em Freqüência obtidas (3FZ3UZ e 6FZ6UZ) apresentam comportamentos diferentes, sendo que, quando observado o pico de amplitude das Funções Resposta em Freqüência numéricas (Método dos Elementos Finitos e método proposto) no ponto 6, suas magnitudes são levemente maiores que as obtidas por via experimental, onde, para a Função Resposta em Freqüência 3FZ3UZ estas magnitudes nos picos de ressonância são praticamente idênticas. Considerando em seguida o eixo da frequência (onde lê-se as frequências naturais de vibração da estrutura), para a Função Resposta em Freqüência 6FZ6UZ os dados numéricos (Método dos Elementos Finitos e método proposto) são 13 Hz maiores que os dados obtidos por via experimental (erro relativo de 1,23%), e para o ponto 3, a frequência natural obtida experimentalmente é 9 Hz maior que as de via numérica (Método dos Elementos Finitos e método proposto). Na análise do segundo modo de vibração, é observado que todas as Funções Resposta em Freqüência apresentam praticamente as mesmas amplitudes nos picos de ressonância. O mesmo, podendo ser considerado para a comparação das frequências naturais obtidas pelos três métodos. Ainda, é importante salientar, que as curvas obtidas pelo Método dos Elementos Finitos e pelo método proposto podem ser consideradas visualmente idênticas. De mesma forma, são apresentadas nas Figuras 5.32 e 5.33 as magnitudes nos pontos 4 e 7 para terceiro estágio de modificação.

Figura 5.32: Magnitude 4FZ4UZ - Terceiro estágio de modificação.



Fonte: produção do próprio autor.

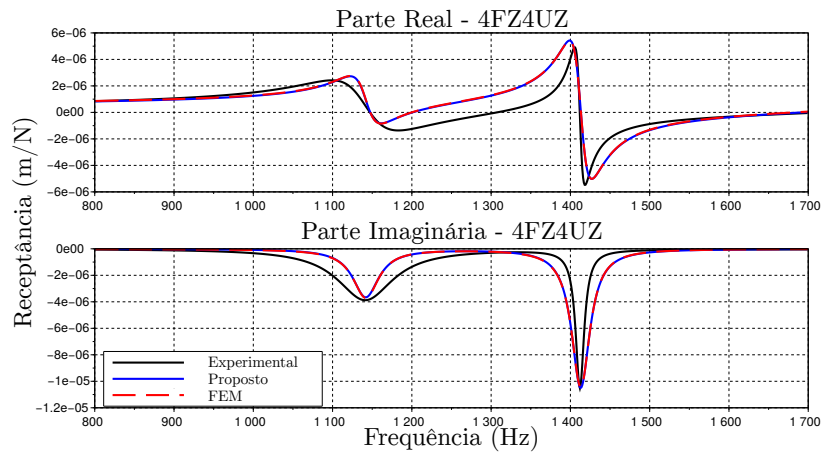
Figura 5.33: Magnitude 7FZ7UZ - Terceiro estágio de modificação.



Fonte: produção do próprio autor.

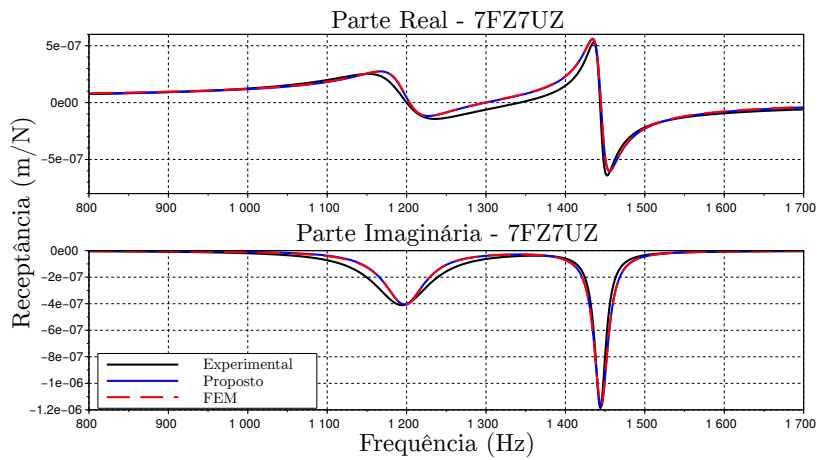
Por fim, são apresentadas nas Figuras 5.34 e 5.35 a comparação das parcelas real e imaginária das *FRF*s nos pontos referentes ao terceiro estágio de modificação.

Figura 5.34: Parcelas real e imaginária 4FZ4UZ - Terceiro estágio de modificação.



Fonte: produção do próprio autor.

Figura 5.35: Parcelas real e imaginária 7FZ7UZ - Terceiro estágio de modificação.

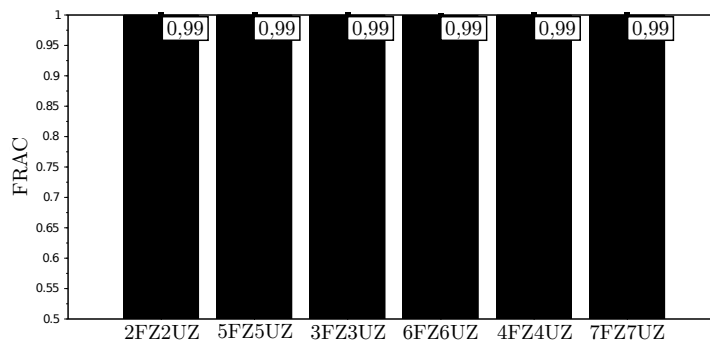


Fonte: produção do próprio autor.

Considerando inicialmente uma comparação dos dados obtidos pelo método proposto e pelo Método dos Elementos Finitos, novamente é possível afirmar, que os resultados obtidos são praticamente análogos. Na comparação dos dados numéricos com os obtidos experimentalmente (4FZ4UZ e 7FZ7UZ), é visível que tanto para o primeiro, quanto para o segundo modo vibração as magnitudes dos picos de ressonância são praticamente idênticas. Já para o eixo da frequência, e considerando as *FRF*s obtidas no ponto 4, os dados numéricos são cerca de 9Hz maiores que os experimentais (erro de 0,80%) para o primeiro modo e 6 Hz para o segundo. Onde, para a Função Resposta em Frequência 7FZ7UZ, este comportamento é inverso, sendo as *FRF*s numéricas (*FEM* e método proposto) aproximadamente 2 Hz menores para o primeiro modo, e 8Hz menores para o segundo modo de vibração, quando comparadas com as de via experimental.

Para verificar a real correlação das *FRF*s, o Critério de Correlação de *FRAC* (*Frequency Response Assurance Criterion*) foi calculado. Na Figura 5.36 são apresentados os resultados do *FRAC* comparado as *FRF*s obtidas pelo método proposto e *FEM*.

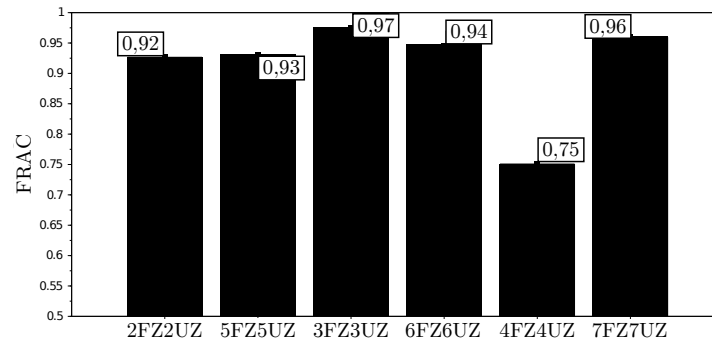
Figura 5.36: *FRAC* método proposto versus *FEM*.



Fonte: produção do próprio autor.

Os resultados do *FRAC* para a comparação do método proposto com as *FRF*s do modelo de *FEM* apresenta uma excelente correlação entre as curvas, uma vez que todos os índices obtidos foram 0,99. Em seguida, na Figura 5.37 são apresentados os resultados do *FRAC* para os dados obtidos pelo método proposto, comparados com os de via experimental.

Figura 5.37: *FRAC* método proposto versus experimental.



Fonte: produção do próprio autor.

Para a comparação do método proposto com os dados experimentais, os resultados do *FRAC* podem ser considerados ótimos. Índices acima de 0,93 foram obtidos para a maioria das curvas, exceto para a *FRF* obtida no ponto 4 do terceiro estágio de modificação (4FZ4UZ), onde o índice alcançado foi 0,75. Isto pode ser considerado uma incerteza do dado experimental, uma vez que as demais *FRF*s comparadas apresentaram excelentes resultados.

Sumarizando os resultados discutidos acima, é ponderável afirmar, considerando como dados de referências os resultados experimentais, que ambos os modelos representam de forma fiel as curvas obtidas experimentalmente, onde, o maior erro encontrado para os métodos foi de 1,23% obtido para o segundo estágio de modificação. Ainda, considerando o índice *FRAC*, o método proposto neste trabalho pode ser considerado uma excelente representabilidade tanto das curvas experimentais, quanto das curvas obtidas pelo modelo de *FEM*, devido aos índices obtidos, em sua grande maioria, serem acima de 0,90, valor considerado ideal.



## Capítulo 6

# Conclusões e Perspectivas de Trabalhos Futuros

A previsão do comportamento dinâmico durante a usinagem é importante para prever os Diagramas de Lóbulos de Estabilidade, de modo que se possa escolher a condição de corte de máxima produção sem o surgimento de vibrações regenerativas.

O objetivo principal deste trabalho foi o desenvolvimento de uma metodologia capaz de prever, no domínio da frequência, o comportamento dinâmico de uma placa de parede fina, que está sendo submetida a modificações estruturais por meio da remoção de material através do processo de fresamento, utilizando os conceitos do Método dos Elementos Finitos, Redução de Ordem de Modelo e Mudança Estrutural. Este objetivo se justifica na usinagem deste componentes, onde a rigidez e a massa da placa são modificadas no decorrer do processo, e por consequência, sua resposta dinâmica sofre alterações. Estas variações na resposta dinâmica da estrutura são um dos principais causadores de limitações de produtividade deste processo produtivo, causando incertezas na definição dos parâmetros de trabalho do fresamento.

A conclusão inicial do trabalho, está relacionada as modificações estruturais aplicadas a placa de parede fina, resultado da taxa de remoção de material e do posicionamento da ferramenta de corte sobre a placa, que alteram sua massa e rigidez e por conseguinte a característica dinâmica do sistema, que resulta em comportamentos distintos para os dois modos de vibração analisados, sendo que, para o primeiro modo (modo de flexão) é observado um aumento da frequência após a aplicação de cada modificação, relação esta, não tão direta para o segundo modo de vibração (modo de torção), apresentando um aumento da frequência natural após a o primeiro estágio de modificação em relação a placa sem modificação, diminuindo levemente para o segundo estágio e voltando a subir após a modificação ter sido aplicada em todo o comprimento da placa (terceiro estágio). Isto se dá principalmente devido a forma com que cada modo se comporta ao ser excitado em sua frequência natural, ou seja, devido ao deslocamento modal associado a cada um dos modos de vibração.

Uma segunda conclusão contempla o modelo de elementos finitos aqui estudado. Onde, para compor este modelo três variações de elementos de casca do *ABAQUS 6.12* foram avaliados (*S4*, *S4R* e *S8R*). Primeiramente, a análise de refino de malha aplicada demonstra que o elemento quadrático (*S8R*) apresentam uma convergência consideravelmente mais acelerada quando comparado com os elementos lineares *S4* e *S4R*. Em seguida, uma análise considerando a simplificação de simetria deste tipo de elemento foi estudada, onde uma pequena influência foi observada. Além disto, o estudo do truncamento modal foi aplicado para avaliar seu impacto na obtenção das Funções Resposta em Frequência da estrutura, o qual apresentou uma estabilidade satisfatória com o truncamento da série no décimo quinto modo.

E por fim, considerando o método de previsão do comportamento dinâmico da mudança estrutural (objetivo principal do estudo), os resultados obtidos podem ser considerados excelentes, sendo o maior erro relativo encontrado na comparação dos valores das frequências naturais lidas nas *FRF*s obtida pelo método proposto e por via experimental é de 1,23%. Erro de mesma magnitude ao obtido pelo Método dos Elementos Finitos. Na comparação dos resultados obtidos pelo método proposto e pelo modelo de *FEM* os resultados podem ser considerados virtualmente idênticos. Analizando o critério de correlação *FRAC*, o menor índice obtido para o método proposto em relação a análise experimental é de 0,75. Entretanto, este resultado pode ser considerado um incerteza do resultado experimental, uma vez, que as demais comparações do *FRAC* apresentaram índices acima de 0,93. Em análise ao *FRAC* das *FRF* obtidas pelo método proposto confrontadas com as obtidas pelo modelo de *FEM*, os índices obtidos para todas as *FRF* foram superiores a 0,99, sendo considerado um excelente resultado. Com isso, o método de previsão aqui proposto demonstra ser uma ferramenta efetiva para prever o comportamento dinâmica de placas de parede fina que estão sendo submetidas a mudança estrutural, tendo como principal vantagem sobre o Método de Elementos Finitos o ganho na agilidade na obtenção dos resultados, devido principalmente a ordem reduzida do modelo e a atualização das matrizes de Massa, Amortecimento e Rigidez para cada estágio de modificação.

Como perspectivas futuras, sugere-se a possibilidade do estudo de um método previsão das variações da característica dinâmica utilizando outras geometrias de maior complexidade e ainda o estudo destas previsões utilizando métodos de integração no domínio do tempo, comparando com o método no domínio da frequência aqui proposto.

# Bibliografia

ABAQUS-6.12-THEORY-GUIDE, S. *Abaqus 6.12 Theory Guide - Section 3.6.5*. 2017. <<http://50.16.225.63/v6.14/books/stm/default.htm?startat=ch03s02ath62.html>>. Acessado: 15-11-2017.

ALAN, S.; BUDAK, E.; ÖZGÜVEN, H. N. Analytical prediction of part dynamics for machining stability analysis. *International Journal of Automation Technology*, Fuji Technology Press, v. 4, n. 3, p. 259–267, 2010.

ALLEMANG, R. J. The modal assurance criterion—twenty years of use and abuse. *Sound and vibration*, v. 37, n. 8, p. 14–23, 2003.

ALTINTAS, Y. *Manufacturing automation: metal cutting mechanics, machine tool vibrations, and CNC design*. [S.l.]: Cambridge university press, 2012.

ALTINTAŞ, Y.; BUDAK, E. Analytical prediction of stability lobes in milling. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, Elsevier, v. 44, n. 1, p. 357–362, 1995.

ALTINTAS, Y.; BUDAK, E. Analytical prediction of chatter stability in milling—part i: general formulation. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v. 120, p. 22–30, 1998.

ALTINTAS, Y.; BUDAK, E. Analytical prediction of chatter stability in milling—part ii: application of the general formulation to common milling systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v. 120, n. 1, p. 31–36, 1998.

ANDREW, C.; TOBIAS, S. A critical comparison of two current theories of machine tool chatter. *International Journal of Machine Tool Design and Research*, Elsevier, v. 1, n. 4, p. 325–335, 1961.

ARAUJO, A. A. de. *Ajuste de modelos numericos de elementos finitos usando metodos de otimização*. Dissertação (Mestrado), 2007.

ARNOLD, R. Cutting tools research: report of subcommittee on carbide tools: the mechanism of tool vibration in the cutting of steel. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 154, n. 1, p. 261–284, 1946.

BACELAR, J. L. A. Técnicas de ajuste de modelos numéricos com base em resultados experimentais. 2012.

BALACHANDRAN, B.; MAGRAB, E. B. *Vibrações mecânicas*. [S.l.: s.n.], 2011.

BARUCH, M.; ITZHACK, I. Y. B. Optimal weighted orthogonalization of measured modes. *AIAA journal*, v. 16, n. 4, p. 346–351, 1978.

- BATHE, K.-J. *Finite element procedures*. [S.l.]: Klaus-Jurgen Bathe, 2006.
- BERMAN, A.; NAGY, E. Improvement of a large analytical model using test data. *AIAA journal*, v. 21, n. 8, p. 1168–1173, 1983.
- BLEVINS, R. D.; PLUNKETT, R. Formulas for natural frequency and mode shape. *Journal of Applied Mechanics*, v. 47, p. 461, 1980.
- BUDAK, E.; TUNC, L. T. Identification and modeling of process damping in turning and milling using a new approach. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, Elsevier, v. 59, n. 1, p. 403–408, 2010.
- BUDAK, E. et al. Prediction of workpiece dynamics and its effects on chatter stability in milling. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, Elsevier, v. 61, n. 1, p. 339–342, 2012.
- BUDYNAS, R. G.; NISBETT, J. K. *Elementos de máquinas de Shigley*. [S.l.]: AMGH Editora, 2009.
- CHENG, K. *Machining dynamics: fundamentals, applications and practices*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. *Dynamics of structures*. [S.l.]: Computers & Structures, Inc, 2003.
- D’AMBROGIO, W. Some remarks about structural modifications involving additional degrees of freedom. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Academic Press, v. 4, n. 1, p. 95–99, 1990.
- D’AMBROGIO, W.; SESTIERI, A. Coupling theoretical data and translational frfs to perform distributed structural modification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 15, n. 1, p. 157–172, 2001.
- DUARTE, M. L. M.; EWINS, D. J. High-frequency pseudo-mode approximation for high-frequency residual terms. In: SPIE INTERNATIONAL SOCIETY FOR OPTICAL. *PROCEEDINGS-SPIE THE INTERNATIONAL SOCIETY FOR OPTICAL ENGINEERING*. [S.l.], 1996. p. 261–266.
- EWINS, D. J. *Modal testing: theory and practice*. [S.l.]: Research studies press Letchworth, 1984. v. 15.
- FRISWELL, M.; MOTTERSHEAD, J. E. *Finite element model updating in structural dynamics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1995. v. 38.
- FU, Z.-F.; HE, J. *Modal analysis*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2001.
- GHALI, A.; NEVILLE, A.; BROWN, T. G. *Structural analysis: a unified classical and matrix approach*. [S.l.]: Crc Press, 2003.
- GRAHAM, K. S. *Fundamentals of mechanical vibrations*. McGraw-Hill, 2000.
- GUYAN, R. J. Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA journal*, v. 3, n. 2, p. 380–380, 1965.

- HAHN, R. On the theory of regenerative chatter in precision-grinding operations. *TRANS. ASME*, v. 76, p. 593–597, 1954.
- HANG, H.; SHANKAR, K.; LAI, J. Distributed structural dynamics modifications without rotational degrees of freedom. In: *Proceedings of the 25th International Modal Analysis Conference, Orlando, FL, USA*. [S.l.: s.n.], 2007.
- HENNINGER, C.; EBERHARD, P. Analysis of dynamic stability for milling processes with varying workpiece dynamics. *PAMM*, Wiley Online Library, v. 8, n. 1, p. 10367–10368, 2008.
- HEYLEN, W.; AVITABILE, P. Correlation considerations. part 5.(degree of freedom correlation techniques). In: SOCIETY OF PHOTO-OPTICAL INSTRUMENTATION ENGINEERS. *SPIE proceedings series*. [S.l.], 1998. p. 207–214.
- HYPERMILL. *hyperMILL 5AXIS Multiblade*. 2017. <<http://www.johnhart.com.au/software/hypermill-software/hypermill-5axis/multiblade>>. Acessado: 04-11-2017.
- JAISHI, B.; REN, W.-X. Finite element model updating based on eigenvalue and strain energy residuals using multiobjective optimisation technique. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 21, n. 5, p. 2295–2317, 2007.
- KENNEDY, J.; OPTIMIZATION, R. E. P. S. Ieee int. In: *Conf. on Neural Networks*. [S.l.: s.n.], 1995. v. 4.
- KOUTSOVASILIS, P. Model order reduction in structural mechanics. 2009.
- KREYSZIG, E. *Advanced engineering mathematics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010.
- LADEVÈZE, P.; NEDJAR, D.; REYNIER, M. Updating of finite element models using vibration tests. *AIAA journal*, v. 32, n. 7, p. 1485–1491, 1994.
- LU, Y. *Comparison of finite element method and modal analysis of violin top plate*. Tese (Doutorado) — McGill University, 2013.
- MAIA, N.; SILVA, J. Modal analysis identification techniques. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 359, n. 1778, p. 29–40, 2001.
- MAIA, N. M. M.; SILVA, J. M. M. e. *Theoretical and experimental modal analysis*. [S.l.]: Research Studies Press, 1997.
- MASOTTI, D. *Comparação de métodos de determinação do amortecimento estrutural através de técnicas de ajuste de curvas de funções resposta em frequência*. Dissertação (Mestrado), 2013.
- MEIROVITCH, L. *Analytical methods in vibration*. [S.l.]: Macmillan, New York, 1967. v. 16.
- MERRITT, H. Theory of self-excited machine-tool chatter: Contribution to machine-tool chatter research—. *Journal of engineering for industry*, American Society of Mechanical Engineers, v. 87, n. 4, p. 447–454, 1965.

- MINIS, I.; YANUSHEVSKY, R. A new theoretical approach for the prediction of machine tool chatter in milling. *Journal of engineering for industry*, American Society of Mechanical Engineers, v. 115, n. 1, p. 1–8, 1993.
- MOTTERSHEAD, J.; FRISWELL, M. Model updating in structural dynamics: a survey. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 167, n. 2, p. 347–375, 1993.
- MOTTERSHEAD, J. et al. Geometric parameters for finite element model updating of joints and constraints. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 10, n. 2, p. 171–182, 1996.
- NATKE, H. Updating computational models in the frequency domain based on measured data: a survey. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Elsevier, v. 3, n. 1, p. 28–35, 1988.
- NATKE, H. et al. Properties of various residuals within updating of mathematical models. *Inverse Problems in Engineering*, Taylor & Francis, v. 1, n. 4, p. 329–348, 1995.
- OGATA, K.; MAYA, P. Á.; LEONARDI, F. *Engenharia de controle moderno*. [S.l.]: Prentice Hall, 2003.
- OPITZ, H. *Chatter behavior of heavy machine tools*. [S.l.], 1968.
- ÖZGÜVEN, H. N. Structural modifications using frequency response functions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 4, n. 1, p. 53–63, 1990.
- O'CALLAHAN, J.; AVITABILE, P.; RIEMER, R. System equivalent reduction expansion process (serep). In: UNION COLLEGE SCHNECTADY, NY. *Proceedings of the 7th international modal analysis conference*. [S.l.], 1989. v. 1, p. 29–37.
- PASTOR, M.; BINDA, M.; HARČARIK, T. Modal assurance criterion. *Procedia Engineering*, Elsevier, v. 48, p. 543–548, 2012.
- PEREZ, R.; BEHDINAN, K. Particle swarm approach for structural design optimization. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 85, n. 19, p. 1579–1588, 2007.
- QUINTANA, G.; CIURANA, J. Chatter in machining processes: A review. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Elsevier, v. 51, n. 5, p. 363–376, 2011.
- RADEŞ, M. *Dynamics of machinery*. [S.l.]: Printech, 2009.
- RAO, S. S. *Vibrações mecânicas*. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2009.
- RAYLEIGH, J. W. S. B. *The theory of sound*. [S.l.]: Macmillan, 1896. v. 2.
- SANCHES, F. D. et al. *Identificação simultânea de desbalanceamento e empeno de eixo em rotores através de análise de correlações*. Tese (Doutorado), 2015.
- SCHMITZ, T. L.; SMITH, K. S. *Machining dynamics: frequency response to improved productivity*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008.
- SEGUY, S.; DESSEIN, G.; ARNAUD, L. Surface roughness variation of thin wall milling, related to modal interactions. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Elsevier, v. 48, n. 3, p. 261–274, 2008.

- SESTIERI, A.; D'AMBROGIO, W. A modification method for vibration control of structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 3, n. 3, p. 229–253, 1989.
- SIMULIA, D. S. *Abaqus 6.14 documentation*. [S.l.: s.n.], 2012.
- SRIDHAR, R.; HOHN, R.; LONG, G. General formulation of the milling process equation. *ASME J. Eng. Ind.*, v. 90, n. 2, p. 317–324, 1968.
- TAYLOR, F. W. On the art of cutting metals. New York, The American Society of Mechanical Engineers,[1907], 1907.
- THÉVENOT, V. et al. Influence of material removal on the dynamic behavior of thin-walled structures in peripheral milling. *Machining Science and Technology*, Taylor & Francis, v. 10, n. 3, p. 275–287, 2006.
- TLUSTY, J.; POLACEK, M. The stability of machine tools against self excited vibrations in machining. *International research in production engineering*, p. 465–474, 1963.
- TLUSTY, J.; ZATON, W.; ISMAIL, F. Stability lobes in milling. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, Elsevier, v. 32, n. 1, p. 309–313, 1983.
- TOBIAS, S.; FISHWICK, W. Theory of regenerative machine tool chatter. *The engineer*, v. 205, n. 7, p. 199–203, 1958.
- TUYSUZ, O.; ALTINTAS, Y. Frequency domain updating of thin-walled workpiece dynamics using reduced order substructuring method in machining. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, American Society of Mechanical Engineers, v. 139, n. 7, p. 071013, 2017.
- VALE, A. d. C. *Comparação Entre Modelos Numéricos e Experimentais em Análise Dinâmica de Placas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Porto, Porto, 1996.
- VETRONE, L.; SESTIERI, A.; D'AMBROGIO, W. Predicting the effect of distributed structural modifications by alternative techniques. In: *Proceedings of the 19th International Modal Analysis Conference, Kissimmee, Florida*. [S.l.: s.n.], 2001. p. 1291–1297.
- YANG, T. *Finite element structural analysis*. [S.l.]: Prentice Hall, 1986.
- YANG, Y. et al. Chatter prediction for the peripheral milling of thin-walled workpieces with curved surfaces. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Elsevier, v. 109, p. 36–48, 2016.
- ZIENKIEWICZ, O. C. et al. *The finite element method*. [S.l.]: McGraw-hill London, 1977. v. 3.



# Apêndice A

## Ajuste do Modelo de Elementos Finitos

A motivação para o Ajuste do Modelo de Elemento Finito, surge da necessidade de melhorar a correlação do comportamento dinâmico obtido pelo modelo *FEM* com a resposta adquirida por meio da análise modal experimental. Com o aumento da confiabilidade e confiança na tecnologia de medição, a necessidade de melhorar as representações do *FEM* iniciou o desenvolvimento de algoritmos de ajuste de modelos na década de 1970. Desde então, foram produzidas uma abundância de publicações sobre o assunto e uma boa introdução foi apresentada por Ladevêze et al. (1994). Mais estudos matemáticos e abrangentes foram apresentados por Natke (1988), Mottershead e Friswell (1993), Natke et al. (1995) e Friswell e Mottershead (1995).

O ajuste do modelos de elementos finitos pode ser abordado de três formas distintas:

- Métodos diretos baseados em parâmetros modais;
- Métodos indiretos baseados em parâmetros modais;
- Métodos baseados em funções de resposta em frequência.

Os métodos diretos têm por base um ajuste direto das matrizes de massa e/ou de rigidez, enquanto que os restantes são técnicas iterativas de estimativa de parâmetros.

### A.1 Métodos Diretos Baseados em Parâmetros Modais

Os métodos diretos, baseados em parâmetros modais, fazem o ajuste de modelos de elementos finitos com base na comparação das frequências naturais e das configurações modais numéricas com as experimentais, através de perturbações nas matrizes de massa e/ou rigidez.

Baruch e Itzhack (1978), introduz a base sobre a qual se fundamentam os métodos diretos de ajuste de modelos numéricos. A matriz de massa numérica é considerada

correta, assim, os modos medidos são corrigidos de forma a serem ortogonais à referida matriz. A matriz de rigidez será ajustada, minimizando a norma Euclidiana de uma matriz erro. Os multiplicadores de Lagrange são utilizados para forçar a satisfação da equação dinâmica e a simetria das matrizes de massa e rigidez.

Berman e Nagy (1983), usaram um método similar ao de Baruch e Itzhack (1978). Neste caso, os dados medidos são tomados como referência e as matrizes de massa e rigidez serão ajustadas. A matriz de massa é ajustada para garantir a ortogonalidade dos modos medidos e a matriz de rigidez é calculada usando a mesma equação proposta por Baruch e Itzhack (1978), mas com a matriz de massa ajustada.

Na tabela que segue, são apresentadas as principais vantagens e desvantagens deste método (BACELAR, 2012).

Tabela A.1: Vantagens e desvantagens do método direto baseado em parâmetros modais.

Conceito Base	Ajuste com base na comparação das frequências naturais e das configurações modais experimentais com as numéricas através de perturbações nas matrizes de massa e/ou rigidez.
Vantagens	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ajuste muito preciso;</li> <li>• O modelo ajustado reproduz exatamente os dados;</li> <li>• Não requer quaisquer iterações;</li> <li>• Não necessita de processos de computação complexos.</li> </ul>
Desvantagens	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Necessidade de redução ou expansão do modelo, devido a diferença no número de <i>DOFs</i>;</li> <li>• Requerem modelação e ensaio de qualidade muito alta;</li> <li>• Matrizes do modelo ajustado desprovidas de qualquer significado físico.</li> </ul>

## A.2 Métodos Indiretos Baseados em Parâmetros Modais

O objetivo de qualquer método indireto de ajuste do modelo de elementos finitos com base em parâmetros modais é reduzir os desvios entre os dados obtidos experimentalmente e os previstos numericamente (ARAUJO, 2007).

Define-se como função objetivo a correlação entre dados experimentais e numéricos. No entanto, como os parâmetros ajustados não se relacionam linearmente com os parâmetros modais, o processo de ajuste assume um caráter iterativo, tornando necessário a utilização de algoritmos de otimização de problemas não lineares.

Estes parâmetros de ajuste podem ser, por exemplo, a especificação de rigidezes de molas em uma análise dinâmica numérica, e a função objetivo, a correlação entre o valor das frequências naturais obtidas numericamente com as medidas por uma análise modal experimental.

Segundo Araujo (2007), uma das grandes vantagens destes métodos, é o fato de que eles permitem uma grande variedade de parâmetros a serem atualizados, podendo até serem ponderados através da atribuição de pesos, isto é, serem considerados com maior ou menor prioridade no processo de ajuste. No entanto, na sua principal vantagem, está também uma importante desvantagem, já que a ponderação dos pesos está totalmente dependente da sensibilidade do analista, induzindo assim alguma imprecisão ao processo.

Na tabela que se segue são apresentadas as principais vantagens e desvantagens deste método (BACELAR, 2012).

Tabela A.2: Vantagens e desvantagens do método indireto baseado em parâmetros modais.

Conceito Base	Ajuste com base na comparação e minimização dos desvios das frequências naturais experimentais com as numéricas, através de perturbações em parâmetros estruturais selecionados pelo analista.
Vantagens	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ajustes resultantes são facilmente controláveis devido ao seu significado físico bem definido;</li> <li>• Possibilidade de atribuir pesos aos parâmetros disponíveis para ajuste.</li> </ul>
Desvantagens	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Processo de caráter iterativo que tem como consequência a necessidade de utilização de algoritmos de otimização de problemas não lineares, já que os parâmetros ajustados não se relacionam linearmente com os parâmetros modais;</li> <li>• Atribuição de pesos aos parâmetros selecionados para ajuste depende diretamente da sensibilidade do analista.</li> </ul>

### A.3 Métodos Baseados em Funções de Resposta em Frequência

Os métodos descritos até agora, fazem uso apenas de parâmetros modais, frequências naturais e modos de vibração, para o ajuste do modelo. Como alternativa, quando são realizados ensaios de vibração forçada, as *FRFs* dos resultados experimentais podem ser usadas diretamente no processo de ajuste (BACELAR, 2012).

De acordo com Araujo (2007), estas técnicas têm a vantagem de as *FRFs* conterem informações além das frequências naturais. No entanto, para uma boa correlação entre as *FRFs* obtidas experimentalmente e as previstas numericamente, o amortecimento tem que ser incluído no modelo de elementos finitos. No entanto, sendo o amortecimento da estrutura um parâmetro de difícil modelagem, torna-se necessária a adoção de simplificações como a consideração do amortecimento proporcional.

Na tabela que se segue são apresentadas as principais vantagens e desvantagens deste método (BACELAR, 2012).

Tabela A.3: Vantagens e desvantagens do método baseado em funções de resposta em frequência (*FRFs*).

Conceito Base	Ajuste com base na comparação das <i>FRFs</i> obtidas experimental com as <i>FRFs</i> obtidas numericamente.
Vantagens	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Não necessita algoritmos de identificação dos parâmetros modais da estrutura, sendo as <i>FRFs</i> usadas diretamente para o ajuste;</li> <li>• Maior quantidade de informação sobre o comportamento dinâmico da estrutura ao longo de todo o espectro de frequências.</li> </ul>
Desvantagens	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cálculo computacional excessivo;</li> <li>• Consideração do amortecimento da estrutura no modelo numérico é fundamental para a correlação entre <i>FRFs</i> obtidas experimentalmente e <i>FRFs</i> obtidas numericamente.</li> </ul>

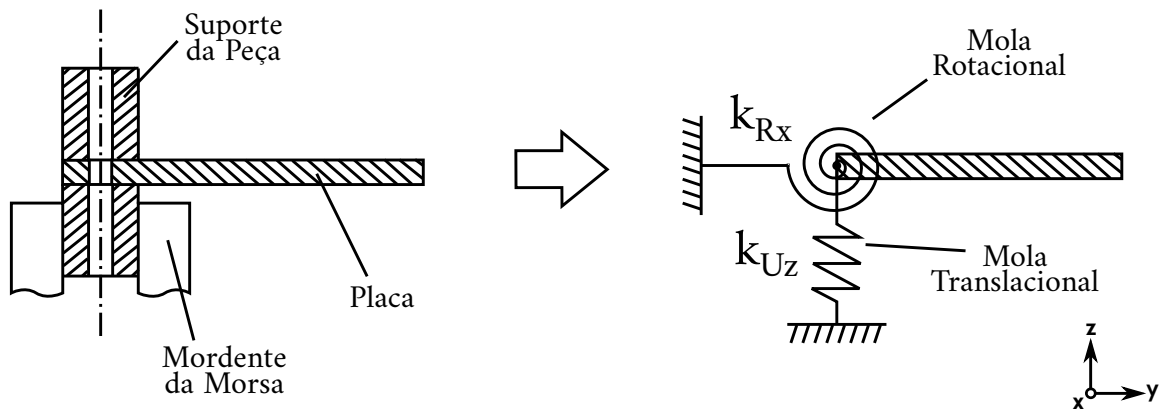
## A.4 Método de Ajuste de Modelo para Elementos de Placa Usando Otimização por Enxame de Partículas

As condições de contorno são uma questão importante de qualquer problema de engenharia numérica ou experimental. Para resolver um problema real, é criado um modelo simplificado, fazendo hipóteses e considerações. No entanto, algumas suposições são por vezes fracas ou definitivamente não verdadeiras, por exemplo, o aperto de uma peça de trabalho em um sistema de fixação, onde a rigidez é considerada infinita. Algumas discrepâncias do modelo em relação a real situação, podem ser oriundas de diferenças de geometria, propriedades de materiais e condições de contorno imprecisas (JAISHI; REN, 2007).

O ajuste de modelo é uma forte ferramenta para adequar o modelo aos resultados empíricos. Basicamente, ele modifica alguns parâmetros no modelo numérico ou analítico para coincidir com os dados experimentais. Usando um modelo de elementos finitos, Mottershead et al. (1996) aplicaram o método de ajuste para modelar adequadamente uma junta soldada em uma placa. Para alcançar a flexibilidade da experiência prática, o parâmetro de atualização escolhido foi o comprimento efetivo da placa.

Neste trabalho, para que os dados experimentais pudessem ser representados de forma adequada, o modelo de *FEM* foi ajustado inserindo molas rotacionais nos graus de liberdade de rotação em torno do eixo X e molas de translacionais nos graus de liberdade de translação no eixo Z dos 41 nós da interfase com o engaste (Figura A.1). Nos demais 4 graus de liberdade restantes de cada um dos nós desta mesma interface, foram aplicadas as condições de contorno de engaste (deslocamento nulo).

Figura A.1: Método de ajuste do modelo.



Fonte: produção do próprio autor.

Uma metodologia para atualizar a rigidez das molas foi utilizado. Onde, um modelo simple de *FEM* foi criado no módulo CAE do *ABAQUS 6.12*, em que são consideradas as rigidezes das molas, conforme descrito na Figura A.1. A contribuição da rigidez de fixação é aplicada diretamente na matriz de rigidez do sistema, que pode ser resumida em

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} & k_{1,6} & \cdots & k_{1,24} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & k_{2,5} & k_{2,6} & \cdots & k_{2,24} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} + k_{Uz} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} & \cdots & k_{3,24} \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} + k_{Rx} & k_{4,5} & k_{4,6} & \cdots & k_{4,24} \\ k_{5,1} & k_{5,2} & k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} & k_{5,6} & \cdots & k_{5,24} \\ k_{6,1} & k_{6,2} & k_{6,3} & k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6} & \cdots & k_{6,24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{24,1} & k_{24,2} & k_{24,3} & k_{24,4} & k_{24,5} & k_{24,6} & \cdots & k_{24,24} \end{bmatrix}, \quad (A.1)$$

onde  $[K]$  é a matriz de rigidez local. Este exemplo é sobre um nó da interface da placa com o engaste, de modo que a rigidez do suporte é adicionada na diagonal da matriz de rigidez, o termo referente a mola de translação na direção Z é descrito como:

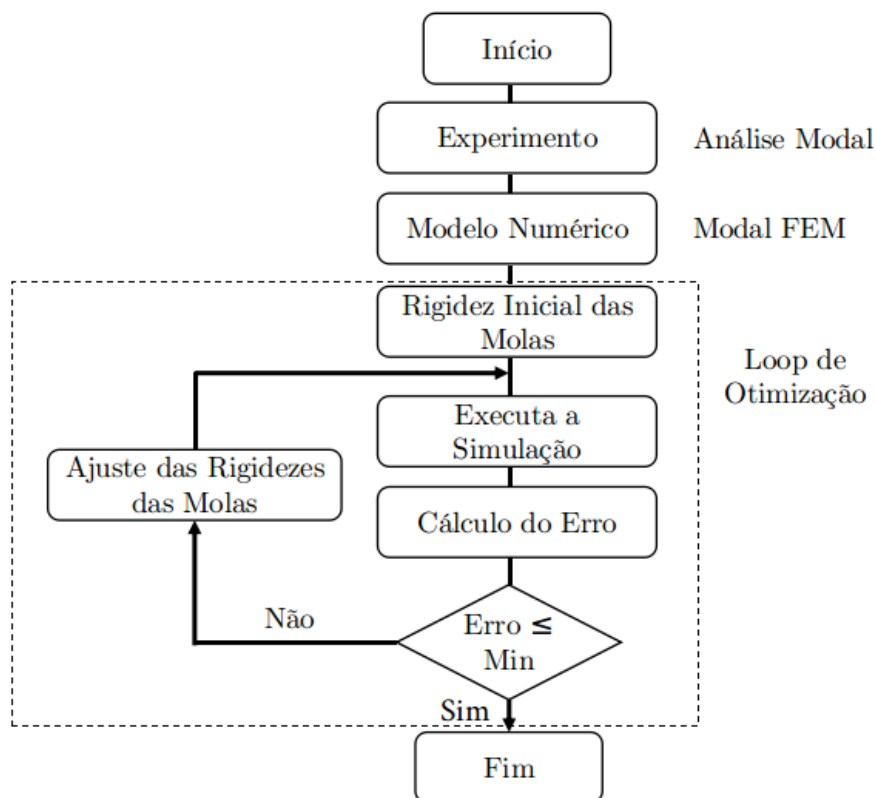
$$k_{3,3} = k_{3,3} + k_{Uz}. \quad (\text{A.2})$$

O termo referente a mola de rotação na direção X é descrito como:

$$k_{4,4} = k_{4,4} + k_{Rx}. \quad (\text{A.3})$$

O procedimento completo adotado para esta abordagem de ajuste de modelo é apresentado na Figura A.2. Os valores de rigidez da mola de translação ( $k_{Uz}$ ) e da mola de rotação ( $k_{Rx}$ ) foram gerados de acordo com um algoritmo de otimização *PSO*, que será apresentado a seguir. Em seguida, a solução do problema de autovalores e autovetores foi realizada, obtendo-se as frequências naturais e formas modais de vibração da estrutura. E por fim, as frequências naturais obtidas através desta simulação foram comparados com os obtidas experimentalmente. Este procedimento foi repetido até que a condição de parada preestabelecida fosse atingida, resultando na melhor configuração de rigidez para as molas.

Figura A.2: Fluxograma do método de ajuste do modelo.



Fonte: produção do próprio autor.

### A.4.1 Otimização

O método de Otimização por Enxame de Partículas (*PSO*) foi originalmente desenvolvido por Kennedy e Optimization (1995). Consiste em uma população inicial, que interage localmente entre si e é regida por regras globais. O presente trabalho utiliza a topologia totalmente conectada (*gbest*), neste caso, uma partícula considera toda a população como seus vizinhos topológicos.

Inicialmente, cada partícula possui uma posição e velocidade aleatórias. As partículas interagem entre si, informando a melhor posição, com esta informação, as velocidades e as posições são ajustadas para cada partícula. A velocidade de uma partícula  $i$  para o próximo incremento ( $k + 1$ ) é dada como

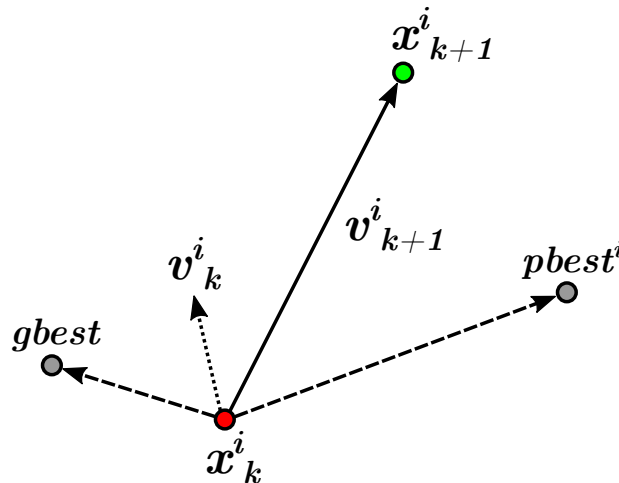
$$v_{k+1}^i = \omega v_k^i + C_1 R_1 (p_{best}^i - x_k^i) - C_2 R_2 (g_{best} - x_k^i); \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (\text{A.4})$$

onde  $N$  é o número total de partículas,  $R_1$  e  $R_2$  são valores aleatórios de 0 a 1,  $p_{best}$  é a melhor posição para essa partícula, e  $g_{best}$  é a melhor posição global.  $\omega$ ,  $C_1$  e  $C_2$  são parâmetros escolhidos, onde o primeiro é um componente inercial da partícula, e os últimos são termos de "confiabilidade" entre as partículas e o grupo (PEREZ; BEHDINAN, 2007). E a posição para a próxima iteração pode ser determinada como

$$x_{k+1}^i = x_k^i + v_{k+1}^i; \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (\text{A.5})$$

sendo  $x_k^i$  a posição da iteração atual. A Figura A.3 apresenta a posição e a velocidade de uma partícula em um passo, e como a melhor posição global e a melhor posição das partículas influenciarão na próxima posição da partícula.

Figura A.3: Partícula atual, posição futura e velocidade.



Fonte: produção do próprio autor.

Idealmente, um estudo sobre os melhores valores de  $\omega$ ,  $C1$  e  $C2$  deve ser realizado, mas existem valores sugeridos que funcionam corretamente na maioria das situações (KENNEDY; OPTIMIZATION, 1995). Os valores entre 0,8 e 1,4 são propostos para  $\omega$ , e  $C1 = C2 = 2$ . O presente trabalho utilizou um valor de 0,8 para o componente inercial e o recomendado  $C1$  e  $C2$ . Os próximos passos consistem em definir o problema de otimização, onde a função objetivo deve ser desenvolvida e os limites dos parâmetros devem ser definidos.

### A.4.2 Limites de Busca do Algoritmo

Os limites das variáveis de projeto são uma parte importante da solução de otimização, e eles devem ser cuidadosamente definidos. O presente trabalho usa 2 variáveis de projeto, as molas de translação na direção Z ( $k_{Uz}$ ) e as molas rotativas na direção X ( $k_{Rx}$ ). Para encontrar seus limites, realizaram-se várias otimizações, utilizando amplas gamas de rigidez para as molas. Após alguma otimização usando diferentes limites de rigidez, foram calculadas as melhores rigidezes encontradas para cada simulação, e os limites foram definidos. A Tabela A.4 mostra os limites encontrados e utilizados no algoritmo PSO.

Tabela A.4: Limites das variáveis de projeto.

Variável de Projeto	Limite Inferior	Limite Superior
$k_{Uz}$ (N/m)	$10^5$	$10^8$
$k_{Rx}$ (N.m/rad)	$10^2$	$10^4$

Fonte: produção do próprio autor.

### A.4.3 Problema de Otimização

Como função objetiva no processo de otimização, foi calculado o erro quadrático médio (RMSE) de cada iteração, de acordo com a Equação A.6. O objetivo foi aproximar os valores das quatro primeiras frequências naturais obtidas numericamente com as obtidas experimentalmente, resultando em

$$RMSE = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^4 \left( \frac{fn_i^{exp} - fn_i^{num}}{fn_i^{exp}} \right)^2}, \quad (A.6)$$

onde  $fn_i^{exp}$  é a frequência natural obtida experimentalmente para o modo  $i$  e  $fn_i^{num}$  é a frequência natural numérica obtida para o mesmo modo. A Equação A.7 mostra a função objetivo para o problema de otimização, que deve ser minimizada, e os limites que o problema está sujeito ( $S.T.$ ), consistindo nos limites inferior e superior das variáveis de projeto, 2 neste caso. Estes limites são os especificados na Tabela A.4.

$$\text{Minimiza} \quad f(k_{Uz}, k_{Rx}) = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^4 \left( \frac{fn_i^{exp} - fn_i^{num}}{fn_i^{exp}} \right)^2}, \quad (\text{A.7})$$

$$\text{S.T.} \quad \begin{aligned} \underline{k_{Uz}} &\leq k_{Uz} \leq \overline{k_{Uz}} \\ \underline{k_{Rx}} &\leq k_{Rx} \leq \overline{k_{Rx}} \end{aligned}$$

Finalmente, para definir completamente o problema de otimização, os critérios de parada devem ser definidos. Para o presente trabalho, foram definidos três critérios, o número máximo de iterações, o tamanho mínimo da melhor posição e a mudança mínima do melhor valor objetivo. O primeiro é necessário, porque não permitirá que a simulação seja executada por muito tempo. Se o erro mínimo pretendido não for alcançado, o ciclo de otimização irá parar quando atingir o número máximo escolhido de iteração, neste caso 200. O segundo critério de parada é o tamanho mínimo da melhor posição, basicamente é a melhor posição encontrada, e se, após algum ponto, a melhor posição encontrada da partícula em um certo passo é muito próxima das etapas anteriores, significa que a melhor partícula é quase estática e este critério de parada foi atingido. O último critério, a mudança mínima do melhor valor objetivo, é bastante próximo do anterior, mas em vez de olhar para a posição das partículas, monitora a função objetivo. Se o valor objetivo do melhor valor for muito próximo ao último passo, o que também significa que provavelmente o mínimo local ou global também foi atingido e este critério de parada foi cumprido. Para os dois últimos critérios de parada o valor adotado foi  $1 \times 10^{-5}$ .

#### A.4.4 Resultados

O resultado deste processo de otimização e ajuste de modelo são as rigidezes das molas de translação no eixo Z, e as rigidezes das molas de rotação em torno do eixo X do modelo de Elementos Finitos. Os resultados obtidos para estas rigidezes, são apresentados na Tabela A.5.

Tabela A.5: Rigidezes obtidas com o ajuste de modelo.

$k_{Uz}$	25,727 GN/m
$k_{Rx}$	780,4 Nm/rad

Fonte: produção do próprio autor.



# Apêndice B

## Parâmetros Modais Extraídos

Tabela B.1: Parâmetros modais.

<i>FRF</i>	Frequência natural ( $fn$ )		Fator de amortecimento ( $\xi$ )	
	Modo 1	Modo 2	Modo 1	Modo 2
1FZ1UZ	997	1373	0,0135	0,0069
2FZ1UZ	997	1371	0,0150	0,0073
3FZ1UZ	995	1371	0,0146	0,0073
4FZ1UZ	995	1375	0,0150	0,0079
5FZ1UZ	996	1370	0,0142	0,0077
6FZ1UZ	998	1372	0,0152	0,0072
7FZ1UZ	999	1371	0,0146	0,0077
8FZ1UZ	999	1370	0,0148	0,0079
9FZ1UZ	996	1372	0,0150	0,0074
10FZ1UZ	995	1373	0,0139	0,0070
11FZ1UZ	995	1374	0,0135	0,0070
12FZ1UZ	999	1370	0,0149	0,0071
13FZ1UZ	998	1372	0,0150	0,0075
14FZ1UZ	998	1375	0,0142	0,0079
15FZ1UZ	996	1371	0,0145	0,0081
16FZ1UZ	995	1373	0,0148	0,0076
17FZ1UZ	999	1373	0,0139	0,0081
18FZ1UZ	996	1372	0,0151	0,0078
19FZ1UZ	999	1373	0,0146	0,0071
20FZ1UZ	995	1374	0,0145	0,0076
21FZ1UZ	999	1373	0,0144	0,0070
22FZ1UZ	995	1373	0,0146	0,0071

continua na próxima página

Tabela B.1: Parâmetros modais (continuação).

<i>FRF</i>	Frequência natural ( $fn$ )		Fator de amortecimento ( $\xi$ )	
	Modo 1	Modo 2	Modo 1	Modo 2
23FZ1UZ	999	1372	0,0147	0,0072
24FZ1UZ	998	1372	0,0142	0,0071
25FZ1UZ	995	1373	0,0148	0,0070
26FZ1UZ	995	1371	0,0143	0,0071
27FZ1UZ	998	1372	0,0142	0,0069
28FZ1UZ	998	1373	0,0143	0,0072
29FZ1UZ	996	1372	0,0145	0,0076
30FZ1UZ	997	1371	0,0143	0,0070
31FZ1UZ	998	1372	0,0149	0,0071
32FZ1UZ	996	1374	0,0142	0,0071
33FZ1UZ	999	1373	0,0142	0,0071
34FZ1UZ	997	1372	0,0143	0,0068
35FZ1UZ	997	1372	0,0146	0,0069
36FZ1UZ	996	1373	0,0146	0,0069
37FZ1UZ	998	1372	0,0143	0,0072
38FZ1UZ	999	1372	0,0145	0,0071
39FZ1UZ	999	1372	0,0139	0,0069
40FZ1UZ	995	1373	0,0150	0,0071
41FZ1UZ	995	1373	0,0141	0,0073
42FZ1UZ	999	1373	0,0150	0,0076
43FZ1UZ	995	1372	0,0141	0,0073
44FZ1UZ	999	1373	0,0149	0,0072
45FZ1UZ	999	1373	0,0159	0,0069
46FZ1UZ	999	1373	0,0153	0,0076
47FZ1UZ	997	1372	0,0145	0,0069
48FZ1UZ	998	1371	0,0146	0,0077
49FZ1UZ	999	1373	0,0139	0,0073
50FZ1UZ	999	1372	0,0150	0,0077
51FZ1UZ	997	1372	0,0145	0,0073
52FZ1UZ	999	1373	0,0140	0,0073
53FZ1UZ	999	1373	0,0140	0,0069
54FZ1UZ	999	1373	0,0150	0,0073
55FZ1UZ	995	1373	0,0150	0,0069

# Apêndice C

## Redução de Modelo Numérico Aplicado a Análise Dinâmica

Em análise dinâmica de estruturas quando se procura comparar os resultados obtidos por via numérica com os obtidos por via experimental, enfrenta-se a dificuldade de os modelos dinâmicos diferirem tanto no número de modos de vibração como no número de graus de liberdade.

Em termos de compatibilidade entre os graus de liberdade considerados na análise experimental e numérica, faz-se necessário reduzir a dimensão do modelo numérico para uma dimensão compatível com a do modelo experimental (Métodos de Redução) ou expandir o modelo experimental para a dimensão do modelo numérico (Métodos de Expansão). Nesta proposta, para esta adequação, serão utilizados os seguintes métodos de redução: Método de Redução de Guyan ou Condensação Estática (GUYAN, 1965) e SEREP - System Equivalent Reduction-Expansion Process (O'CALLAHAN et al., 1989).

Diante do exposto, o objetivo deste trabalho é estudar a aplicação de algoritmos de redução de ordem de modelo numérico (Guyan e SEREP) aplicado a análises dinâmicas, mantendo-se as características originais do sistema.

### C.1 Materiais e Métodos

Um modelo de elementos finitos de uma viga de alumínio ( $E = 70 \text{ GPa}$  e  $\rho = 2750 \text{ kg/m}^3$ ) com 300 mm de comprimento, 20 mm de largura e 5 mm de espessura, de condição de contorno livre-livre, foi implementado no programa Scilab 6.0.0 utilizando elemento de viga com dois graus de liberdade por nó, juntamente com os dois algoritmos de redução de ordem de modelo propostos (SEREP e Guyan).

A primeira técnica estudada, também conhecida como método estático foi apresentado por Guyan (1965), mas ainda hoje é muito popular no meio científico. Baseia-se na resolução de um problema estático, onde são contabilizados os graus de liberdade prin-

cipais (*masters*) e secundários (*slaves*). O modelo simplificado resulta da resolução do seguinte problema estático

$$\begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_m \\ u_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_m \\ F_s \end{Bmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

Onde, assume-se que as forças estáticas e dinâmicas aplicadas nos graus de liberdade não considerados no procedimento experimental (*slaves*) são nulas. O que corresponde a dizer que:

$$\{F_s\} = 0. \quad (\text{C.2})$$

Da resolução da parte inferior da Equação C.1 resulta uma relação entre os deslocamentos nos pontos *slaves* e *masters*.

$$[K_{sm}] \{u_m\} + [K_{ss}] \{u_s\} = \{F_s\} = 0; \quad (\text{C.3})$$

$$\{u_s\} = -[K_{ss}]^{-1} [K_{sm}] \{u_m\}. \quad (\text{C.4})$$

A parcela superior conduz a uma equação onde  $\{u_s\}$  é substituído por C.4, de forma a obtermos a seguinte relação entre força e deslocamento.

$$\{F_m\} = [[K_{mm}] - [K_{ms}] [K_{ss}]^{-1} [K_{sm}]] \{u_m\}. \quad (\text{C.5})$$

Sendo a matriz de rigidez reduzida do sistema definida pela seguinte expressão.

$$[K^{Red}] = [K_{mm}] - [K_{ms}] [K_{ss}]^{-1} [K_{sm}]. \quad (\text{C.6})$$

A nova matriz de rigidez relaciona os esforços com os deslocamentos apenas nos graus de liberdade principais (*master*). No entanto, esta matriz já contabiliza a influência dos restantes graus de liberdade não contabilizados experimentalmente, (*slaves*).

Guyan (1965) propõe a definição de uma matriz de transformação, capaz de realizar a redução da dimensão das matrizes de massa e rigidez obtidas pelo Método dos Elementos Finitos.

$$\begin{Bmatrix} u_m \\ u_s \end{Bmatrix} = [T]_{Guyan} \{u_m\} \quad \text{onde:} \quad [T]_{Guyan} = \begin{bmatrix} I \\ -[K_{ss}^{-1}] [K_{sm}] \end{bmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

Esta técnica preve o mesmo tratamento para as matrizes de massa e rigidez que

podem ser definidas a partir das obtidas pelo *MEF*.

$$[K_{mm}^{Red}] = [T]^T [K_{mef}] [T]; \quad (C.8)$$

$$[M_{mm}^{Red}] = [T]^T [M_{mef}] [T].$$

O segundo método de redução estudado foi apresentado O'Callahan et al. (1989) e fundamentalmente caracteriza-se por definir uma matriz de transformação entre o sistema reduzido e o global, a partir do conhecimento das formas naturais de vibração extraídas do modelo numérico completo.

O método *SEREP* recorre à partição da matriz modal obtida pelo *MEF*, associada aos graus de liberdade comuns ao modelo experimental (*master*) representada por:

$$[U_m], \quad (C.9)$$

que por inversão se transforma na matriz modal inversa generalizada que possui as mesmas dimensões da original.

$$[U_m^{-1}]. \quad (C.10)$$

A matriz de transformação entre o sistema reduzido e o completo é obtida por:

$$[T]_{SEREP} = \begin{bmatrix} U_m \\ U_s \end{bmatrix} [U_m^{-1}] = [U] [U_m^{-1}], \quad (C.11)$$

onde para a situação em que o número de graus de liberdade, considerados no processo experimental, é igual ao número de modos de vibração considerados na análise dinâmica, o processo simplifica-se, resultando na matriz transformação.

$$[T]_{SEREP} = \begin{bmatrix} U_m \\ U_s \end{bmatrix} [U_m^{-1}] = \begin{bmatrix} I \\ U_s U_m^{-1} \end{bmatrix}. \quad (C.12)$$

No entanto, na maior parte das situações práticas é muito comum o número de graus de liberdade *master* ser superior ao número de modos necessários na análise, resultando na necessidade de definir a matriz modal inversa generalizada com dimensões coerentes com as demais matrizes da equação.

$$[U_m^{-1}] = \left( [U_m]^T [U_m] \right)^{-1} [U_m]^T. \quad (C.13)$$

Depois de ajustadas as dimensões da matriz modal inversa generalizada, é então possível obter a matriz de transformação que permite a obtenção das matrizes caracterís-

ticas do sistema global no sistema reduzido. Estas correspondem às expressões:

$$[K_{mm}^{Red}] = [T]^T [K_{mef}] [T] \quad (C.14)$$

$$[M_{mm}^{Red}] = [T]^T [M_{mef}] [T]$$

## C.2 Resultados e Discussões

A Tabela C.1 apresenta os resultados das análises modais para os 5 primeiros modos obtidas pelo modelo completo (*Full model*) após a redução das matrizes de massa e rigidez pelo método Guyan e pelo método SEREP.

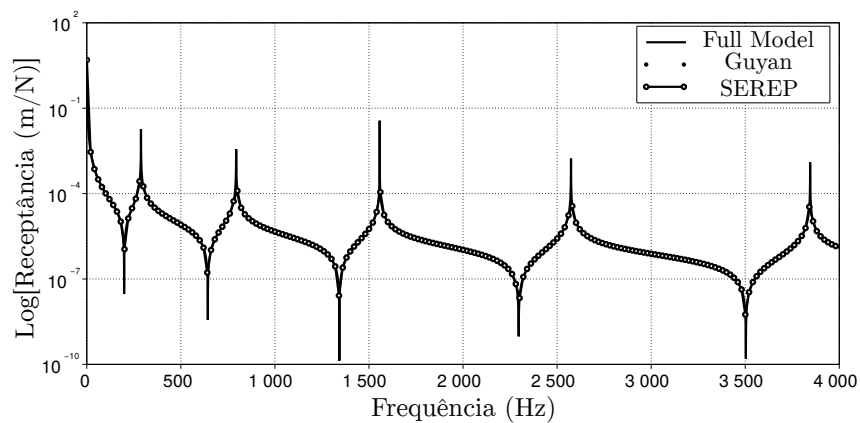
Tabela C.1: Frequências naturais - *Hz*.

Modo	Analítico	<i>Full model</i>	Guyan	<i>SEREP</i>
1	288,12	288,12	288,12	288,12
2	794,21	794,21	794,21	794,21
3	1556,96	1556,98	1556,99	1556,98
4	2573,73	2573,83	2573,86	2573,86
5	3844,72	3845,01	3845,13	3845,12

Fonte: produção do próprio autor.

A Figura C.1 apresenta os resultados obtidos para a *FRF* no ponto 1FY1UY, que se refere a *FRF* obtida da medição da resposta no grau de liberdade 1 na direção Z submetido a uma excitação nos mesmos ponto e direção.

Figura C.1: *FRF*s - *Full model* versus métodos de redução.



Fonte: produção do próprio autor.

### C.3 Conclusões

As técnicas de redução de ordem de modelo estudadas mostraram-se bastante eficientes para reduzir o número de graus de liberdade para um número desejado. Esta constatação é validada observando tanto os resultados da análise modal quanto as *FRFs*.